Matemática Universitária, Nº 5, Junho de 1987, 61-68.

A Função de Marcinkiewicz

Roberto O. Gandulfo

Qual é o comportamento de uma função contínua com relação às propriedades de derivação?

Embora a formulação da pergunta não seja muito precisa, vamos dar-lhe uma resposta que, como veremos mais adiante, está relacionada com diferentes conjuntos de funções contínuas que, do ponto de vista da diferenciação, não são bem comportadas. Para isso faremos algumas considerações preliminares.

Seja $C(I)$ o conjunto das funções contínuas num intervalo compacto $I \subset \mathbf{R}$. Definindo soma e diferença de funções e produto por números reais da maneira usual, o conjunto $C(I)$, munido da norma do supremo,

$$\| f \|_0 = \sup_{x \in I} |f(x)|,$$

passa a ser um espaço de Banach real.

É bem conhecida a existência de funções em $C(I)$ que não têm derivadas em ponto algum de I, enquanto que, por outro lado, o teorema de Weierstrass nos diz que a coleção de todos os polinômios é um subconjunto denso em $C(I)$. Vemos então que existem funções contínuas "ruins" (sem derivada em ponto algum) e muitas funções contínuas "boas" (com derivadas de todas as ordens em todo conjunto I).

Podemos, de algum modo, avaliar quantas funções "ruins" tem $C(I)$?

Um modo de fazê-lo nos espaços de Banach (ou, em geral, em espaços métricos completos) é por meio do conceito de conjunto residual:

Se B é um espaço de Banach, um conjunto $A \subset B$ é dito *residual* se seu complemento em B é *magro*, isto é, se

$$B \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

onde o interior do fecho de cada B_n é vazio.

Um resultado clássico que pode ser encontrado em livros de topologia (veja [4], por exemplo) afirma que se A é residual em B, então A é necessariamente denso e não pode ser escrito como reunião enumerável de conjuntos magros. Por causa disto é natural afirmar que se A é residual, então ele tem "mais" elementos que seu complemento em B, ou que os elementos de A são "maioria" em B. Por exemplo, no caso particular do conjunto dos números reais $\mathbf{R}$, se $\mathbf{Q}$ é o conjunto dos números racionais, então, com relação à distância usual, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ é residual, enquanto que o conjunto $\mathbf{Q}$ não é. Este fato dá uma certa justificativa à afirmação de que há mais números irracionais do que racionais.

Em nosso caso particular $B = \mathcal{C}(I)$, tomemos A como sendo a coleção de todas as funções contínuas sem derivadas em qualquer ponto de I. Exatamente pela dificuldade natural de imaginar ou construir exemplos de funções em A, vem a ser de certo modo surpreendente que A resulte ser residual em $\mathcal{C}(I)$ (veja [4]), ou seja, as funções ruins são maioria na classe de todas as funções contínuas.

Consideremos os seguintes três subconjuntos de A: A_i é a coleção das funções de $\mathcal{C}(I)$ que satisfazem a propriedade i) enunciada a seguir, para $i = 1, 2, 3$:

1) sem derivada finita ou infinita em qualquer ponto de I;
2) sem derivada lateral finita em qualquer ponto de I;
3) sem derivada lateral finita ou infinita em qualquer ponto de I.

Vê-se claramente que $A_1 \supset A_2 \supset A_3$. Com relação aos conjuntos A_1 e A_2 sabe-se que ambos são residuais em $\mathcal{C}(I)$, enquanto que para A_3 a situação é diferente. A. Besicovitch, em 1925, construiu geometricamente o primeiro exemplo de uma função da classe A_3 (veja [2]). Sete anos depois, S. Saks, mostrou que A_3 é um conjunto magro em $\mathcal{C}(I)$. Seis anos mais tarde A. P. Morse publicou em [6] uma demonstração aritmética da existência de funções da classe A_3 motivado, segundo suas próprias palavras, pela dificuldade de entender o argumento utilizado por Besicovitch, o que, somado ao fato de que A_3 tem "poucas" funções de acordo com Saks, poderia deixar dúvidas sobre a existência de tais funções.

Todos estes resultados mostram que, de um modo geral, as funções contínuas podem exibir um comportamento muito pobre com relação às propriedades de diferenciação.

