Artigos

Matemática Universitária N. 6, Dezembro de 1987, 1-23.

Aspectos da Tese de Church–Turing

Jacob Zimbarg Sobrinho

Instituto de Matemática, USP

Caixa Postal 20.570 - Agência Iguatemi

01.498 - São Paulo, SP

A tese de Church–Turing pode ser vista como uma tentativa de se estabelecer a extensão e os limites da computação abstrata. Foi enunciada independentemente por Alonzo Church e Alan Mathison Turing no ano de 1936, sob formas distintas porém equivalentes. Seu enunciado preciso é o seguinte:

> *"Todo processo efetivo (i.e., para o qual existe um algoritmo, ou um processo mecânico de computação) pode ser efetuado por meio de uma máquina de Turing".*

A adequação da tese de Church–Turing é aceita pela vasta maioria dos matemáticos e cientistas da computação. As raras pessoas que demonstram certo ceticismo com relação à sua veracidade são vistas como excêntricos. Alguns dos mais conceituados autores a ela se referem com inusitado entusiasmo e eloqüência, como, por exemplo, Hao Wang [6], em seu livro **Popular Lectures on Mathematical Logic:**

> "Uma das grandes conquistas da Lógica desde os anos 30 foi o sucesso experimentado ao ter sido dada uma definição absoluta (i.e., independente do particular formalismo escolhido) da interessante noção epistemológica de processo mecânico (ou procedimento efetivo, computabilidade, algoritmo, método finitista). Com efeito, pode-se afirmar que tenha sido o único conceito epistomológico básico relacionado com a Matemática que tenhamos sido capazes de iluminar até agora".

E mais adiante, Wang assim se expressou:

> "Este sucesso foi conseqüência, mais do que qualquer outra coisa, da formulação matemática de um tipo de máquinas abstratas devidas a Turing, e que foram baseadas na análise filosófica do processo da computação humana".

Para todos aqueles que não possuem suficiente familiaridade com o conceito de máquina de Turing, cumpre elucidar que essas máquinas materializam aquilo que arquetipicamente poderia ser considerado como sendo o *computador ideal.* Com efeito, uma máquina de Turing basicamente consiste de uma fita infinitamente prolongável, dividida em pedaços quadrados idênticos entre si, nos quais podem ser impressos ou apagados símbolos tirados de um alfabeto finito. Em cada instante, a máquina focaliza uma só região da fita, podendo imprimir e apagar símbolos, mover-se para a direita ou esquerda da região enfocada, bem como mudar o seu estado interno de funcionamento — tudo isso de acordo a um conjunto finito previamente estabelecido de instruções, vindo a constituir-se naquilo que poderia ser chamado de um *programa.* Se a máquina atingir uma configuração não prevista no programa, ela pára, e os conteúdos impressos na fita podem ser então analisados.

Faremos em seguida uma breve exposição histórica, para explicitarmos o contexto no qual a tese de Church–Turing se acha inserida.

1. Introdução Histórica. Iniciarei expondo, em estilo até certo ponto jornalístico, fatos que são bastante conhecidos, — tendo-se originado com a escola formalista do famoso matemático David Hilbert — e que ajudarão, tenho a certeza, a colocar a tese de Church–Turing em sua correta perspectiva.

As concepções de Hilbert a respeito dos fundamentos da Matemática sofreram ao longo do tempo transformações bastante significativas. Os seus escritos sobre o assunto tiveram início já em 1899, com a publicação do "best-seller" *Die Grundlagen der Geometrie*, e que mais tarde veio a tornar-se um clássico (veja a referência [8]). A escola formalista por ele inaugurada, atingiu seu apogeu na década dos anos 20, tendo contado com a colaboração de figuras exponenciais como as de Ackermann, Bernays, Herbrand e von Neumann. Para melhor entendermos o conteúdo de seu programa formalista, faz-se mister delinear as principais idéias e motivações subjacentes ao pensamento hilbertiano.

Hilbert pressupunha a existência de raciocínios intuitivos permeando todos os conceitos da atividade científica, podendo citar-se a título de exemplo as operações de natureza estritamente finitista. Em particular, as asserções matemáticas de caráter combinatório e finito — como as da teoria elementar dos números — seriam as únicas a possuirem absoluta veracidade ou falsidade, pelo fato de refletirem enunciados de *conteúdo real*. Em contraposição, ele distinguia as proposições envolvendo os assim chamados *elementos ideais,* cuja principal finalidade seria a de tornar os raciocínios mais regulares e uniformes. E não era sem uma ponta de orgulho que assim os justificava:

> "Não nos esqueçamos de que *nós somos matemáticos,* e como matemáticos, já por diversas vezes nos vimos em situações precárias das quais só nos salvamos graças ao engenhoso método dos elementos ideais".

Os infinitésimos na Análise, os pontos impróprios na Geometria Projetiva, e os números imaginários na Álgebra podem ser citados como exemplos típicos dessas entidades. De todas elas, porém, a que mais o fascinava e desafiava sua imaginação era inquestionavelmente o *infinito!*

Ao contrário de Brouwer, Hilbert não pretendia impor limitações nos métodos matemáticos correntes de demonstração: o que realmente desejava era uma *solução completa* de *todos* os problemas referentes aos fundamentos da Matemática. George Kreisel [13], em seu conhecido artigo sobre o programa formalista, salienta que, para Hilbert, "os problemas sobre os fundamentos deveriam ser *removidos,* ou as dúvidas eliminadas, ao invés de serem investigadas".

