Matemática Universitária, N. 6, Dezembro de 1987, 25-48.

Geometrias Não–Euclidianas*

Manfredo Perdigão do Carmo
Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq
Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico
22.460 - Rio de Janeiro, RJ

1. Perspectiva Histórica

Como se sabe, Euclides foi o primeiro a apresentar, de maneira sistemática, a Matemática como ciência dedutiva. Isto significa que toda afirmação deve ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples, e assim sucessivamente. É claro que no começo dessa cadeia devem existir algumas afirmações não demonstradas, que Euclides chamou de postulados (aquilo que se pode). Euclides procurou escolher como postulados afirmações que, por sua simplicidade, seriam aceitas por qualquer pessoa de bom senso e que eram, em um certo sentido, evidentes por si mesmas.

Os quatro primeiros postulados de Euclides, enunciados a seguir (v. [6]), satisfazem plenamente às condições de simplicidade e evidência acima mencionadas (no § 2 deste artigo apresentaremos uma axiomática completa da Geometria; por enquanto, nos contentaremos com a versão de Euclides):

1. Dois pontos determinam uma reta.

---

*Este artigo foi publicado inicialmente no número especial de abril de 1979 do Noticiário da SBM. A versão atual inclui pequenas modificações feitas a partir de sugestões de Elon Lages Lima, a quem agradeço.

2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário.

3. É possível descrever um círculo com centro arbitrário e raio arbitrário.

4. Todos os ângulos retos são iguais. (O ângulo reto é definido do seguinte modo: se duas retas que se cortam forman quatro ângulos iguais, o ângulo comum assim determinado é chamado reto.)

O quinto e último postulado, entretanto, é enunciado por Euclides da seguinte maneira:

5. Se uma reta r corta duas outras retas r_1 e r_2 (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores de um mesmo lado de r é menor do que dois retos, então r_1 e r_2, quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de r. (Fig. 1).

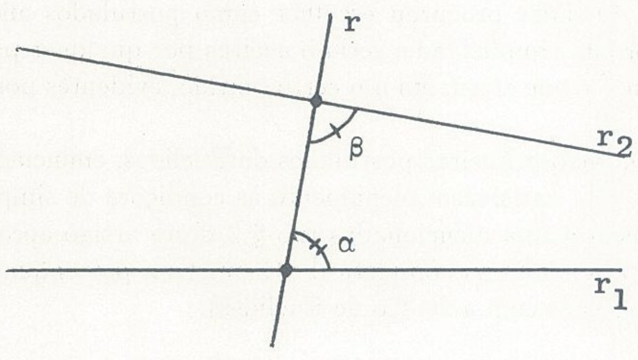

Figura 1
Postulado 5: se $\alpha + \beta < \pi$, então r_1 e r_2 se encontram.

É claro que o próprio Euclides deve ter considerado o Postulado 5 como pouco evidente. Isto é confirmado pelo fato de que ele retardou o quanto possível o uso deste postulado. Por exemplo, é possível provar sem utilizar o Postulado 5, que a soma dos ângulos internos de um triângulo não excede dois retos (v. [8] p. 38); o mesmo se passa com os três casos clássicos de igualdade de triângulos. Em verdade, Euclides demonstra as 26 primeiras proposições do Livro I dos Elementos (v. [6]) sem recurso ao Postulado 5.

Existem várias formas equivalentes do Postulado 5, das quais a mais famosa é atribuida a Playfair (que em 1795 publicou uma edição dos Elementos de Euclides) e que se enuncia da maneira seguinte:

5'. Por um ponto p fora de uma reta dada r passa não mais que uma paralela a r. (Euclides define *retas paralelas* como aquelas que prolongadas indefinidamente não se encontram.)

Convém observar que o fato de passar por p alguma paralela à reta r era conhecida por Euclides e pode ser deduzido dos quatro primeiros postulados. O ponto essencial do enunciado acima é o fato de passar por p *apenas uma* tal paralela. Provavelmente, Euclides conhecia o enunciado 5', e a razão pela qual preferiu apresentar o seu postulado na forma 5 pode estar relacionada com o fato de que a forma 5' enuncia um fato negativo, o que os gregos preferiam evitar.

Seja como for, o Postulado 5 (chamado o Postulado das paralelas) é definitivamente não–evidente e, durante vários séculos, geômetras de todas as origens tentaram demonstrá-lo a partir dos outros postulados. Embora sem aplicações práticas imediatas, o problema teve, como logo veremos, implicações filosóficas e matemáticas da maior importância.

É conveniente observar que Euclides usava em seus argumentos, além dos postulados mencionados, outros fatos que eram considerados na época como inteiramente óbvios e que Euclides não se preocupou em explicitar. Em verdade, uma tal preocupação no tempo de Euclides não seria natural. A concepção filosófica da época, influenciada principalmente pelas idéias de Platão, considerava as entidades matemáticas como possuindo uma existência *"a priori"* e fornecendo um modelo exato para o mundo real. A Geometria era, portanto, absoluta e devia ser possível baseá-la em fatos simples e intuítivos. Foi precisamente a análise do Postulado das paralelas, e o fracasso de todas as tentativas de demonstrá-lo, que forçou lentamente uma nova concepção da Matemática em que todos os elementos de uma teoria devem ser cuidadosamente explicitados. Voltaremos ao assunto adiante.

