Matemática Universitária, Nº 5, Junho de 1987, 69-75.

Curvas de Largura Constante

J. F. Voloch

Durante o XVI Colóquio Brasileiro de Matemática no IMPA em julho, houve uma exibição de filmes sobre Matemática. Um deles referia-se a curvas de largura constante. Trata-se de um tópico bastante elementar de Geometria Diferencial, que envolve apenas conceitos ligados a curvas planas. Seus pré-requisitos estão amplamente cobertos pelo Capítulo I de [2] ou de [6].

Uma curva plana diferenciável por partes, parametrizada por comprimento de arco, é uma função $x : [0, L] \to \mathbf{R}^2$, diferenciável por partes, tal que $|x'(s)| = 1$ para $s \in [0, L]$ se x é diferenciável em s. L é o comprimento de x. A curva é dita ***simples*** se não tem auto-interseções, isto é, $x(s) \neq x(s')$ se $0 \leq s < s' < L$. A curva é ***fechada*** se $x(0) = x(L)$ e $x'(0) = x'(L)$. Consideraremos aqui somente curvas simples.

Denotaremos por $t(s) = x'(s)$ o vetor tangente e por $n(s)$ o vetor normal, definido como o vetor unitário ortogonal a $t(s)$ tal que $(t(s), n(s))$ é uma base de $\mathbf{R}^2$ orientada negativamente. Se x é duas vezes diferenciável então $t'(s) = k(s) \cdot n(s)$, k um escalar, chamado a ***curvatura*** de x em s. Se x é três vezes diferenciável então $n'(s) = -k(s)t(s)$, como segue das fórmulas de Frenet.

Diremos que x é convexa se $k(s) \geq 0$ $\forall s \in [0, L]$. Pode-se provar que, se x é fechada, então x é convexa se e só se a região limitada por x é convexa.

Seja agora x uma curva fechada. Uma reta ℓ é dita ***reta suporte*** de x se ℓ toca x mas x está contida num dos semiplanos fechados definidos por ℓ. É claro que em cada direção há exatamente duas retas suportes de x e a distância entre essas retas é a ***largura***, λ, de x nessa direção (ver Fig. 1).

Uma curva é dita ***de largura constante*** se for fechada e a largura em todas as direções for a mesma. O círculo é, evidentemente, uma curva de largura constante. Outro exemplo de curva de largura constante é o triângulo de Reuleaux, esboçado na Figura 2. Nessa figura, ABC é um triângulo equilátero e o arco AB é o arco de círculo ligando A e B com centro em C e o resto da curva é traçado de modo semelhante.

Reuleaux foi um grande engenheiro do século passado que construiu curvas de largura constante em um tratado sobre máquinas, republicado em [5].

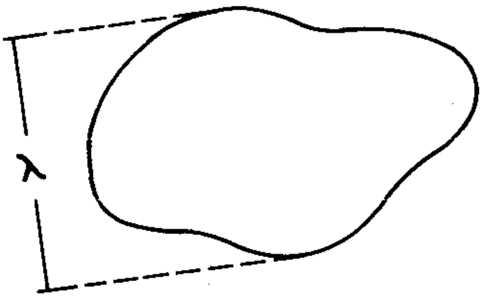

Figura 1

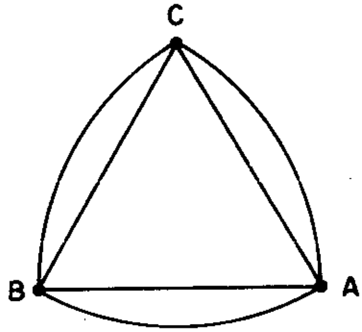

Figura 2

Veremos outros exemplos mais adiante, mas antes vamos estudar um pouco as curvas de largura constante. A idéia da prova do seguinte lema me foi sugerida por E. L. Lima.

Lema. *Sejam x uma curva de largura constante, ℓ_1, ℓ_2 retas suporte de x, paralelas, e x_i, $i = 1, 2$, pontos de $x \cap \ell_i$. Então a reta $\overline{x_1 x_2}$ é ortogonal a ℓ_1 e ℓ_2.*

Prova. Seja λ a largura de x. Suponha, por absurdo, que $\overline{x_1 x_2}$ não é ortogonal a ℓ_1. Como a distância de ℓ_1 a ℓ_2 é λ, devemos ter $|x_2 - x_1| > \lambda$. Considere agora a largura de x na direção ortogonal a $x_2 - x_1$. Essa largura é certamente maior ou igual a $|x_2 - x_1|$, logo maior do que λ. Então x tem duas larguras distintas em direções distintas e, conseqüentemente, não tem largura constante, o que contradiz a hipótese e completa a demonstração do lema.