Em sua célebre palestra proferida perante o congresso de Münster, realizado em 1925 em homenagem a Karl Weierstrass, — *Über das Unendliche* — Hilbert [9] expressou os seus propósitos de forma majestosa e eloqüente:

> "O atual estado de coisas, em que estamos nos defrontando com paradoxos, é, de fato, absolutamente intolerável. Imagine se as definições e métodos dedutivos que todos aprendemos, ensinamos e utilizamos em Matemática no conduzirem a absurdos! Se o próprio pensamento matemático já for defeituoso, onde é que iremos encontrar a verdade e a certeza?
>
> Existe, entretanto, um modo inteiramente satisfatório de evitarem-se os paradoxos, sem contudo atraiçoarmos nossa ciência. Os desejos e atitudes a nos guiarem nessa busca, mostrando-nos a direção correta, deverão ser os seguintes:
>
> 1. Investigaremos cuidadosamente todas as definições frutíferas e os métodos dedutivos, sempre que houver a possibilidade de podermos eventualmente resgatá-los. Nós os cuidaremos, fortificaremos e os tornaremos utilizáveis. Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor nos legou.
>
> 2. Deveremos estabelecer em Matemática a mesma certeza nas demonstrações que encontramos na teoria elementar dos números, as quais ninguém põe dúvida, e onde contradições e paradoxos emergem tão-somente pela nossa falta de cuidado.
>
> Obviamente, esses fins somente poderão ser alcançados após havermos completamente elucidado a *natureza do infinito*".

Ainda de acordo com Kreisel, para Hilbert, a elucidação da natureza do infinito se resumia em entender a *utilização da maquinária transfinita,* de um ponto de vista estritamente finitário. Tecnicamente, isto se traduz na eliminação de todos os ϵ–termos transfinitos das demonstrações, obtendo-se como resultado outras, onde esses termos não mais aparecem.

A sua crença na possibilidade de eliminação da maquinária transfinita muito provavelmente tinha raízes em sua postura filosófica básica: "todo problema matemático bem definido deve ser necessariamente possível de exata solução, quer na forma de alguma resposta concreta à pergunta formulada, quer pela prova da impossibilidade de qualquer solução, e, como isto, o necessário fracasso de todas as tentativas feitas por resolvê-lo".

No Congresso Internacional dos matemáticos de 1900, realizado em Paris, em seu estilo característico e veemente, ele assim se expressou:

> "A Convicção da resolubilidade de todos os problemas matemáticos constitui-se em poderoso incentivo para o pesquisador. Podemos ouvir dentro de nós mesmo esse perpétuo desafio: Eis um problema. Procura a solução. Poderás encontrá-la pela razão pura, pois em Matemática não existe *ignorabimus*".

Ainda na conferência sobre o infinito, em Münster, Hilbert também exalta "a análise de Weierstrass, como tendo eliminado o infinitamente grande e o infinitamente pequeno, reduzindo os enunciados a eles referentes a relações entre grandezas finitas". Mas nem a Weierstrass poupa de sua implacável e impiedosa crítica "por haver aceito sem reservas e usado repetidamente todas as formas de dedução lógica envolvendo o conceito do infinito". Weierstrass teria permitido, pois, que sob novas roupagens o infinito "escapasse da precisão imposta por sua crítica". E quer resolver de vez por todas o ***problema do infinito:*** "temos de dar-nos conta de que o infinito, utilizado no sentido de totalidade infinita nos processos dedutivos, não passa de uma ilusão". Exigia também a substituição dos "métodos dedutivos baseados no infinito por procedimentos finitos, possibilitando o mesmo encadeamento de provas e os mesmos métodos de obtenção de fórmulas e de teoremas". E se vangloriava de haver apresentado um projeto bem mais amplo e grandioso:

> "O objetivo de minha teoria é restabelecer de vez por todas a certeza dos métodos matemáticos. Eis uma tarefa que não foi realizada nem mesmo durante o período crítico do cálculo infinitesimal. Esta teoria deverá, pois, completar o que Weierstrass esperava conseguir com os seus fundamentos da Análise, e na consecução da qual deu importante e necessário passo".

A estratégia com que Hilbert se propunha a levar adiante seu ambicioso projeto de restabelecer a "certeza" dos métodos matemáticos, com a conseqüente eliminação dos elementos ideais, consistia basicamente nos dois seguintes passos:

> **A.** Elaborar a formulação da teoria matemática intuitiva, mesmo *contendo elementos ideais*, em um *sistema axiomático formal,* ao qual está associado o conceito preciso de demonstração.

B. Mostrar que o sistema formal considerado é *consistente,* mediante a utilização exclusiva de raciocínios intuitivos da natureza *finitista.*

A consistência do sistema formal, assim estabelecida, é que iria prover-nos da certeza de que os resultados obtidos são corretos, de que os elementos ideais podem ser eliminados, e animar-nos na busca de uma nova prova, onde eles não mais aparecem.

Algo semelhante foi efetuado pelo próprio Hilbert, em sua resolução do problema da Gordan: ao tentar verificar a existência de uma base finita para o sistema dos invariantes, Hilbert demonstrou inicialmente que a inexistência de tal base fatalmente nos conduziria a uma contradição. Somente depois, a partir de sua prova existencial (e não construtiva), é que efetivamente conseguiu exibir uma tal base, o que levou Gordan a declarar, em tom irônico e jocoso: "Bem, estou plenamente convencido de que a teologia também possui seus méritos".

Hilbert dedicou o melhor de seus esforços para entender, desenvolver e aprimorar os processos de formalização das teorias axiomatizadas. Conseguiu elaborar a sua célebre Teoria da Prova (ou Metamatemática), coroando assim sua paixão pelo método axiomático. Esse aspecto de seu programa formalista revestiu-se de enorme sucesso. Alonzo Church [1], manifesta a opinião em seu conhecido livro de introdução à Lógica de que "a primeira formulação explícita do cálculo funcional de primeira ordem como um sistema lógico independente talvez seja a que aparece na primeira edição do *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928), de Hilbert e Ackermann".