A maior parte das tentivas de demonstração do Postulado 5 admitiam fatos que ou eram equivalentes a ele ou não podiam ser demonstrados usando unicamente os outros quatro postulados. Por exemplo, Proclus (500 d.C.) admitia que a distância entre duas paralelas é limitada; Wallis (1616–1703) admitia que dado um triângulo existe um triângulo semelhante a ele com área arbitrária; Legendre (1752–1833) admitia que dado um ângulo e um ponto p no seu interior, é possível passar por p uma reta que encontra os dois lados do ângulo (Fig. 2). Não passaremos em revista os detalhes destas tentativas, contentando-nos em indicar ao leitor curioso as referências [1] e [4].

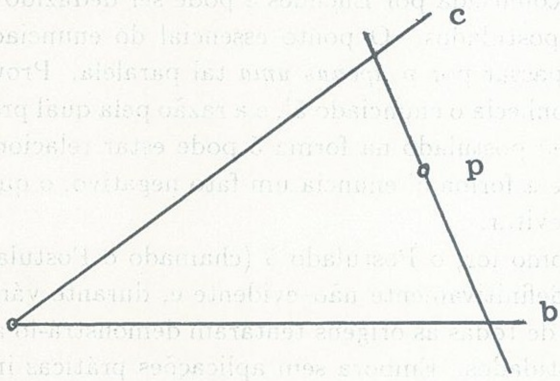

Figura 2

O fato de por todo p no interior do ângulo (bc) passar uma reta que corta b e c é equivalente ao Postulado 5.

Um dos esforços mais bem orientados nesta direção é devido a G. Saccheri (1667–1733), que considerou a seguinte situação. Seja

$ABCD$ um quadrilátero, onde os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são retos e o lado AC é igual ao lado BC (Fig. 3). Saccheri provou que os ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ são iguais (v. [4], p. 39). Se ambos são retos, é possível concluir daí o Postulado 5. Restaria provar que as hipóteses de serem ambos agudos ou ambos obtusos levaria a uma contradição.

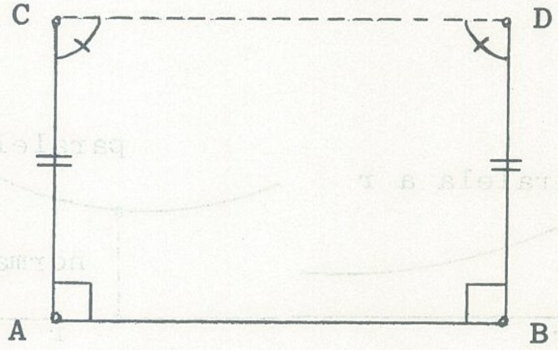

Figura 3
O quadrilátero de Saccheri

A hipótese de ambos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ serem ângulos obtusos leva facilmente a uma contradição com os quatro outros postulados (v. [4], p. 42). Saccheri jamais conseguiu demonstrar corretamente que a hipótese de serem ambos $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ agudos leva igualmente a uma contradição. O ponto importante do seu trabalho é que na tentativa de demonstrar este fato, ele obteve várias proposições interessantes que decorrem de se negar o Postulado 5. Conclui-se, por exemplo, nesta hipótese, que duas retas paralelas não são equidistantes: ou elas se aproximam assintoticamente, ou possuem uma normal comum, a partir da qual se afastam indefinidamente (v. Fig. 4).

Lambert (1728–1777) retomou a hipótese do ângulo agudo de Saccheri e tentou, de maneira mais cuidadosa, obter uma contradição. Da mesma maneira que Saccheri, ele obteve proposições estranhas, porém nenhuma contradição. Entre as proposições assim obtidas, deve ser destacada aquela que afirma que a diferença para dois ângulos retos da soma dos ângulos internos de um triângulo não é zero, como na geometria usual, porém proporcional à área do triângulo; um fato paradoxal é que a constante de proporcionalidade assim obtida parecia ser uma constante absoluta e universal.

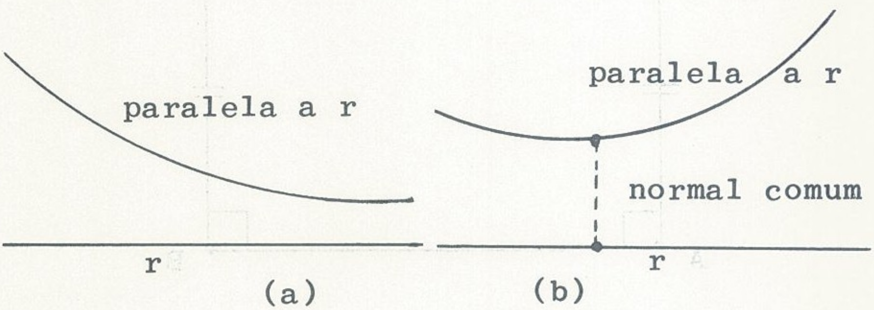

Figura 4

Comportamento das paralelas quando se nega o Postulado 5.