A função de Marcinkiewicz, que vamos descrever em detalhe neste artigo, é também uma função contínua "ruim"; mas, exceto em subconjuntos de I com medida de Lebesgue nula, ela se comporta de uma maneira notável com relação à diferenciação. Como se isso não fosse suficiente, Marcinkiewicz demonstra que a coleção de todas as funções de $C(I)$ com essa propriedade é residual em $C(I)$!

Teorema (de Marcinkiewicz, [5]): *Seja I um intervalo compacto, $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sucessão numérica arbitrária com limite zero e $h_n \neq 0$ para todo n. Então existe uma função $\psi \in C(I)$ com a seguinte propriedade:*

Dada qualquer função mensurável f definida em I, pode-se achar uma subsucessão $(s_j)_{j=1}^{\infty}$ de $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ e um subconjunto $E \subset I$ de medida de Lebesgue nula, tal que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\psi(x+s_j)-\psi(x)}{s_j} = f(x)$$

para todo $x \in I \setminus E$.

A demonstração deste teorema utiliza os seguintes resultados preliminares que enunciaremos como Lemas 1 e 2.

Lema 1. *Dada uma função g contínua em I e $\epsilon > 0$ arbitrário, existe uma função ω contínua em I, tal que $\omega'(x) = 0$ em quase todo ponto $x \in I$ e*

$$\| g - \omega \|_0 < \epsilon,$$

onde $\| \cdot \|_0$ é a norma do supremo.

Demonstração. Primeiro decompomos o intervalo I numa união

$$I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j,$$

onde os subintervalos I_j são fechados, adjacentes, com interiores disjuntos dois a dois e escolhidos de tal modo que a oscilação de g em cada I_j seja menor do que ϵ. O próximo passo é determinar em cada intervalo I_j e com a mesma construção da *função singular de Lebesgue,* uma função ω_j contínua em I_j, monótona, com derivada nula em quase todo ponto de I_j e que coincide com g nos extremos de I_j. Essa função de Lebesgue, também chamada *função de Cantor,* está descrita em [1], pp. 40 e 41; ou em [3], pp. 96 e 97.

A função ω definida em I como $\omega(x) = \omega_j(x)$ para $x \in I_j$, $j = 1, \ldots, n$ tem as propriedades desejadas, como é fácil verificar.

O lema seguinte é uma consequência fácil do anterior:

Lema 2: *Dadas duas funções f_1 e f_2 contínuas em I, f_2 derivável em quase todo ponto de I, e $\epsilon > 0$, existe uma outra função u contínua em I, tal que $u'(x) = f_2'(x)$ em quase todo ponto de I e $\| u - f_1 \|_0 < \epsilon$.*

Demonstração: Tomemos $g = f_1 - f_2$ e seja ω a função do Lema 1. Então se definirmos $u = f_2 + \omega$ verificamos fácilmente que $u'(x) = f_2'(x)$ em quase todo ponto de I e $\| u - f_1 \|_0 = \| g - \omega \|_0 < \epsilon$.

Agora podemos começar a construção de Marcinkiewicz:

Demonstração do Teorema: Dividimos a prova em duas partes:

Parte 1: Dada a sucessão (h_n), construiremos, por indução, uma coleção de funções $\psi_k \in C(I)$, certos subconjuntos E_k de I e uma subsucessão particular de (h_n).

Como a coleção de todos os polinômios com coeficientes racionais é um conjunto enumerável, podemos fixar uma enumeração $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ de todos eles; esta sucessão de polinômios forma um conjunto denso em $C(I)$ com a norma do supremo. Sejam ψ_1 uma primitiva de P_1, $E_1 = \emptyset$, $n_1 = 1$ e $t_1 = h_{n_1}$.

Suponhamos que já foram escolhidas as funções contínuas $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k-1}$, os conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}$ e os números $h_{n_1}, h_{n_2}, \ldots, h_{n_{k-1}}$ da sucessão original. (Para facilitar a notação escreveremos $t_1 = h_{n_1}, t_2 = h_{n_2}, \ldots, t_{k-1} = h_{n_{k-1}}$.) Queremos mostrar como escolher ψ_k, E_k e $t_k = h_{n_k}$.