No tocante às demonstrações finitárias de consistência, Hilbert propôs que fossem efetuadas para os três seguintes importantes casos: a Aritmética, a Análise e a Teoria dos Conjuntos. As tentativas que se seguiram para levar adiante esse projeto, devidas a Ackermann em 1924 e von Neumann em 1927, resultaram interessantes, porém parciais. Entretanto, Hilbert acreditava que as demonstrações de Ackermann e de von Neumann já fossem suficientes para estabelecer a consistência de Aritmética.

Na conferência realizada em 1928 perante o congresso de Bologna, Hilbert mencionou quatro problemas em aberto, todos relacionados com o seu programa formalista: o primeiro dizia respeito à consistência da Análise clássica, e que considerava praticamente resolvido, manifestando sua convicção de que o resultado seria conseqüência imediata de um lema aritmético de natureza elementar; o segundo problema consistia em estender as demonstrações de consistência para funções de variável real, e também para os funcionais de ordem superior; o terceiro problema se referia a questões de completude para sistemas formais da teoria dos números e da Análise; e finalmente o quarto e último problema era o da completude do cálculo de predicados de primeira ordem, o qual aparecia explicitamente formulado na aludida obra de Hilbert e Ackermann.

Nessa mesma época, um exemplar de *Grundzüge* veio ter às mãos de um jovem estudante de doutoramento da Universidade de Viena, Kurt Gödel. Pouco tempo após haver abordado essa questão, no outono de 1929, Gödel apresentou a demonstração da completude do cálculo de predicados de primeira ordem, resolvendo o problema proposto por Hilbert em Bologna apenas um ano atrás. Uma versão modificada de sua tese, contendo sugestões de seu orientador Hans Hahn — um dos autores do conhecido teorema de Hahn–Banach —, foi publicado no **Monatshefte für Mathematik** em 1930 (vd. [3]).

Com a demonstração do teorema da completude, Gödel encerrou com fecho dourado a primeira parte do programa formalista, qual seja, a de encontrar uma linguagem e uma lógica completa servindo de embasamento para a formalização das teorias matemáticas. No entretanto, os resultados que obteve logo a seguir, — seus célebres *teoremas de incompletude* — representaram sério revés para este programa, e para o qual nenhum remédio foi encontrado até os dias de hoje. O lógico e filósofo Hao Wang, que mantinha estreito relacionamento com Gödel, fez o relato histórico dos teoremas de incompletude, desde as suas origens. Pelo alto grau de interesse que a matéria desperta naqueles que nutrem curiosidade histórica pela Lógica Matemática, reproduzimos o trecho que aparece em seu artigo [7] *Some facts about Kurt Gödel:*

"No verão de 1930, Gödel começou a interessar-se em estudar o problema da prova de consistência da Análise. Ele achava estranho que Hilbert desejasse provar diretamente a consistência da Análise por métodos finitistas. E acreditava que as dificuldades devessem ser divididas, de modo que cada parte pudesse ser suplantada mais facilmente. Neste caso particular, a idéia era provar a consistência da teoria dos números por meio da teoria finitista dos números, e provar a consistência da Análise pressupondo a verdade da teoria dos números, e não apenas a sua consistência. O problema que ele mesmo se propôs era o da consistência da Análise relativamente à teoria dos números; esse problema é independente do conceito impreciso de teoria *finitista* dos números.

Gödel representou os números reais por meio de fórmulas (ou sentenças) da teoria dos números e achou que teria de usar o conceito de verdade afim de verificar o axioma da compreensão na Análise. Mas rapidamente incorreu em paradoxos (em particular, o paradoxo do mentiroso e o de Richard) ligados à definibilidade e verdade. Ele se deu conta de que o conceito de verdade na teoria dos números não poderia ser definido nela mesma, e que, portanto, o seu plano de provar a consistência relativa da Análise não iria funcionar. Assim veio a concluir que em sistemas suficientemente fortes como *Principia Mathematica* (teoria dos tipos) ou Teoria dos Conjuntos ("Zermelo–Fraenkel"), existem sentenças indecidíveis. (Veja §7 das notas das palestras de Gödel, em **1934**, em **The Undecidable** [2], p. 63-65.)

Nessa época, Gödel representava os símbolos por meio de números naturais, sentenças por meio de seqüências de símbolos, e provas por meio de seqüências de seqüências de símbolos. Todas essas noções bem como a operação de substituição são facilmente expressáveis em pequenos subsistemas finitários de Teoria dos Tipos ou da Teoria dos Conjuntos. Portanto, existem proposições indecidíveis em qualquer sistema contendo tais subsistemas. As proposições indecidíveis são de natureza finitária e combinatória.

Em setembro de 1930, Gödel participou de um encontro em Königsberg (relatado no segundo volume da revista **Erkenntnis**), e anunciou seu resultado. R. Carnap, A. Heyting, e J. von Neumann também estavam presentes. von Neumann mostrou-se bastante entusiasmado com o resultado e teve a oportunidade de discutir em particular com Gödel algumas dessas questões. Nessa discussão, von Neumann perguntou se poderiam também ser construídas proposições indecidíveis da teoria dos números, tendo em vista que os objetos combinatórios podem ser representados por inteiros; expressou também a crença de que isto, de fato, poderia ser feito. Ao que Gödel retrucou: "É claro que sentenças indecidíveis poderão ser assim construídas, mas elas conterão conceitos que são bastante distintos daqueles que ocorrem na teoria dos números, como a adição e a multiplicação". Muito pouco tempo depois, Gödel, para o seu próprio espanto, conseguiu expressar a sentença indecidível em forma polinomial, precedida por quantificadores sobre números naturais. Ao mesmo tempo, porém independentemente desse resultado, Gödel descobriu também o seu segundo teorema, mediante o qual nenhuma prova de consistência de um sistema suficientemente rico pode ser formalizada dentro de si mesmo.

