NOTAS DE ENSINO

POR QUE TEMER OS ÉPSILONS E DELTAS?

Alcilêia Augusto H. de Mello

A crítica aos cursos de Cálculo com ε's e δ's é uma constante em discussões sobre o ensino, principalmente quando estes cursos se dirigem a não matemáticos. Tenho dado aulas de Cálculo em cursos de Arquitetura, Zootecnia e outros onde o enfoque dos ε's e δ's me parece o mais direto e manejável, especialmente agora, quando os processos de cálculo aproximado ganham maior popularidade. Aproveito a MU para transmitir alguns pontos em que considero a utilização dos ε's e δ's de grande utilidade e fácil compreensão.

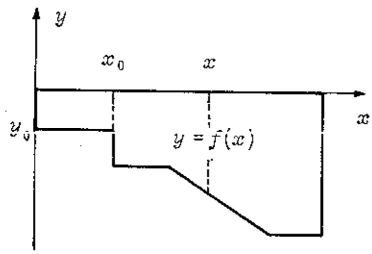
Para nossos alunos, os números reais já apareceram natural e freqüentemente como medidas e, portanto, passíveis de erros. É natural, então, admitir que, ao lidarmos com um número real precisemos recorrer a alguma aproximação x de x_0: isto pode acontecer se x_0 for irracional; ou racional de representação decimal infinita; ou mesmo um racional com mais dígitos do que nos interesse considerar no momento; ou porque x_0 seja uma medida cujo conhecimento exato esbarra nas limitações de precisão de nossos instrumentos; ou ainda em situações outras, como o caso em que x_0 seja o resultado de operações que já foram feitas com dados aproximados. Na maioria das vezes, conhecemos o número x e temos a informação de que x seja uma aproximação dentro de uma certa margem $\delta > 0$ de erro do x_0, isto é, $|x-x_0| < \delta$. Este número δ pode ser um número estritamente positivo qualquer, fato que pode ser ilustrado com exemplos em que x_0 represente o peso de substâncias químicas constantes em bulas de remédios ou a distância entre dois astros,...

As funções reais de variável real podem ser encaradas como relações entre duas destas medidas, por exemplo.

Ao introduzir as funções de uma variável real com valores reais, $y = f(x)$, dentro deste contexto, surgem imediatamente algumas indagações como, por exemplo:

1ª. ao calcular $y = f(x)$, onde x é uma aproximação de x_0, obteremos uma aproximação y de $y_0 = f(x_0)$?

2ª. sendo afirmativa a resposta a esta questão, qual seria a relação entre os erros cometidos no dado e no resultado?



Alguns exemplos como $y = [x]$ (maior inteiro contido em x) ou a profundidade de uma piscina com o perfil como o da figura, ou $y = x^2$, mostram que a resposta à primeira indagação acima é "nem sempre".

Já vê o leitor que o caminho está aberto para que comecemos o estudo pelas funções contínuas, restringindo-nos logo depois às diferenciáveis.

Resposta à 1ª indagação - Funções Contínuas

Propomos, então, começar o estudo das funções por aquelas que sejam "razoáveis" perante esta 1ª questão. Definimos função contínua em x_0 como sendo aquela que satisfaz à seguinte propriedade:

- dada a margem de erro para o resultado, existe uma certa margem de erro tal que, respeitada na aproximação do dado e feito o cálculo da função para esta aproximação, obtém-se uma aproximação do resultado dentro da margem estabelecida. Ou seja,

  $y = f(x)$ é contínua em x_0, se, e só se, dado $\varepsilon > 0$ (margem de erro para o resultado), existir $\delta > 0$ (margem de

erro para o dado) tal que, se x *está no domínio de* f *e* $|x-x_0| < \delta$, *tenha-se* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

O quanto trabalhar em propriedades e suas provas e a natureza dos exemplos e contra-exemplos a serem estudados dependem muito do objetivo do curso. Salientamos, entretanto, que este enfoque torna algumas demonstrações bastante naturais; por exemplo, a de que a soma de funções contínuas em x_0 seja ainda uma função contínua em x_0. O estudante percebe com facilidade que se trata de não ultrapassar a margem dada ε de erro quando se somam duas parcelas aproximadas, etc...