Usando o Lema 2 com $f_1 = \psi_{k-1}$, f_2 uma primitiva de P_k e $\epsilon = \frac{|t_{k-1}|}{k-1}$, escolhemos uma função contínua ψ_k tal que $\psi_k' = P_k$ em quase todo ponto de I e

$$\| \psi_k - \psi_{k-1} \|_0 < \frac{|t_{k-1}|}{k-1}. \tag{1}$$

Consideremos agora a sucessão de funções ϕ_n, definidas por

$$\phi_n(x) = \frac{\psi_k(x + h_n) - \psi_k(x)}{h_n}$$

para todo n natural e k fixo.

Devido ao fato de que $\psi_k'(x) = P_k(x)$ para quase todo $x \in I$, teremos $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = P_k(x)$ para quase todo $x \in I$; então, pelo teorema de Egorov (ver [8]), existe um conjunto $E_k \subset I$ tal que

$$|E_k| < 2^{-k} \tag{2}$$

(as barras denotam medida de Lebesgue) e $\phi_n(x) \to P_k(x)$ uniformemente em $I \setminus E_k$ quando $n \to \infty$. Logo, podemos achar um número natural $n_k > n_{k-1}$ tal que, se escrevermos $t_k = h_{n_k}$, teremos

$$|t_k| < \frac{|t_{k-1}|}{2} \tag{3}$$

e

$$|\phi_{n_k}(x) - P_k(x)| = |\frac{\psi_k(x+t_k) - \psi_k(x)}{t_k} - P_k(x)| < \frac{1}{k} \tag{4}$$

para todo $x \in I \setminus E_k$.

Desta maneira ficam totalmente determinadas as funções contínuas ψ_k, os conjuntos E_k e uma subsucessão (t_k) da sucessão original satisfazendo (1), (2), (3) e (4).

Usando (1) deduzimos que para todo $x \in I$ e $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} |\psi_{k+j}(x) - \psi_k(x)| &\leq \sum_{r=1}^{j} |\psi_{k+r}(x) - \psi_{k+r-1}(x)| \\ &\leq \sum_{r=1}^{j} \frac{|t_{k+r-1}|}{k+r-1} < \sum_{r=1}^{j} \frac{|t_{k+r-1}|}{k}. \end{aligned}$$

Mas, pela propriedade (3), $|t_{k+r-1}| < \frac{|t_k|}{2^{r-1}}$; logo, para todo $x \in I$ e $j > 1$,

$$|\psi_{k+j}(x) - \psi_k(x)| < \sum_{r=1}^{j} \frac{|t_k|}{2^{r-1}k} < \frac{|t_k|}{k} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r-1}} = \frac{2|t_k|}{k}.$$

Isto assegura que a sucessão (ψ_k) converge uniformemente em I para uma função contínua ψ. Fazendo então $j \to \infty$ na desigualdade anterior, teremos, para todo $x \in I$,

$$|\psi(x) - \psi_k(x)| \leq 2\frac{|t_k|}{k}.$$

Daqui, e de (4) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\psi(x+t_k)-\psi(x)}{t_k} - P_k(x)\right| \leq \\
\leq\ & \left|\frac{\psi(x+t_k)-\psi(x)}{t_k} - \frac{\psi_k(x+t_k)-\psi_k(x)}{t_k}\right| \\
+\ & \left|\frac{\psi_k(x+t_k)-\psi_k(x)}{t_k} - P_k(x)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{|t_k|}[|\psi(x+t_k)-\psi_k(x+t_k)| + |\psi_k(x)-\psi(x)|] + \frac{1}{k} \\
\leq\ & \frac{2}{k} + \frac{2}{k} + \frac{1}{k} = \frac{5}{k},
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\left|\frac{\psi(x+t_k)-\psi(x)}{t_k} - P_k(x)\right| \leq \frac{5}{k} \tag{5}
$$

para todo $x \in I \setminus E_k$.