Um "abstract" relatando esses resultados foi apresentado em 23 de outubro de 1930 à Academia de Ciências de Viena, por Hans Hahn. Logo em seguida, Gödel recebeu uma carta de von Neumann sugerindo que o teorema da prova de consistência fosse obtido de seus resultados originais. O completo e célebre artigo [4] foi recebido para publicação pelo **Monatshefte** em 17 de novembro de 1930, tendo aparecido no início de 1931, sob o título *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.* Em uma nota datada de 22 de janeiro de 1931 (K. Menger, **Kolloquium,** vol. 3, p. 12-13), Gödel deu uma apresentação mais geral dos seus teoremas, usando a Aritmética de Peano ao invés da teoria dos tipos como seu sistema básico. Este artigo também serviu como seu *Habilitationsschrift*.

Os trabalhos de Gödel tiveram enorme repercussão, e representaram o limiar de uma nova era na Lógica matemática. Em 1951, teve seu mérito amplamente reconhecido, ao ser-lhe outorgada a medalha Einstein. Merece referência a declaração pública de von Neumann por ocasião desse evento:

> "As realizações de Gödel na Lógica moderna são singulares e monumentais — com efeito, são mais do que um monumento, são um marco que permanecerá visível ao longe, no espaço e no tempo". **(New York Times,** 15 de março de 1951, p. 31.)

Conquanto seja consensual no seio da comunidade acadêmica afirmar-se que o segundo teorema de *incompletude* tenha liquidado com as pretensões do programa formalista, pondo fim ao sonho acalentado por Hilbert de eliminar o infinito e restabelecer a certeza das demonstrações matemáticas, pode-se afirmar que nem o própio Gödel concordava inteiramente com essa corrente de opinião. Na interessante e agradável biografia de Hilbert devida a Constance Reid, aparece uma citação atribuida a Gödel, segundo a qual "o programa de Hilbert permanece altamente interessante e importante, a despeito de meus resultados negativos". Stephen C. Kleene [12], em seu artigo *The work of Kurt Gödel,* manifestou claramente que os resultados de Gödel "não eliminam de forma absoluta uma prova finitária de consistência para um formalismo que contenha ao menos a teoria elementar do números. Ou melhor, como obsearvou Gödel, é concebível que exista algum método não incluso no formalismo, que possa ser construído como finitário, e que seja suficiente para dar uma prova de consistência".

Um outro problema que era objeto de atenção dentro da temática hilbertiana era o *problema da decisão* — ou também, como era chamado, o *Entscheidungsproblem.* Martin Davis, em sua importante antologia de artigos, **The Undecidable**, chama ateção para o fato de que "Hilbert caracterizou o problema de se determinar se uma fórmula de seu *engere Funktionenkalkül* (também conhecido por cálculo funcional de primeira ordem, cálculo de predicados ou teoria da quantificação) é ou não válida, como o problema fundamental da Lógica matemática. Isto porque parecia claro a Hilbert que com a solução deste problema, o *Entscheidungsproblem,* seria possível, ao menos em princípio, decidir todas as questões matemáticas de forma puramente mecânica".

O próximo passo nessa importante avenida de idéias deu-se nos Estados Unidos, no Institute for Advanced Study, em Princeton. Alonzo Church era professor de Instituto, e trabalhava com seu estudante de doutoramento S. C. Kleene no *Entscheidungsproblem.* No ano de 1933, Gödel visitava o Instituto, ministrando um seminário sobre os seus já célebres teoremas de incompletude, publicados em 1931. Kleene e Rosser faziam parte da audiência, e, por sugestão de Oswald Veblen, redigiram notas que só apareceram bem mais tarde, em 1965, no **The Undecidable,** sob o título *On undecidable propositions of formal mathe-*

matical systems. No último parágrafo desse trabalho, Gödel introduziu a classe das ***funções recursivas gerais,*** estendendo a classe das funções recursivas primitivas que aparecem em seu artigo de 1931. Essa extensão deveu-se a uma sugestão do lógico francês Jacques Herbrand, enviada através de correspondência pouco antes de sua prematura morte. Em conversa particular mantida com A. Church, Gödel levantou a hipótese da identidade entre a classe das funções computáveis por procedimentos mecânicos, e a das recursivas gerais. Church naquela época também investigava o *Entscheidungsproblem,* mas sua abordagem era feita através das funções *λ–definíveis,* que haviam sido introduzidas por ele e por Kleene. As funções λ–definíveis foram estudadas no *λ–cálculo,* que é o sistema precursor da conhecida linguagem da computação, o *LISP*.

No importante artigo publicado no **American Journal of Mathematics,** Church demonstrou a identidade entre a classe das funções recursivas gerais e a das funções λ–definíveis, e enunciou a sua famosa tese — a *Tese de Church,* como foi chamada mais tarde por Kleene — mediante a qual a classe das funções computáveis por procedimentos mecânicos, (ou *efetivamente calculáveis,* segundo Church) coincide com a classe das funções λ–definíveis.

Church já havia enunciado sua tese mesmo antes de haver mantido a aludida conversação com Gödel, e portanto, a atribuição de seu nome à tese lhe faz inteira justiça. Com a tese de Church, o conceito vago e intuitivo de "procedimento mecânico" ganha o status de entidade matemática precisamente definida, e, como aplicação, Church demonstrou que o cálculo de predicados é *indecidível,* resolvendo dessa maneira o *Entscheidungsproblem* (em artigo publicado em 1936 no primeiro número do **Journal of Symbolic Logic,** sob o título *A note on the Entscheidungsproblem").*

Hao Wang [5], em seu livro **From Mathematics to Philosophy,** expõe um comentário devido a Gödel, a respeito da importância do conceito de computabilidade, tornado preciso pela Tese de Church, e que transcrevemos logo a seguir:

"Parece-me que esta importância é amplamente devida ao fato de que com este conceito, pela primeira vez foi conseguida uma definição absoluta de uma importante noção epistemológica, i.e., que não depende do formalismo particular escolhido. Para todas as outras classes tratadas, como a demonstrabilidade ou a definibilidade, somente foi possível defini-las em relação à uma dada linguagem, e para cada linguagem individual, fica claro que aquela que foi obtida não era exatamente a que se buscava. No entanto, para o conceito de computabilidade, ainda que seja um caso particular da demonstrabilidade ou da definibilidade, a situação é diferente. Por uma espécie de milagre, não é necessário distinguir as ordens, e o procedimento diagonal não nos conduz para fora da noção definida. Isto, penso eu, deveria encorajar-nos a esperar que o mesmo seja possível também para todos os outros casos (como a demonstrabilidade ou a definibilidade)."