Aparentemente, o primeiro a perceber, com algumas hesitações, a natureza real do poblema foi Gauss. Em uma carta a Olbers em 1817 (v. [9], p. 332), Gauss menciona estar convencido que a necessidade da Geometria (euclidiana) jamais poderia ser demonstrada e que, em contraste com a Aritmética (que era para Gauss uma concepção a priori), a Geometria deveria ser classificada junto com a Mecânica (uma ciência experimental). Isto era na época uma concepção filosoficamente audaciosa pois contradizia frontalmente as idéias de Kant.

Que Gauss estava de posse das idéias fundamentais das geometrias não euclidianas é confirmado por uma carta escrita a Taurinus em 1824 (v. [9], p. 341-342), de qual extraímos a seguinte citação *"A hipótese que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180° conduz a uma geometria separada, totalmente diferente de nossa geometria (euclidiana), que é em si própria inteiramente conseqüente, e que desenvolví de maneira inteiramente satisfatória para mim, de tal modo que posso nela resolver qualquer problema, exceto a determinação de uma constante que não pode ser fixada a priori".*

Como veremos adiante, as concepções de Gauss estavam relacionadas com suas descobertas em Geometria Diferencial. Sem querer entrar em detalhes no momento, mencionaremos apenas o seguinte fato. Gauss havia provado que nas superfícies de curvatura negativa constante (por exemplo, a superfície da Fig. 5), se considerarmos como retas as curvas que realizam a menor distância (medida na superfície) entre dois pontos (tais curvas são chamadas *geodésicas*) então a diferença para dois retos da soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície é proporcional à área do triângulo; a constante de proporcionalidade é precisamente o valor absoluto da curvatura. Este resultado, que é um caso particular de um resultado hoje conhecido como o teorema de Gauss–Bonnet (v. [2], p. 264), coincidia com o resultado de Lambert mencionado anteriormente, e indicava a possibilidade de existência de uma geometria onde não fosse válido o Postulado das paralelas.

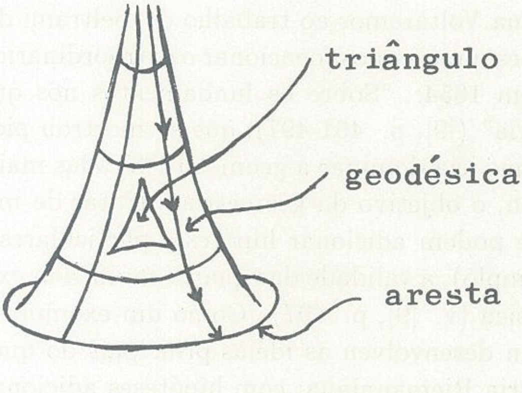

Figura 5
Uma superfície com curvatura constante negativa.

Gauss, entretanto, nunca publicou suas conclusões. Escrevendo a Bessel em 1829 (v. [9], p. 343) ele menciona que talvez nunca torne público os seus resultados "por temer a gritaria dos beócios".

A construção explícita de uma geometria, rejeitando o Postulado 5 e obtendo sistematicamente os resultados entrevistos por Saccheri, Lambert e Gauss, foi publicada de maneira independente e quase simultânea por N. Lobachewski (russo) em 1829 e J. Bolyai (húngaro) em 1832 (Traduções dos trabalhos originais de Lobachewski e Bolyai se encontram nas referências [1] e [9]). Tal geometria é hoje chamada *geometria hiperbólica*, e sua existência mostra que o Postulado 5 é independente dos outros postulados. Como já havia sido observado por Lambert, a geometria hiperbólica contém uma certa constante k e se aproxima da geometria euclidiana quando $k \to 0$. Deste modo, a determinação de qual geometria é a mais adequada para descrever o mundo real é, como havia previsto Gauss, um problema experimental.

A independência do Postulado das paralelas abriu imensas perspectivas ao desenvolvimento da geometria. Era natural proceder em seguida à análise crítica dos outros postulados. Entretanto, como Gauss havia também previsto, a aceitação destas novas idéias foi extremamente lenta e feita com grande relutância. Só em 1868, Beltrami provou (com restrições) que a geometria hiperbólica não poderia conter uma contradição que já não estivesse na geometria euclidiana. Voltaremos ao trabalho de Beltrami dentro em pouco.

Antes, precisamos mencionar o extraordinário trabalho de Riemann em 1854: "Sobre os fundamentos nos quais se assenta a geometria" ([9], p. 461-497), que se mostrou pioneiro na atitude crítica que iria dominar a geometria décadas mais tarde. Segundo Riemann, o objetivo da geometria é tratar de modelos gerais aos quais se podem adicionar hipóteses particulares (as de Euclides, por exemplo), a validade das quais é verificada experimentalmente pela Física (v. [9], p. 497). Como um exemplo de modelo geral, Riemann desenvolveu as idéias principais do que hoje chamamos Geometria Riemanniana; com hipóteses adicionais, tal geometria reobtém a geometria euclidiana, a geometria hiperbólica e uma outra geometria, chamada elíptica, sobre a qual falaremos adiante.