Ao definirmos função contínua num conjunto, aparentemente desviamo-nos do roteiro estabelecido. Mais adiante, entretanto, para responder à 2ª indagação (a da relação entre ε e δ) usaremos o resultado: "a imagem por uma função contínua de um intervalo fechado e limitado é ainda um intervalo fechado e limitado". Como sabemos, esta propriedade exerce papel importante no cálculo aproximado com funções de classe C^1 (uma função é de classe C^1 se for derivável, com derivada contínua).

Retornando à 2ª indagação, observamos que nos diferentes exemplos que devem ter sido estudados para ilustrar a definição de continuidade, os processos para determinar um δ a partir do ε dado são bastante elaborados, dependem da função e, muitas vezes, do x_0 em consideração. Isto é, se f é contínua em x_0, dado ε, existe algum δ. Mas...qual? Se quisermos uma regra geral para o cálculo de um valor conveniente de δ, teremos que nos conformar com uma classe ainda menor de funções (que serão as funções C^1). Antes de estabelecer que funções são estas teremos de introduzir o conceito de derivada e para isto o de limite.

Limites e pontos de acumulação

Conqüanto a 2ª indagação nos sugira um estudo mais acurado da relação entre ε e δ, o que poderia começar por um estudo mais cuidadoso da razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (em que $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = y - y_0$ são os erros cometidos, razão esta só definida para $\Delta x \neq 0$), existem motivações melhores para justificar a necessidade da introdução de um "valor para este quociente" mesmo quando Δx tenda a 0. Conceitos como os de velocidade (média e instantânea), densidade, tangência e outros semelhantes são, a meu ver, mais indicados para motivação nesta fase do programa.

Vale destacar, no entanto, que no caso de estar definida e ser contínua em x_0, os valores $f(x)$ — quando se tomam convenientes aproximações x de x_0 — são aproximações de $f(x_0)$. Suponhamos, agora, que para aproximações convenientes x de x_0, com $x \neq x_0$, os valores $f(x)$ sejam aproximações de um certo número ℓ (que pode ou não ser igual a $f(x_0)$, ou f pode nem mesmo estar definida em x_0); diremos, então que $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Para dar forma a esta definição é preciso introduzir o conceito de ponto de acumulação de um conjunto. "Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de A se, em A, existirem aproximações de x_0 distintas de x_0 e arbitrariamente finas; isto é, se, dada a margem de erro $\delta > 0$, existir $x \in A$ com $x \neq x_0$ e $|x - x_0| < \delta$". É fácil verificar, agora, que se x_0 é ponto de acumulação do domínio de f, uma boa definição para $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ será o número $\ell \in \mathbb{R}$ que torne a função g contínua em x_0, onde g é dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \operatorname{dom} f \text{ e } x \neq x_0 \\ \\ \ell, & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

Idéias de pontos de acumulação à direita ou à esquerda e de limites laterais podem ser obtidas quando se consideram somente aproximações por falta ou somente por excesso.

Resposta à 2ª indagação e outras perguntas

O curso de Cálculo continua aparentemente distante da motivação inicial até que se chega ao Teorema do Valor Médio e às funções de classe C^1, quando então se pode responder à 2ª indagação:

> Se uma função $y = f(x)$ é de classe C^1 num intervalo $[a, b]$, existe $M > 0$ tal que, enquanto dado e aproximações se mantenham em $[a, b]$, tem-se $|\Delta y| \leq M|\Delta x|$? (basta, para isso, tomar $M \geq max \{|f'(x)|, x \in [a, b]\}$.

É supreendente para o estudante que, nesta hipótese (f de classe C^1 num intervalo fechado e limitado), por mais complicado que seja o cálculo de y em função de x, a evolução dos erros pode ser tomada sempre como linear (o produto pela constante M).

Outras indagações surgem ainda nesta mesma linha do cálculo aproximado, tais como: e se não soubermos calcular $f(x)$, como no caso de e^x, sen x, ln x, etc...? ou como obter informações sobre as funções que forem deixadas para trás, como as que não sejam C^1 ou as que nem contínuas sejam?

E assim temas mais avançados vão sendo introduzidos como fórmulas de Taylor, séries de potências, de Fourier, teoremas de aproximação, etc...

E tudo começou com ε's e δ's.

Instituto de Matemática, USP
Caixa Postal 20.570, Ag. Iguatemi
01.498 São Paulo, SP