Corolário. *Se ℓ é uma reta suporte de uma curva x de largura constante, então $x \cap \ell$ consiste de um único ponto. Em particular, x é convexa.*

Prova. Sejam ℓ' a outra reta suporte de x, paralela a ℓ, e x_1 um ponto de $\ell' \cap x$. Pelo lema, qualquer ponto de $\ell \cap x$ está na perpendicular a ℓ' por x_1, logo é único. É bem conhecido que uma curva tal que toda reta suporte a toca num único ponto é convexa e isso termina a demonstração do Corolário.

Uma modificação da prova do lema conduz ao seguinte resultado. Notemos que, numa curva convexa diferenciável, uma reta suporte é uma reta tangente.

Proposição. *Se x é uma curva C^2 de largura constante λ, a curvatura em todos os pontos de x é no mínimo $1/\lambda$.*

Prova. Seja x_1 um ponto de x. Seja ℓ_1 a reta tangente a x_1, que é suporte de x em x_1. Sejam ℓ_2 a outra reta suporte de x paralela a ℓ_1, e x_2 o ponto de $x \cap \ell_2$. Considere o círculo de centro x_2 e raio λ. Se houver $x_3 \in x$, fora do círculo, então $|x_2 - x_3| > \lambda$ e, como já vimos, isso implica que a largura na direção ortogonal a $\overline{x_2 x_3}$ é maior do que λ, o que é absurdo. Segue que x está contida no interior desse círculo. Como x_2 é centro do círculo, isso implica que a curvatura em x_1 é maior ou igual a $1/\lambda$, o que completa a demonstração.

Seja x uma curva C^3 de largura constante. Se $x_1 \in x$ então a reta suporte de x em x_1 é, como já vimos, a tangente a x em x_1. Se ℓ é a reta suporte de x paralela a x_1, seja x_2 o ponto de $x \cap \ell$. Se $x_1 = x(s)$ e $x_2 = x(s')$ definimos $s' = \varphi(s)$; então $t(\varphi(s)) = -t(s)$, $n(\varphi(s)) = -n(s)$. Como $\overline{x_1 x_2}$ é ortogonal a $t(s)$ (pelo lema) e $|x_1 - x_2| = \lambda$, temos $x(\varphi(s)) = x(s) + \lambda n(s)$. Diferenciando essa equação e usando $n' = -kt$ segue que $\varphi'(s) = \lambda k(s) - 1$. Então, pela proposição, $\varphi'(s) \geq 0$. Temos que φ é claramente injetiva, logo φ' não é identicamente nula.

As curvas de largura constante foram estudadas por Barbier ([1]) sob o ponto de vista da geometria integral e ele provou o seguinte resultado:

Teorema *(Barbier). Uma curva de largura constante λ tem comprimento $\pi\lambda$.*

Prova. $s \mapsto x(\varphi(s))$ é uma reparametrização de x, logo

$$L = \int_0^L |\frac{d}{ds} x(\varphi(s))| ds = \int_0^L \varphi'(s) ds = \int_0^L (\lambda k(s) - 1) ds = 2\pi\lambda - L.$$

Segue que $L = \pi\lambda$, como queríamos demonstrar.

Antes de Barbier, as curvas de largura constante foram estudadas por Euler [(3)] num trabalho onde o objetivo principal era estudar as curvas *triangulares*. Uma curva triangular é uma curva com três cuspides tendo uma única reta tangente em cada cuspide, como na Fig. 3.