O trabalho de Riemann só foi publicado em 1868. Neste mesmo ano, Beltrami publicou o trabalho que mencionamos anteriormente, onde mostrou que em uma superfície de curvatura negativa constante, tomando as geodésicas como retas, todos os resultados obtidos por Lobachewski eram verificados. Isto fornecia um modelo concreto para a geometria hiperbólica e mostrava que uma tal geometria era não–contraditória.

O modelo de Beltrami possuia, entretanto, um defeito. Todas as superfícies de curvatura negativa constante conhecidas na época possuiam certas arestas (v. Fig. 5); isto impedia que algumas geodésicas pudessem ser prolongadas indefinidamente, o que contradiz o Postulado 2. Beltrami parece não ter se preocupado com esta objeção. Não é irrazoável supor que Gauss conhecia tanto o resultado de Beltrami como a objeção mencionada. O problema é que as arestas de uma superfície de curvatura negativa constante proveem do fato de elas estarem colocadas em R^3 (neste caso, tais "arestas" sempre existem, como Hilbert provou em 1901, v. [2], p. 446). Como o conceito de superfície abstrata (isto é sem relação com o R^3), que pode resolver a objeção acima, não era conhecido por Gauss, a sua hesitação em publicar suas conclusões torna-se compreensível.

Um modelo mais satisfatório da geometria hiperbólica foi obtido por F. Klein em 1871. O modelo de Klein está relacionado com os seus trabalhos sobre a geometria projetiva (v. [9], p. 616-645). Apresentaremos adiante um modelo da geometria hiperbólica que foi introduzido por Poincaré em fins do século passado. A compreensão detalhada do modelo de Poincaré requer elementos de geometria diferencial. É curioso observar que Poincaré introduziu este modelo pela necessidade de resolver problemas ligados à teoria das funções de variáveis complexas. As geometrias não–euclidianas encontravam assim uma aplicação inesperada.

Provavelmente a aplicação mais importante das geometrias não–euclidianas foi a sua influência na concepção matemática do século vinte. A existência de tais geometrias mostrou a necessidade de se raciocinar com rigor e manter a intuição sob controle. Sob a influência de Cauchy e Weierstrass, uma crítica análoga vinha sendo feita, simultaneamente, à Análise. Isto provocou o desenvolvimento do método axiomático, que dominou boa parte da matemática durante as primeiras décadas deste século, e permitiu a criação de teorias matemáticas com um alto nível de abstração. A própria geometria euclidiana foi cuidadosamente analisada por Hilbert em 1899 (v. [9], p. 852-899) e fundamentada de modo a evitar todas as ambiguidades e lacunas que se encontravam em Euclides. Uma exiomática recente da Geometria, devida a Pogorelov [8], será apresentada adiante.

O método axiomático, instrumento na criação do qual a análise do Postulado das paralelas desempenhou um papel importante, é hoje indispensável na Matemática. Ele mostrou que existe uma certa liberdade na criação de entes matemáticos. Esta liberdade, entretanto, não é ilimitada; caso contrário, a Matemática se esfacelaria em milhares de pedaços disjuntos e incompreensíveis. O ponto é que o método axiomático é apenas um método útil, e não um guia à criação matemática. Tal guia continua sendo, como sempre foi, a solução de problemas básicos e fundamentais da Matemática. As entidades criadas fora desse contexto têm tido uma vida efêmera; aparentemente, como diria Platão, elas não existem no mundo das idéias. Deste modo, o problema filosófico da existência ou não da entidades matemáticas *a priori*, continua em aberto. Este é, entretanto, um outro assunto, que a natureza da presente exposição não nos permite abordar.

2. Um modelo da Geometria Hiperbólica

Passamos agora a apresentação do modelo de geometria hiperbólica introduzido por Poincaré. Serão requeridos alguns conhecimentos de Geometria Diferencial, para os quais daremos referências explícitas.

Iniciaremos com uma versão mais rigorosa dos postulados da geometria plana que é encontrada em Euclides. Várias escolhas são possíveis. Decidimo-nos pela recente versão simplificada de Pogorelov [8], que possui a vantagem adicional de poder ser utilizada no ensino básico da geometria. Uma axiomática que difere ligeiramente da versão original de Hilbert se encontra em G. Veriest [10], onde também se acha um tratamento elementar e completo da geometria hiperbólica.

Os postulados de Pogorelov para a geometria plana são organizados em seis grupos. Os conceitos fundamentais são *ponto* e *reta;* o conjunto de todos os pontos é chamado *plano.* Os pontos serão representados por letras maiúsculas A, B, C etc., e as retas por letras minúsculas a, b, c, etc.