Parte 2: Estamos agora em condições de demonstrar a afirmação do teorema:

Seja f uma função mensurável arbitrária definida em I; pelo teorema de Lusin (ver [8]) existem funções $f_j \in \mathcal{C}(I)$ e conjuntos $H_j \subset I$ tais que

$$
|H_j| < 2^{-j} \qquad \text{e} \qquad f = f_j \qquad \text{em} \qquad I \setminus H_j.
$$

Por outro lado, sendo a coleção $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ densa em $\mathcal{C}(I)$, podemos encontrar números naturais $m_1 < m_2 < \cdots$ com a propriedade de que para cada $j \geq 1$,

$$
|f_j(x) - P_{m_j}(x)| < \frac{1}{j}
$$

para todo $x \in I$. Então,

$$
|f(x) - P_{m_j}(x)| < \frac{1}{j} \tag{6}
$$

para todo $x \in I \setminus H_j$.

Consideremos, em seguida, a subsucessão de $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ definida pelos índices m_j encontrados acima, ou seja, $t_{m_1}, t_{m_2}, \ldots, t_{m_j}, \ldots$ Seja $s_j =$

t_{m_j}, $j = 1, 2, \ldots$ Então (s_j) é uma subsucessão de (h_n) e

$$\left|\frac{\psi(x+s_j)-\psi(x)}{s_j} - f(x)\right| \leq \left|\frac{\psi(x+s_j)-\psi(x)}{s_j} - P_{m_j}(x)\right| + |P_{m_j}(x) - f(x)|.$$

O primeiro têrmo é limitado por $\frac{5}{m_j}$ para todo $x \in I \setminus E_{m_j}$ devido a (5), enquanto que o segundo têrmo é limitado por $\frac{1}{j}$ devido a (6) para todo $x \in I \setminus H_j$. Consequentemente,

$$\left|\frac{\psi(x+s_j)-\psi(x)}{s_j} - f(x)\right| < \frac{5}{m_j} + \frac{1}{j}, \tag{7}$$

para todo $x \in I \setminus E_{m_j} \cup H_j$.

Finalmente, seja $E \subset I$ o conjunto

$$E = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{j=p}^{\infty} (E_{m_j} \cup H_j).$$

Então, se $x \notin E$, existe $p \in \mathbf{N}$ tal que $x \notin E_{m_j} \cap H_j$, para $j \geq p$; e neste caso a desiqualdade (7) mostra que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\psi(x+s_j)-\psi(x)}{s_j} = f(x).$$

Por outro lado, pela definição de E,

$$|E| \leq \sum_{j=p}^{\infty} |E_{m_j} \cup H_j| \leq \sum_{j=p}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^j}\right) = \frac{1}{2^{p-2}}$$

para todo $p \geq 1$. Isto mostra que E tem medida nula, o que completa a demonstração do Teorema de Marcinkiewicz.

Observemos que a função ψ, apesar de ter um comportamento que naturalmente poderiamos qualificar de patológico, também apresenta uma certa regularidade, pois se tomarmos, por exemplo, $f(x) \equiv c$, $c =$ constante, e (s_k) a correspondente subsucessão, teremos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(x+s_k)-\psi(x)}{s_k} = c$$

quase sempre em I; e então ψ tem o mesmo comportamento em quase todos os pontos de I com relação à mesma sucessão (s_k).

Referências

[1] ÁVILA. G.: *Evolução dos Conceitos de Função e de Integral,* Matemática Universitária, No. 1 (Junho de 1985).

[2] BESICOVITCH, A. S.: *Diskussion der stetigen Funktionen im Zusamenkang mit der Frage über ihre Differentierbarkeit,* Bull. Acad. Sc. de Russie, 19 (1925), 527-540.

[3] GELBAUM, B. R. and OLMSTEAD, M. H.: *Conterexamples in Analysis,* Holden Day Inc., 1964.

[4] LIMA, ELON, L.: *Espaços Métricos,* Projeto Euclides, 1977.

[5] MARCINKIEWICZ, J.: *Sur les nombers dérives,* Fundamenta Mathematica, 24 (1935), 305-308.

[6] MORSE, A. P.: *A continuous function with no unilateral derivatives,* Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 496-507.

[7] SAKS, S.: *On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions,* Fundamenta Mathematica 19 (1932), 211-219.

[8] ZYGMUND, A.: WHEEDEN, R. L.: *Measure and Integral.* Marcel Dekker, 1978.

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília
70.910 Brasília, DF