A razão pela qual Gödel menciona que o conceito de computabilidade dado pela Tese de Church não depende do formalismo escolhido reside no fato de que várias abordagens foram tentadas para caracterizar este conceito, e todas resultaram equivalentes. Assim, além das funções λ-definíveis de Church–Kleene ou das recursivas gerais de Gödel–Herbrand, podemos mencionar as definições equivalentes devidas a Alan M. Turing (1936), Emil Post (1943), S. C. Kleene (1953) e, finalmente, J. C. Shepherdson e H. E. Sturgis (1963). De todas as tentativas, porém, a mais interessante, em minha opinião, é a do matemático inglês Alan Mathison Turing, e que reflete muito bem a sua fascinante personalidade.

Além de ter sido matemático brilhante, Turing era também corredor fundista. Durante a segunda guerra mundial, não deixou de dar valiosa contribuição para a vitória de seu País, quando ele e sua equipe de criptógrafos ingleses conseguiram quebrar o código alemão. Peter Hilton, que aos 18 anos de idade também fazia parte dessa equipe, assim a ele se referiu (vd. Andrew Hodges [10]):

"[Turing] era uma pessoa bastante acessível — se bem que sempre produzisse a sensação de conhecer uma enormidade de coisas das quais a gente nada sabe. Ele deixava transparecer a impressão de seu imenso poder e da sua capacidade de abordar qualquer problema, sempre a partir de princípios primeiros.

Quer dizer, ele não somente fazia uma vasta porção do trabalho teórico, como também projetava as máquinas adequadas para a solução dos problemas — com todos os circuitos elétricos envolvidos.

Por essa via, ele sempre abordava o problema como um todo, e nunca fugia dos cálculos. Se fosse uma questão de saber como algo deveria de fato funcionar na prática, ele faria também todas as computações numéricas.

Ele nos inspirava muitíssimo, quer pelo interesse no trabalho, quer pelo seu interesse simultâneo por quase tudo que o cercava... E era uma pessoa maravilhosa no trabalho. Tinha muita paciência para com todos aqueles que não possuiam o seu talento. Recordo-me de sempre haver-me dado enorme estímulo quando eu fazia algo de apreciável. E todos gostávamos muito, muito dele".

É bem possível que durante o período de intermediação entre as duas guerras mundiais, a Universidade de Cambridge tenha atingido o pináculo do esplendor nos diversos campos das Ciências Exatas, contando com a colaboração de figuras exponenciais como as de Dirac, Eddington e Hardy, dentre outros. No início dos anos 30, Turing era estudante em Cambridge, no glamoroso King's College.

Um dos primeiros cientistas a execer influência no jovem Turing, tanto científica quando política, foi o Quaker, pacifista e internacionalista Sir Arthur Eddington. No outono de 1933, Turing assistia as palestras de Eddington, versando sobre a metodologia da ciência. Eddington mencionou que as mensurações científicas tendem a se distribuir segundo uma *curva normal,* e apresentou explicações para esse fenômeno que absolutamente não satisfizeram a Turing; ele queria *provar* este resultado por meios puramente matemáticos, obedecendo a padrões estritos de rigor.

No ano seguinte, por volta de fevereiro de 1934, e contando com apenas 22 anos de idade, Turing conseguiu levar a bom termo seus esforços nesse sentido, tendo redescoberto o Teorema do Limite Central (que fora demonstrado em 1922, por Lindeberg). Apesar de não ter-se constituído em resultado original, este fato não deixou de causar uma pequena sensação entre seus professores, e, desta maneira, Turing foi encorajado a candidatar-se a uma *King's fellowship*.

Os *fellows* de King's College formavam um grupo altamente seleto de elite, contando com 46 membros eleitos por um período de 3 anos, com a possibilidade de renovação por mais três. Recebiam o estipêndio de 300 libras por ano, não possuindo obrigações explícitas. Caso residissem em Cambridge, teriam também direito a cama e mesa, com o privilégio de poder jantar na *High Table*. Para poder candidatar-se a essa posição, era preciso, entretanto, escrever uma tese.

Durante o ano de 1934, Turing trabalhou na dissertação que pretendia apresentar para preencher os requisitos de sua candidatura: e foi em novembro de 1934 que apresentou-a, sob o título de *On the Gaussian error function* — essa tese, porém, não foi publicada pelas supramencionadas razões de prioridade. Mas a versão final datilografada encontra-se em King's, tendo sido guardade como relíquia.

Turing não teve dificuldades em tornar-se *King's fellow,* contando para isto com o apoio de Philip Hall, Keynes e Sheppard. E foi nessa atmosfera impregnada de grandiosidade e sofisticação que fez suas primeiras incursões na Teoria dos Grupos e na Física Matemática. Conseguiu melhorar um resultado de von Neumann sobre a teoria das funções quase periódicas, resultado esse que foi publicado pela London Mathematical Society.