Os postulados do primeiro grupo são chamados *postulados de incidência:*

I_1. Dada uma reta a, existem pontos que pertencem a a e pontos que não pertencem a a.

I_2. Dados dois pontos A e B, existe uma única reta (indicada por AB) tal que $A \in AB$ e $B \in AB$.

No segundo grupo se encontram os *postulados de separação:*

II_1. Dados três pontos em uma reta, um, e apenas um, deles separa os outros dois.

II_2. Um ponto de uma reta divide esta reta em dois subconjuntos chamados *semi–retas.* Dois pontos de uma mesma semi–reta não estão separados pelo ponto de divisão. Dois pontos de semi–retas distintas estão separadas pelo ponto de divisão.

Estabelecido o conceito de separação pelos postulados acima, podemos dizer que um ponto C de uma reta a está *entre* os pontos A e B de a se C separa A e B. Define-se o segmento $\overline{AB}$ de a como o conjunto dos pontos de a que estão entre A e B.

II_3. Uma reta divide o plano em dois subconjuntos chamados *semi–planos.* Se as extremidades de um segmento estão em um mesmo semi–plano, o segmento não intersecta a reta de divisão. Se as extremidades de um segmento pertencem a semi–planos distintos, o segmento intersecta a reta de divisão.

É conveniente chamar um conjunto dado de pontos e (ou) retas uma *figura* do plano. Por definição, *ângulo* é a figura formada por duas semi–retas a e b com origem comum; o ângulo é indicado por (ab) e a origem comum das semi–retas a e b é chamado o vértice de (ab). O grupo seguinte de postulados associa uma noção de medida a segmentos e ângulos.

III_1. A todo segmento $\overline{AB}$ pode ser associado um número real positivo que é chamado o *comprimento* de $\overline{AB}$ (e indicado por $m(\overline{AB})$).

III_2. Se o ponto C da reta AB está entre A e B, então $m(AB) = m(AC) + m(CB)$.

III_3. A todo ângulo (ab) pode ser associado um número real positivo ≤ 180 que é a *medida do ângulo* em graus (indicada por $m(ab)$). O ângulo formado por duas semi–retas que pertencem a uma mesma reta (= ângulo raso) mede 180^o.

Convém dizer que uma semi–reta c que tem origem no vértice de um ângulo (ab) *está entre* a *e* b se c intersecta um segmento cujos extremos estão em a e b.

III_4. Se a semi–reta c está entre a e b, então $m(ab) = m(ac) + m(cb)$.

O quarto grupo de postulados introduz a noção de continuidade em geometria.

IV_1. Dado um número real positivo m e uma semi–reta c, é possível construir a partir da origem da semi–reta um, e um único, segmento de comprimento m.

IV_2. Dado um real positivo $m < 180$ e uma semi–reta a, é possível construir um ângulo (ab) cuja medida em graus é m.

, Por definição, um *triângulo* é uma figura formada por três pontos A, B e C não pertencentes a uma mesma reta. Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ são chamados *lados* do triângulo, que é indicado por ABC. Os ângulos formados pelos lados nos vértices A, B e C são indicados por $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente. O quinto grupo contém um único postulado, que é um dos casos clássicos de igualdade de triângulos.

V. Se em dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ tem-se

$$m(\widehat{A}) = m(\widehat{A}_1), \; m(\overline{AB}) = m(\overline{A_1B_1}) \quad \text{e} \quad m(\overline{AC}) = m(\overline{A_1C_1})$$

então:

$$m(\widehat{B}) = m(\widehat{B}_1), \;\; m(\widehat{C}) = m(\widehat{C}_1) \qquad \text{e} \qquad m(\overline{AB}) = m(\overline{B_1C_1}).$$

Finalmente, temos o Postulado das paralelas, que se enuncia em forma de Playfair:

VI. Por um ponto p que não pertence a uma reta c pode se traçar não mais de uma paralela a c.

A axiomática da geometria que acabamos de apresentar é muito mais cuidadosa que a de Euclides. Os postulados de separação não estavam explícitos em Euclides, que também admitia implicitamente as idéias de medida, continuidade e o Postulado V. O Postulado V significa que na geometria considerada existe uma tal quantidade de movimentos (isometrias, na linguagem da Geometria Diferencial) que é sempre possível deslocar um no outro, sem deformações, dois triângulos nas condições deste postulado. Em termos de Geometria Diferencial, tal postulado implica que só podemos construir geometrias naquelas superfícies S com a propriedade que dados dois pontos p, $q \in S$, existe uma isometria de S levando p em q; pelo Teorema "egregium" de Gauss ([12], p. 234), isto implica que S tem curvatura constante.