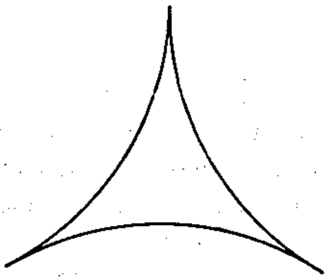

Figura 3

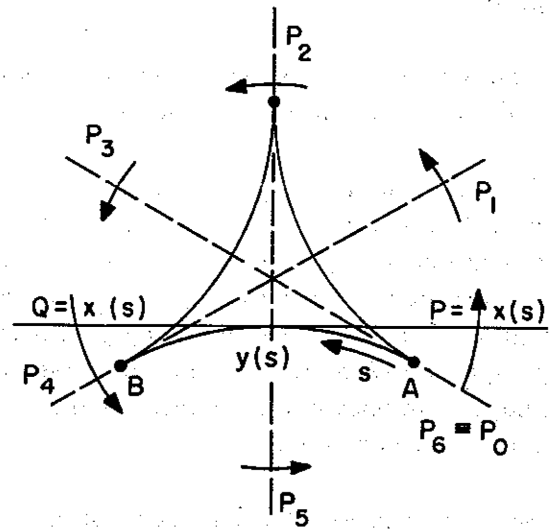

Figura 4

Uma *involuta* de uma curva diferenciável $y(s)$ é uma curva $x(s)$, tal que $x'(s)$ é ortogonal a $y'(s)$ para todo s, e o vetor $x(s) - y(s)$ é paralelo a $y'(s)$. Para essas curvas Euler provou o seguinte resultado:

Teorema *(Euler). Uma involuta fechada de uma curva triangular tem largura constante.*

Prova. Suponha $y(s)$ parametrizada por comprimento de arco.Seja $\tau(s) = y'(s)$ o vetor unitário tangente a $y(s)$ e representemos a involuta pela equação $x(s) = y(s) + \alpha(s)\tau(s)$, onde $\alpha(s)$ é uma função escalar conveniente a ser determinada. Então

$$x'(s) = y'(s) + \alpha(s)\tau'(s) + \alpha'(s)\tau(s).$$

Temos, por hipótese, que $(x'(s), y'(s)) = (x'(s), \tau(s)) = 0$. Tomando então o produto escalar da equação acima por $\tau(s)$ vem que $(y'(s), \tau(s)) + \alpha'(s) = 0$, logo $\alpha'(s) = -1$. Daí segue que $\alpha(s) = \alpha_0 - s$, α_0 constante; portanto, a involuta tem equação

$$x(s) = y(s) + (\alpha_0 - s)\tau(s).$$

Observe, entretanto, que o parâmetro α_0 assume diferentes valores em diferentes trechos da involuta, em se tratanto de uma involuta *fechada* que varia com continuidade. Assim, ao percorrermos a involuta de P_0 a P_1 (Fig. 4), o ponto $y(s)$ percorre a curva base de A até B; mas ao ultrapassarmos P_1, na involuta, o parâmetro α_0 deve ser alterado para garantir a continuidade dela. O mesmo ocorrerá nos pontos $P_2, \ldots, P_5$ e $P_6 \equiv P_0$. Vemos assim que, ao longo de uma tangente à curva base, digamos PQ, a involuta é descrita por duas parametrizações,

$$x(s) = y(s) + (\alpha_0 - s)\tau(s)$$

e

$$x_1(s) = y(s) + (\alpha_1 - s)\tau(s),$$

correspondentes, respectivamente, a dois de seus ramos. Essas parametrizações correspondem a pares de pontos $P = x(s)$ e $Q = x_1(s)$ onde a involuta corta uma mesma tangente. Como

$$|x(s) - x_1(s)| = |\alpha_0 - \alpha_1|$$

é constante, e $x(s) - x_1(s)$ é ortogonal a $x'(s)$ e $x_1'(s)$, segue-se que a involuta tem efetivamente largura constante, como queriamos provar.

Voltando ao artigo de Barbier, ele faz a seguinte observação, que atribui a Puiseux. Seja $x : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ um arco de curva convexa, parametrizada por comprimento de arco, de curvatura total π, isto é, $t(L) = -t(0)$. Para cada ponto $x(s)$ de x considere um ponto $\overline{x}(s)$ traçado sobre a normal a $x(s)$ distando $\lambda = |x(0) - x(L)|$ de $x(s)$. "Freqüentemente" a curva união de x com $\overline{x}$ é uma curva de largura constante. Erroneamente Hilbert e Cohn Vossen [(4)] afirmaram que essa construção sempre funciona. Uma condição necessária para que a construção funcione é que $k(s) \geq 1/\lambda$, $s \in [0, L]$, como segue da proposição. Outra condição necessária é que $L \leq \pi\lambda$, como segue do teorema de Barbier. Essas condições são também suficientes como mostra o resultado seguinte.