Em 1935, enquanto ainda esperava pela tramitação do processo de sua candidatura, Turing assistiu a terceira parte de um curso versando sobre os Fundamentos da Matemática, ministrado pelo topólogo Max Newman. Juntamente com Henry Whitehead, Newman era um dos principais expoentes da Topologia inglesa da época. Não obstante sua especialidade, Newman possuia excelente formação nos Fundamentos da Matemática, ministrando cursos que chegavam a abordar os conhecimentos mais recentes e de fronteira, como por exemplo, os teoremas de incompletude de Gödel. Naquela época, a influência de Russell em Cambridge havia começado a se esvair: ele fora despojado de sua posição em Trinity College, por motivos ligados exclusivamente à sua atividade política. Seu principal discípulo, Ludwig Witgenstein, enveredou por caminhos e interesses filosóficos outros, e um de seus mais talentosos seguidores, Frank Ramsey, falecera em 1930. Assim, Newman era a principal figura dos Fundamentos em Cambridge, mais ligado porém à linha hilbertiana que então estava muito em voga.

No curso de Newman, o *Entscheidungsproblem* foi mencionado como uma das principais questões em aberto nos Fundamentos, e a expressão "procedimento mecânico" tocou cordas sensíveis do espírito do jovem Turing, que começou a sonhar com máquinas. Praticamente durante o ano todo de 1935, até abril de 1936, Turing dedicou-se com entusiasmo a essa questão e produziu aquilo que mais tarde seria considerado sua obra prima [14]: *On Computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem.* Neste trabalho, Turing analisa o ato de computar do "computador humano" e fornece argumentos mediante os quais todas as computações podem ser efetuadas por suas máquinas — *as máquinas de Turing* como vieram a ser chamadas. Construiu também a Máquina Universal, e, por meio de um argumento diagonal *a la* Cantor, demonstrou a inexistência de uma solução positiva para o *Entscheidungsproblem.*

Turing submeteu seu manuscrito à apreciação de Newman em meados de abril de 1936. Enquanto isto, do outro lado do Atlântico, Alonzo Church terminava seu artigo para publicação em 15 de abril de 1936. Uma cópia desse artigo logo chegou às mãos de Newman, que, entretanto, houve por bem submeter o artigo de Turing a publicação pela London Mathematical Society, nos seus Proceedings. Reproduzimos logo a seguir um trecho da carta que Newman enviou a F. P. White, secretário da Sociedade:

Caro White,

> Penso que você já esteja a par da história do artigo de Turing, *On Computable numbers.* Bem em seu estágio final, chegou-me às mãos uma separata, vinda de Princeton, de um artigo de Alonzo Church, antecipando em grande parte os resultados de Turing.
>
> *Espero no entanto, que seja possível publicar este artigo.* Os métodos utilizados são em grande parte diferentes, e o resultado é tão importante que tratamentos distintos seriam de grande interesse. O resultado principal de Turing é o que

> o *Entscheidungsproblem,* no qual os discípulos de Hilbert estiveram trabalhando por tantos anos, — i.e., o problema de encontrar um procedimento mecânico para decidir se uma dada seqüência de símbolos é enunciado de um teorema demonstrável a partir dos axiomas de Hilbert — é insolúvel na sua forma mais geral...

On Computable numbers foi finalmente publicado, e sua influência se faz sentir até os dias de hoje, pois neste artigo encontra-se explicitamente formulada a tese de Church–Turing, que identifica as funções computáveis às funções λ–definíveis, ou às Turing–computáveis, ou às funções recursivas gerais de Herbrand–Gödel. E é vista por muitos como um verdadeiro paradigma.

A vida de Turing não deixou de ter seu lado trágico: sua morte foi ocasionada por envenenamento por cianureto, perdurando a dúvida se foi acidental ou auto–imposta. O mais prestigioso prêmio internacional outorgado a cientistas da computação leva, com toda justiça, o nome de Turing.

2. Os Argumentos a Favor da Tese de Church–Turing. S. C. Kleene [11], em seu livro **Introduction to Metamathematics,** classifica as evidências a favor da tese de Church–Turing em três grandes grupos:

A. A evidência heurística.

B. A equivalência das diversas formulações.

C. O conceito de Turing de máquinas computacionais.

No que diz respeito à evidência heurística, Kleene observa que "todos os exemplos de funções efetivamente calculáveis e todas as operações utilizadas para definir tais funções a partir de outras cuja questão já tenha sido investigada, deram origem a funções recursivas gerais". Além disto, "os métodos para se demonstrar que as funções calculáveis são recursivas gerais foram levadas a tal grau que virtualmente excluem qualquer dúvida de que seja possível descrever-se um processo de cálculo efetivo que não possa ser transformado em uma definição recursiva geral para a dada função". Finalmente, Kleene observa que "a exploração de vários métodos que eventualmente possam levar a uma função não pertencente à classe das funções recursivas gerais mostra, em cada caso, ou que o método não conduz para fora da classe, ou então que a nova função não pode ser considerada como efetivamente calculável, i.e. sua definição não provê nunhum processo efetivo de cálculo". Esta é basicamente a lista de argumentos apresentada por Kleene sobre a evidência heurística da tese de Church–Turing.

A equivalência entre as diversas formulações na caracterização do conceito de calculabilidade efetiva é um argumento bastante sedutor, pois apela para o sentido teleológico que possa estar por detrás desta noção. De fato, se as diversas tentativas para se capturar a noção de calculabilidade efetiva resultaram todas equivalentes — como, por exemplo, as funções recursivas gerais, as λ-definíveis e as Turing-calculáveis — é porque existiria algo de *intrínseco* associado a essa classe de funções, e que nada mais é do que o caráter que se pretende buscar, isto é, o da própria calculabilidade efetiva. Além disto, Kleene também menciona que tais funções também possuem uma certa "estabilidade", a qual reforça ainda mais esse caráter intrínseco.