Construiremos agora um modelo de uma geometria onde valem todos os postulados acima menos o das paralelas. O espaço ambiente será o semi–plano superior aberto.

$$(R^2)^+ = \{(x, y) \in R^2; \; y > 0\}.$$

Em $(R^2)^+$ introduzimos uma maneira de medir comprimentos de vetores pela seguinte regra: se o vetor as tem origem (x, y) e componentes (u, v), então o comprimento $|w|$ de w é definido por (Fig. 6).

$$|w| = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{y}$$

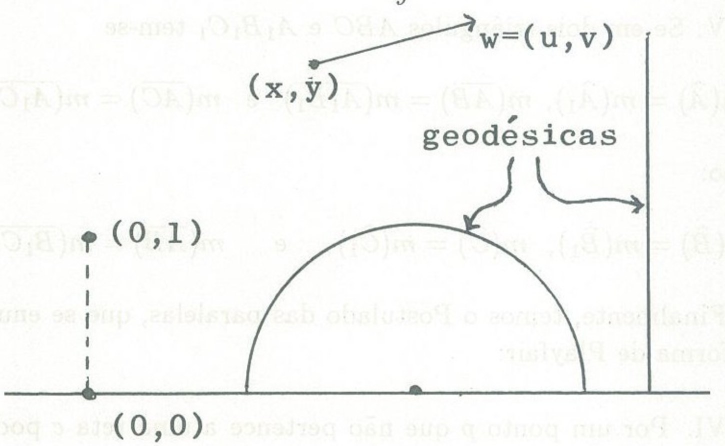

Figura 6

No modelo de Poincaré, o compimento do vetor w é dado por
$|w| = (\sqrt{u^2 + v^2})|y$

Intuitivamente, é como se medíssemos comprimentos de vetores com uma régua variável, que é exatamente a régua euclidiana no ponto $(0, 1)$, e cujo comprimento em um ponto (x, y) é o da régua euclidiana multiplicado por y.

Do ponto de vista da Geometria Diferencial, estamos introduzindo em $(R^2)^+$ uma primeira forma fundamental, cujos coeficientes são $E = 1/y^2$, $F = 0$, $G = 1/y^2$. Como a curvatura Gaussiana K de uma superfície só depende da primeira forma fundamental, podemos pensar em $(R^2)^+$ como uma superfície abstrata e calcular K pela fórmula, (v. [2], p. 237).

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\} \equiv -1.$$

Como K é constante, estamos dentro da restrições mencionada anteriormente. No que se segue, convém indicar $(R^2)^+$, com a maneira acima definida de medir comprimentos de vetores, por H.

O *comprimento de uma curva* em H é definido, como usualmente, pela integral do comprimento do vetor tangente à curva. A *distância* entre dois pontos p, $q \in H$ é definida como o ínfimo dos comprimentos das curvas que ligam p a q.

Em Geometria Diferencial, as curvas que minimizam o comprimento entre dois pontos próximos de uma superfície são chamadas *geodésicas* da superfície. As geodésicas dependem só da primeira forma fundamental e tem, portanto, sentido falar em geodésicas de H. É possível mostrar (v. [2], p. 432) que as geodésicas de H são os círculos euclidianos com centros no eixo 0_x, e as retas euclidianas perpendiculares a $0x$ (Fig. 6).

Vamos agora mostrar que os Postulados de I a V de Pogorelov são satisfeitos em uma geometria na qual *pontos* são os pontos de H e *retas* são as geodésicas de H.

O leitor verificará sem dificuldades os Postulados dos grupos I, II e III. A primeira dificuldade aparece em verificar o Postulado IV_1. Em termos de Geometria Diferencial, isto equivale a provar que a superfície abstrata H é completa ([2], p. 325), isto é, qualquer geodésica tem comprimento infinito.

A demonstração deste fato não é difícil. Consideremos, por exemplo, um círculo de centro x_0 pertencente ao eixo 0_x. Escrevendo

$$x - x_0 = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho\,\text{sen}\theta,$$

obteremos coordenadas polares (ρ, θ) para H, nas quais os coeficientes da primeira forma fundamental são: (v. [2], p. 431):

$$\overline{E} = \frac{1}{\rho^2 \text{sen}^2\theta}, \qquad \overline{F} = 0, \qquad \overline{G} = \frac{1}{\text{sen}^2\theta}.$$

Como o círculo considerado é dado por $\rho = \text{const.}$, o seu comprimento ℓ a partir de algum θ_0 é

$$\ell = |\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\theta_0}^{\pi-\epsilon} \frac{d\theta}{\text{sen}\theta}| \geq |\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\theta_0}^{\pi-\epsilon} \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} d\theta| = \infty;$$

o mesmo argumento se aplica às retas verticais, o que completa a verificação do Postulado IV_1.

O leitor provará facilmente o Postulado IV_2 se atentar para a seguinte observação. A medida do ângulo entre dois vetores no modelo de Poincaré é igual à medida euclidiana deste ângulo. isto decorre do fato que em cada ponto todos os vetores foram multiplicados por um mesmo fator positivo (a saber, $1/y$) e, portanto, o cosseno do ângulo entre estes vetores não se alterou.