Teorema. *Seja $x : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ uma curva de classe C^2, simples, não fechada, parametrizada por comprimento de arco. Suponha que $x'(0) =$*

$-x'(L)$, $(x(L)-x(0))\perp x'(0)$ e que $k(s)\geq 1/\lambda$, $s\in[0,\lambda]$, onde $\lambda = |x(L)-x(0)|$. Então $L<\pi\lambda$ e existe uma extensão $\overline{x}:[0,\pi\lambda]\to\mathbf{R}^2$ de x (isto é, $\overline{x}(s)=x(s)$, $s\leq L$) tal que $\overline{x}$ é uma curva de largura constante λ.

Prova. Como $\lambda k(s)\geq 1$ temos

$$\lambda\int_0^L k(s)ds\geq L$$

e, como $t(0)=-t(L)$, temos

$$\int_0^L k(s)ds=\pi,$$

logo $L\geq\pi\lambda$. Se $L=\pi\lambda$, portanto $k(s)=1/\lambda$ para todo $s\in[0,L]$ e x é um semicirculo de raio λ. Então $|x(0)-x(\pi\lambda)|=2\lambda\neq\lambda$, absurdo. Logo $L<\pi\lambda$.

Para construir a extensão $\overline{x}$ vamos tentar construir a função φ que apareceu nas observações após a prova da proposição e com ela seguir a idéia de Puiseux.

Definimos

$$\varphi(s)=L+\int_0^s(\lambda k(\tau)-1)d\tau.$$

Então

$$\varphi'(s)=\lambda k(s)-1,\qquad \varphi(0)=L$$

e

$$\varphi(L)=L+\int_0^L(\lambda k(\tau)-1)d\tau=L+\pi\lambda-L=\pi\lambda.$$

Logo φ é uma função contínua subrejetiva de $[0,L]$ em $[L,\pi\lambda]$. Se $t\in[L,\pi\lambda]$, $t=\varphi(s)$ definimos $\overline{x}(t)=x(s)+\lambda n(s)$. Como

$$(x(L)-x(0))\perp x'(0)\quad\text{e}\quad |x(L)-x(0)|=\lambda,$$

temos que $x(L)-x(0)=\lambda n(0)$, logo

$$\overline{x}(L)=x(0)+\lambda n(0)=x(L).$$

Segue que x é contínua. Analogamente $\overline{x}(\pi\lambda)=x(L)+\lambda n(L)=x(0)$, logo $\overline{x}$ é fechada. É fácil ver, do mesmo modo, que $\overline{x}$ é diferenciável. Temos a relação $\overline{x}(\varphi(s)) = x(s) + \lambda n(s)$. Derivando essa relação vem que $\overline{x}'(\varphi(s)) = -t(s)$. Temos que $\overline{x}$ também é convexa, pois

$$\overline{x}''(\varphi(s)) = \frac{k(s)}{(\lambda k(s) - 1)}(-n(s)),$$

logo

$$n(\varphi(s)) = -n(s)$$

e

$$k(\varphi(s)) = k(s)/(\lambda k(s) - 1) \geq 0.$$

Temos então que as retas suportes em $x(s)$ e $x(\varphi(s))$ são paralelas (pois são paralelas a $t(s)$), ortogonais a $x(s) - x(\varphi(s)) = -\lambda n(s)$ e distam λ uma da outra pela mesma equação. Então $\overline{x}$ tem largura constante, concluindo a demonstração.

Referências

[1] BARBIER, E.: *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert,* J. des Mathematiques pures et appliquées (Liouville) 2^{eme} série T. V (1860), 273-286.

[2] DO CARMO, M. P.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1976).

[3] EULER, L.: *De curbis Triangularibus,* Acta Acad. Sci. Petropolitanae, 1778, II (1781), 3-30 = L. Euleri Opera Omnia, Ser. Prima XXVIII, 298-322.

[4] HILBERT, D. e COHN-VOSSEN, S. *Geometry and Imagination,* Chelsea New York (1962).

[5] REULEAUX, F.: *"The Kinematics of Machinery",* Dover, New York, 1963.

[6] STRUIK, D. J.: *Lectures on Classical Differential Geometry,* Addison Wesley, Reading, Mass, (1950).

Instituto de Matemática Pura e Aplicada — CNPq
Estrada Dona Castorina 110 — Jardim Botânico
22.460 Rio de Janeiro, RJ