Por último, Kleene aborda os argumentos de Turing, salientando que "as funções Turing-calculáveis são as que podem ser computadas por máquinas arquitetadas de tal modo que, de acordo com sua análise, possam reproduzir todos os tipos de operações que um computador humano venha a efetuar, trabalhando de acordo com instruções preestabelecidas. A noção de Turing é, pois, o resultado de uma tentativa direta para formular matematicamente a noção de calculabilidade efetiva, enquanto que as outras noções surgiram de forma diferente, e somente *a posteriori* é que foram identificadas às funções efetivamente calculáveis".

Hao Wang [6], em seu livro **Popular Lectures on the Foundations of Mathematics,** apresenta instrutiva análise conceitual da noção de computabilidade, onde os argumentos de Turing aparecem de forma clara e convincente. Assim, optamos pela reprodução do seguinte trecho:

> "O que Turing fez foi analisar o ato humano de calcular e assim chegar a um número de operações simples que são de natureza obviamente mecânica, podendo-se contudo demonstrar que são capazes de serem combinadas no sentido de efetuar quaisquer das mais complexas operações mecânicas. O

> aumento qualitativo da complexidade de um algoritmo é compensado pelo aumento quantitativo do tamanho da memória e do tempo de execução. Além disto, uma vez dada esta simples concepção de máquina, o problema da esquematização de uma linguagem mecânica adequada é também de fácil solução.
>
> Se imaginarmos um ser humano computando em uma folha de papel, a qual supomos dividida em quadrados, poderemos encontrar os seguintes elementos envolvidos no processo: (1) um local de armazenamento, que pode ser o pedaço de papel; (2) uma linguagem, com símbolos para representar números e instruções as quais podemos supor, à guisa de simplicidade, que estejam escritas no pedaço de papel; (3) regiões enfocadas, i.e., em cada momento certos quadrados são observados; (4) "estados mentais", quer dizer, em cada estágio, o ser humano segue o estágio da computação e decide qual o passo a ser dado logo em seguida; (5) o ato de efetuar o passo seguinte de uma computação, e que pode envolver: (a) a mudança de símbolos por meio da impressão ou apagamento (eliminação) de certos símbolos; (b) a mudança da região enfocada; (c) a mudança do "estado mental."

Segundo Wang, são dois os princípios que regem os processos de computação, tornando-os mecânicos:

1. O princípio da determinação.
2. O princípio da finitude.

O princípio da determinação garante que o processo não pode ser criativo no decorrer da computação, pois cada passo depende somente da região enfocada, dos símbolos que lá se encontram impressos, e do "estado mental" naquele momento. Reproduzindo as palavras de Turing em *On Computable numbers:*

> "O comportamento do computador em cada momento fica determinado pelos símbolos que está observando, e pelo seu "estado mental" naquele momento".

No que diz respeito ao princípio da finitude, de acordo com Wang, "a mente é capaz de armazenar e perceber somente um número finito de ítens a cada momento; de fato, existe um limite superior fixo e finito para esses ítens". E mais adiante, Wang manifesta que "além disto, o número de estados da mente a serem levados em consideração é também finito, pois esses estados devem de algum modo ser armazenados na mente para que estejam sempre prontos para entrar em funcionamento". De acordo com Turing,

> "...o número de estados mentais a serem levados em consideração é sempre finito... Se admitíssemos uma infinidade de estados mentais, alguns deles estariam 'arbitrariamente próximos' e seriam confundidos"

Finalmente, o princípio da finitude também determina que o número de símbolos utilizados seja finito. Segundo Turing,

> "Se fôssemos admitir uma infinidade de símbolos, haveria símbolos diferindo entre si por diferenças muito pequenas".

A análise de Turing conduz inexoravelmente à sua conclusão, qual seja, a de que a computabilidade efetiva é sinônimo de calculabilidade por meio de suas máquinas. É inquestionável que seja um argumento extremamente convincente e poderoso.

3. Os Argumentos Contrários à Análise de Turing. Nem todos os autores concordam que a análise de Turing haja capturado na inteireza os processos computacionais da mente. Dentre eles, podemos destacar duas das maiores figuras da Lógica matemática deste século: Gödel e Kreisel. Os argumentos expostos por esses autores, contrários à justeza da análise de Turing, baseiam-se na falsidade de uma das hipóteses utilizadas por Turing em sua argumentação, qual seja, a de que os "estados mentais" têm número finito e *fixo*.

Gödel devotou boa parte de suas energias à questão filosófica relativa ao contraste entre *mentes e máquinas*. Para Gödel, se bem que Turing houvesse caracterizado de forma justa e precisa o conceito de procedimento mecânico (ou algoritmo), sua análise de modo algum permitiria inferir que todos os procedimentos mentais de cálculo sejam exeqüíveis por meio de suas máquinas. Gödel se pronunciou de forma bastante clara a esse respeito em um de seus escritos (que aparece reproduzido no livro de **Wang, From Mathematics to Philosophy**):

> "Turing, em *Proc. Lond. Math. Soc.* (1936) vol. 42, p. 250, fornece um argumento pelo qual se propõe a mostrar que os procedimentos mentais não podem conduzir para além dos procedimentos mecânicos. No entanto, o argumento é inconclusivo, pois depende da suposição de que uma mente finita é apenas capaz de possuir um número finito de estados distinguíveis. O que Turing descarta completamente é o fato de que a *mente, em sua utilização, não é estática, mas está em constante evolução.* Isto pode ser visto, e.g., pela série infinita de axiomas de infinidade cada vez mais fortes na teoria dos conjuntos, cada um dos quais expressando uma nova idéia ou *insight*. Processo análogo se passa com relação aos termos primitivos. E.g., o conceito iterativo de conjunto tornou-se claro somente de poucas décadas para cá. Muitas outras idéias primitivas aparecem no horizonte, e.g., o conceito auto-reflexivo de classe própria. Portanto, ainda que em cada estágio de evolução da mente o número de estados possíveis seja finito, não existe razão pela qual esse número não devesse convergir para o infinito no decurso de seu desenvolvimento. Agora, podem existir métodos sistemáticos de acelerar, especializar e determinar univocamente esse desenvolvimento, e.g., fazendo perguntas corretas baseadas em algum procedimento mecânico. Mas é preciso admitir que a definição precisa de um procedimento dessa natureza iria requerer o aprofundamento substancial de nossa compreensão das operações básicas da mente. Procedimentos dessa espécie são, no entanto, vagamente conhecidos e.g., o processo de definição de boas ordens recursivas de inteiros, ou os processos de formação de axiomas de infinidade cada vez mais fortes na teoria dos conjuntos".