A demonstração do Postulado V, isto é, a existência de "muitas" isometrias em H, pode ser feita de várias maneiras. Uma delas, que é suficientemente geral para ser aplicada em outras situações, é utilizar o Teorema de Minding em Geometria Diferencial (v. [2], p. 288) que afirma que dados dois pontos p e q de uma superfície S de curvatura constante, existe uma isometria $f: U \to V$ de uma vizinhança $U \subset S$ de p em uma vizinhança $V \subset S$ de q de modo que um par de vetores tangentes em p, arbitrários e não colineares, é levado em um par arbitrário de vetores tangentes em q. As vizinhanças U e V dadas pelo Teorema de Minding são vizinhanças onde valem coordenadas polares com origens em p e q, respectivamente (v. [2], p. 288). É possível mostrar que, em H, as coordenadas polares, com origem qualquer, são válidas em todo o H. Portanto $U = V = H$, e a isometria considerada é uma aplicação $f: H \to H$. O Postulado V decorre imediatamente destas considerações.

Finalmente, é imediato verificar que o Postulado das paralelas não é válido em H. Em verdade, de um ponto fora de uma reta passa uma infinidade de paralelas a uma reta dada (v. Fig. 7).

Desta maneira, fica definitivamente estabelecida a existência de uma geometria onde todos os postulados usuais da geometria plana, menos o das paralelas, são verificados. Portanto, a aceitação ou rejeição de um tal postulado é, do ponto de vista lógico, uma mera questão de escolha. O modelo que acabamos de apresentar tem $K = \text{const.} = -1$. Se multiplicarmos todos os comprimentos de nosso modelo por uma constante positiva $1/c$, é fácil verificar, usando a expressão de K acima apresentada, que K fica multiplicada por c^2. Isto não afeta os argumentos que apresentamos para a verificação dos Postulados de I a V (e a não-validade de VI), e mostra que, dada uma constante c^2, existe uma geometria não euclidiana com curvatura $K \equiv -c^2$. Portanto, a geometria euclidiana ($K \equiv 0$) pode ser considerada como um caso "limite" das geometrias não–euclidianas quando $K \to 0$.

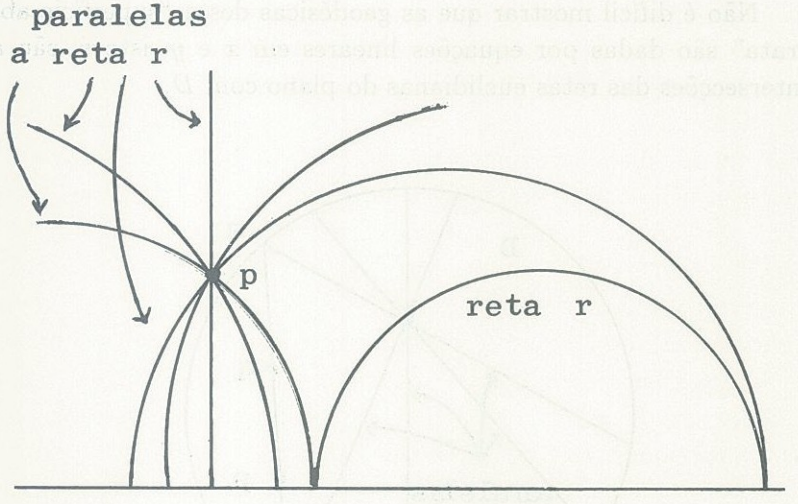

Figura 7

O Postulado das paralelas não se verifica no plano de Poincaré.

Uma conseqüência surpreendente das considerações acima é que em uma geometria hiperbólica da curvatura $K = -c^2$, podemos tomar o valor $1/c$ como uma unidade de comprimento, isto é, uma geometria hiperbólica possui uma unidade de comprimento "intrínseca". Isto contrasta fortemente com o caso euclidiano, onde uma tal unidade deve ser escolhida por meio de uma convenção, e causou várias controvérsias entre os pioneiros das geometrias não–euclidianas.

Esta exposição não estaria completa sem uma menção, ainda que breve, do modelo de Klein. Tal modelo é obtido tomando um disco aberto D de raio um do plano, isto é,

$$D = \{(x, y) \in R^2; \quad x^2 + y^2 < 1\},$$

e introduzindo em D uma primeira forma fundamental (maneira de medir comprimentos de vetores) dada por

$$E = \frac{1 - y^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \quad F = \frac{xy}{(1 - x^2 - y^2)^2}, \quad G = \frac{1 - x^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

Não é difícil mostrar que as geodésicas desta "superfície abstrata" são dadas por equações lineares em x e y, isto é, são as intersecções das retas euclidianas do plano com D.

