NOTAS DE ENSINO

Matemática Universitária, Nº 5, Junho de 1987, 77-81.

O Cálculo das Integrais de Fresnel

Geraldo Ávila

O cálculo de integrais definidas de funções reais pelo método dos resíduos é um tema sempre presente nos cursos de funções de uma variável complexa. Isto é muito natural, por se tratar de uma interessante aplicação do Teorema do Resíduo, embora deva-se ter presente que esta é apenas uma dentre as várias consequências desse importante teorema, cujo escopo vai muito além do cálculo de integrais definidas de funções reais.

Entretanto, muitas das integrais que costumam ser calculadas nos cursos introdutórios de variáveis complexas podem ser tratadas, sem maiores dificuldades, por métodos elementares. É este, por exemplo, o caso da integração de funções racionais, um problema que costuma ser discutido num primeiro curso de Cálculo.

É importante, pois, que o aluno que estuda variáveis complexas pela primeira vez, seja logo exposto a exemplos relevantes de cálculo de integrais por resíduos que não podem ser calculadas por métodos mais elementares. Nesta categoria encontram-se as integrais de Fresnel, de que já falamos antes ([3], pp. 83-85). Elas se originaram nos estudos de Ótica, onde são usadas para explicar fenômenos de difração, como as chamadas *franjas de interferência.* (Veja, por exemplo, [5], pp. 239 a 247.) Mas aparecem também em muitas outras aplicações, sobretudo através do *método da fase estacionária,* um poderoso instrumento de análise aproximada, muito usado em estudos de propagação ondulatória. (Veja, por exemplo, [6], p. 371 e seguintes.)

Nosso objetivo nesta Nota é efetuar o cálculo das integrais de Fresnel pelo método dos resíduos, já que este é um processo de cálculo muito adequado a essas integrais, além de não ser facilmente encontrado em livros; e mesmo quando encontrado (em [6], por exemplo, à p. 372), é sempre em forma abreviada e incompleta.

Vamos escrever as integrais de Fresnel nas formas

$$C(h) = \int_0^\infty \cos hx^2 dx$$

e

$$S(h) = \int_0^\infty \operatorname{sen} hx^2 dx, \tag{1}$$

onde h é um número real diferente de zero, positivo ou negativo[1]. Postas juntas, essas integrais são as partes real e imaginária respectivamente, de

$$I(h) = \int_0^\infty e^{ihx^2} dx. \tag{2}$$

Para efetuar o cálculo desta última integral, vamos efetuar a mudança de variáveis dada pela substituição

$$z = \sqrt{-ih}\, x. \tag{3}$$

O que temos em vista com esta transformação, notando que

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{-ih}}$$

e

$$ihx^2 = -z^2, \tag{4}$$

é passar da integral em (2) à integral

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz,$$

chamada integral de Poisson, e que sabemos calcular ([2], p. 153). Mas para isso temos de proceder com a devida cautela.

Primeiro observamos que a integral em (2), por definição, é o limite de uma integral finita $I_N(h)$ com $N \to \infty$, onde

$$I_N(h) = \int_0^N e^{ihx^2} dx. \tag{5}$$

Se $h > 0$, tomaremos $\arg(-ih) = -\pi/2$ e $\arg\sqrt{-ih} = -\pi/4$; se $h < 0$, tomaremos

$$\arg(-ih) = \pi/2$$

[1] A presença do número h, não necessariamente igual a 1, é conveniente pelo interesse em si da integral (2) que aparece adiante. Ela ocorre, por exemplo, no chamado *método da fase estacionária,* que pretendemos tratar num artigo futuro.

e

$$\arg\sqrt{-ih} = \pi/4.$$

Assim teremos, nos dois casos,

$$\sqrt{-ih} = \sqrt{|h|}\, e^{-i\sigma\pi/4},$$

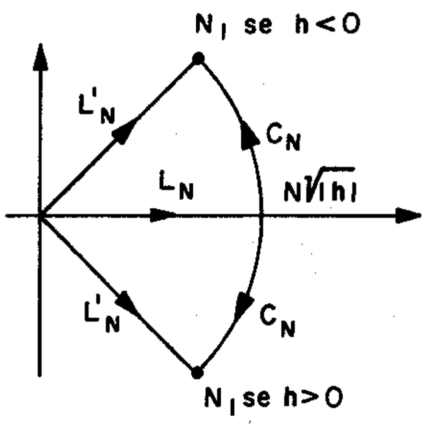
onde $\sigma = \operatorname{sgn} h = \pm 1$, conforme $h > 0$ ou $h < 0$ respectivamente. Isto posto, e tendo em conta as relações (4), vemos que a substituição (3) transforma a integral (5) em