Os pontos de vista de Gödel a respeito do assunto relativo a mentes e máquinas foram expressas em palestra proferida perante a American Mathematical Society, em Providence, Rhode Island, a 26 de dezembro de 1951, — a 25a. Conferência Josiah Willard Gibbs — sob o título *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their philosophical implications.* John von Neumann, então presidente da Sociedade, presidia o acontecimento. Algumas das opiniões expressas nesta conferência encontram-se sumarizadas em **From Mathematics to Philosophy, de Hao Wang,** p. 324:

"Na opinião de Gödel, os dois resultados rigorosamente provados mais interessantes relativos a mentes e máquinas são os seguintes:

1. A mente humana é incapaz de formular (ou mecanizar) todas as intuições matemáticas, i.e., se consegue formular algumas delas, este mesmo fato conduz a um novo conhecimento intuitivo, e.g., a consistência do formalismo. Este fato poderia ser denominado de "incompletabilidade da Matemática". Por outro lado, tomando-se como base o que foi até então provado, é possível que exista (e possa até ser descoberta empiricamente) uma máquina de provar teoremas que de fato seja equivalente à intuição matemática, mas impossível de se *provar* que o seja, e nem provar que acarrete apenas teoremas *corretos* da teoria dos números.

2. O segundo resultado é a seguinte disjunção: ou a mente humana consegue ultrapassar qualquer máquina (para ser mais preciso: ela pode decidir mais questões da teoria dos números do que qualquer máquina) ou então existem questões da teoria dos números indecidíveis para a mente hummana".

De acordo com Wang, Gödel estaria inclinado a dar razão a Hilbert, rejeitando a segunda alternativa de 2. Ele se recusava a admitir um comportamento "absolutamente irracional", de acordo com o qual a mente seria capaz de formular questões que, pela sua própria natureza, lhe seria impossível responder.

Ainda em **From Mathematics to Philosophy,** p. 326, Wang expõe algumas das opiniões de Gödel, e de que lhe foram apresentadas durante suas discussões:

"Em nossas discussões, Gödel adicionou o seguinte: o argumento de Turing torna-se verdadeiro, supondo-se duas hipóteses adicionais, e que são hodiernamente aceitas, a saber: 1. Não existe mente separada da matéria. 2. O cérebro se comporta como um computador digital. (A hipótese 2 pode ser substituída por: 2'. As leis da Física, em suas conseqüências observáveis, possuem limite finito de precisão.) Entretanto, se bem que Gödel pensasse que 2 fosse bastante provável e 2' praticamente certa, ele acreditava que 1 fosse um dos preconceitos de nosso tempo, a ser refutada cientificamente (talvez até porque não existam células nervosas em número suficiente para efetuar todas as possíveis operações da mente humana).

> Mais geralmente, Gödel acreditava que o mecanicismo em Biologia seja mais um dos preconceitos de nosso tempo, e que será refutado. Neste caso, uma possível refutação, na opinião de Gödel. poderia consistir na demonstração de um teorema matemático segundo o qual a formação geológica do corpo humano — de acordo com as leis da Física (ou de quaisquer outras leis de natureza semelhante) — a partir de uma distribuição aleatória de partículas elementares e de um campo, é tão improvável quanto a separação da atmosfera em seus componentes feita ao acaso".

Acredito que os aspectos históricos aqui abordados sejam suficientes para termos uma idéia, ainda que superficial, de temas que caracterizaram o período de intermediação entre as duas grandes guerras como a época do grande esplendor da moderna Lógica Matemática.

Referências

[1] A. CHURCH, *An unsolvable problem of elementary number theory,* American Journal of Mathematics, vol. 58 (1935), 345-363.

[2] DAVIS, MARTIN Ed., *The Undecidable,* Raven Press, Hewlett, New York, (1965), 440 pp.

[3] K. GÖDEL, *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionalkalküls,* Monsatshefte für Mathematik und Physik, vol. 37 (1930), 349-360.

[4] K. GÖDEL, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I,* Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 38 (1931), 173-198.

[5] HAO WANG, *From Mathematics to Philosophy,* Routledge & Kegan Paul, London (1974), 428 pp.

[6] HAO WANG, *Popular Lectures on Mathematical Logic,* van Nostrand, Science Press, (1981), 273 pp.

[7] HAO WANG, *Some facts about Kurt Gödel,* Journal of Symbolic Logic, vol. 46 (1981), 654-655.

[8] D. HILBERT, *Die Grundlagen der Geometrie,* Leipzig, 1899. Existe tratução para o inglês, publicado pela Open Court. Publ. Co. de Illinois.

[9] D. HILBERT, *Über das Unendliche,* Mathematische Annalen, vol. 88 (1923), 161-190.

[10] A. HODGES, *Alan Turing: the enigma,* New York, Tauchstone (1983), 587 pp.

[11] S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics,* van Nostrand (1952), 550 pp.

[12] S. C. KLEENE, *The work Kurt Gödel,* Journal of Symbolic Logic, vol. 41 (1976), 761-768.

[13] G. KREISEL, *Hilbert's Programme,* Dialectica, vol. 12 (1958), 346-372.

[14] A. M. TURING, *On Computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem,* Proc. London, Math. Soc., vol. 42 (1936), 230-265.