$$I_N(h) = \frac{e^{i\sigma\pi/4}}{\sqrt{|h|}} \int_{L'_N} e^{-z^2} dz, \tag{6}$$

onde o caminho L'_N é o segmento retilíneo que une a origem ao ponto

$$N_1 = N\sqrt{-ih} = N\sqrt{|h|}\, e^{-i\sigma\pi/4}.$$

A figura seguinte exibe o caminho L'_N nos dois casos, $h > 0$ e $h < 0$.



Como o integrando em (6) é uma função analítica em todo o plano, em particular sem singularidades no interior do contorno $L_N \cup C_N \cup (-L'_N)$, o Teorema de Cauchy ([4], p. 75) ou o Teorema do Resíduo ([4], p. 122) permitem escrever:

$$\int_{L'_N} e^{-z^2} dz = \int_{L_N} e^{-z^2} dz + \int_{C_N} e^{-z^2} dz. \tag{7}$$

Vamos agora provar que a última integral em (7) tende a zero com $N \to \infty$, o que é feito como no chamado *Lema de Jordan* ([4], p. 129). Para isto usamos a substituição

$$z = N\sqrt{|h|}\, e^{i\theta} \qquad (0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}),$$

que nos dá:

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_N} e^{-z^2} dz\right| &= \left|\int_0^{-\sigma\pi/4} N\sqrt{|h|}\, e^{-N^2|h|(\cos 2\theta + i \,\mathrm{sen}\, 2\theta)} d\theta\right| \\ &\le N\sqrt{|h|} \int_0^{\pi/4} e^{-N^2|h| \cos 2\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Em seguida transformamos esta última integral com a substituição $\varphi = \pi/2 - 2\theta$. Obtemos

$$\left|\int_{C_N} e^{-z^2} dz\right| \le \frac{N\sqrt{|h|}}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-N^2|h| sen\, \varphi} d\varphi.$$

Finalmente, como $\mathrm{sen}\,\varphi \ge 2\varphi/\pi$ para $0 \le \varphi \le \pi/2$ ([1], p. 165),

$$\begin{aligned} \left|\int_{C_N} e^{-z^2} dz\right| &\le \frac{N\sqrt{|h|}}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-2N^2\varphi/\pi} d\varphi \\ &= \frac{\pi\sqrt{|h|}}{4N}(1 - e^{-N^2}) \le \frac{\pi\sqrt{|h|}}{4N}. \end{aligned}$$

Isto prova o resultado anunciado de que a última integral em (7) tende a zero com $N \to \infty$. Mais especificamente, essa integral tende a zero pelo menos tão depressa quanto $1/N$.

Levando este resultado em (7), (7) em (6) e (6) em (5), obtemos

$$\int_0^N e^{ihx^2} dx = \frac{e^{i\sigma\pi/4}}{\sqrt{|h|}} \int_0^{N\sqrt{|h|}} e^{-z^2} dz + O(\frac{1}{N}).$$

Fazendo agora $N \to \infty$ e lembrando que ([2], p. 153)

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

obtemos o resultado desejado:

$$\int_0^\infty e^{ihx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{i\sigma\pi/4}}{2\sqrt{|h|}}.$$

Tomando as partes real e imaginária, encontramos os valores das integrais em (1):

$$\int_0^\infty \cos hx^2 dx = \sigma \int_0^\infty \operatorname{sen} hx^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\sqrt{|h|}},$$

as quais, no caso $h = 1$, se reduzem a

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Referências

[1] ÁVILA, G.: *Cálculo 1,* LTC Editora, 4a. Edição, 1986.

[2] ÁVILA, G.: *Cálculo 3,* LTC Editora, 4a. Ediçãp, 1987.

[3] ÁVILA, G.: *Contatos de Curvas, Círculo Osculador e Integrais de Fresnel,* Matemática Universitária, No. 2. (Dezembro de 1985), pp. 75-85.

[4] ÁVILA, G.: *Funções de uma Variável Complexa.* LTC Editora, 1977.

[5] SOMMERFELD, A.: *Optics.* Academic Press.

[6] WHITHAM, G. B.: *Linear and Nonlinear Waves.* John Wiley and Sons, 1974.

Instituto de Matemática — UNICAMP
13.081 Campinas, SP