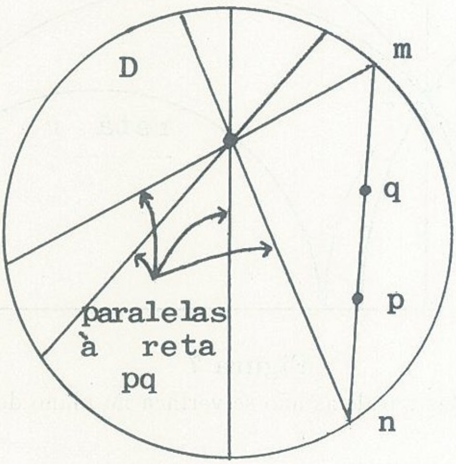

Figura 8
O modelo de Klein

É possível mostrar que a distância entre dois pontos p e q de D, na métrica considerada, é dada por

$$d(p, q) = \frac{1}{2} \left| \log \frac{\overline{pm}}{qm} \cdot \frac{\overline{qn}}{pn} \right|,$$

onde m e n são os pontos em que a reta euclidiana pq corta a fronteira de D (v. Fig. 8). Decorre daí que se q se aproxima da fronteira de D, então $d(p, q) \to \infty$.

É possível passar do modelo de Poincaré para o modelo de Klein por uma transformação que preserva comprimentos (isometria). Contentar-nos-emos em descrever geometricamente uma tal transformação (v. Fig. 9): o semi–plano H é aplicado em um hemisfério S^+ por meio de uma projeção estereográfica (v. [2], p. 67) com origem em um ponto do equador de S^+; por sua vez, S^+ é levado no interior de um disco D por meio de uma projeção ortogonal.

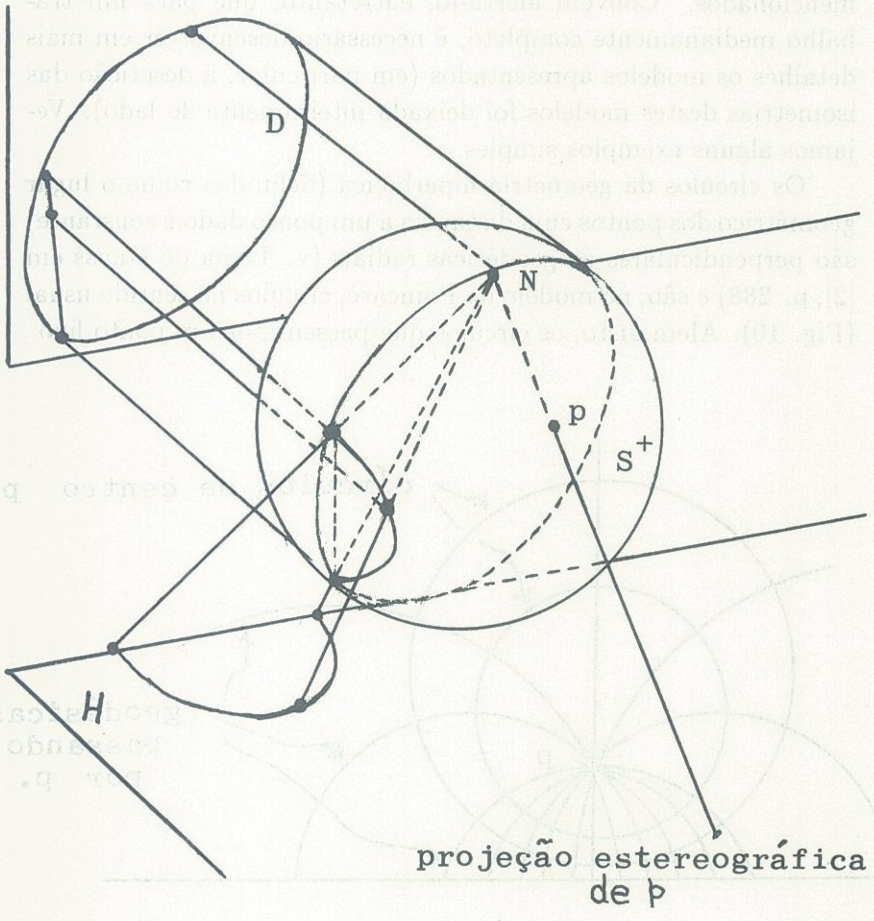

Figura 9

Isometria de H com o modelo de Klein $D : H$ é levado, por uma projeção esterográfica de polo N, no hemisfério S^+, que é projetado ortogonalmente sobre D.

No modelo de Poincaré, os ângulos são iguais aos ângulos euclidianos. Por outro lado, o modelo de Klein oferece a vantagem de representar as geodésicas por retas. A conveniência de um ou outro modelo depende do problema considerado. O leitor poderá achar interessante tomar, por exemplo, a referência [10] e tentar interpretar os resultados que aí aparecem em algum dos modelos mencionados. Convém alertá-lo, entretanto, que para um trabalho medianamente completo, é necessário desenvolver em mais detalhes os modelos apresentados (em particular, a descrição das isometrias destes modelos foi deixada inteiramente de lado). Vejamos alguns exemplos simples.

Os círculos da geometria hiperbólica (definidos como o lugar geométrico dos pontos cuja distância a um ponto dado é constante) são perpendiculares às geodésicas radiais (v. Lema de Gauss em [2], p. 288) e são, no modelo de Poincaré, círculos no sentido usual (Fig. 10). Além disto, os círculos que passem por um ponto fixo

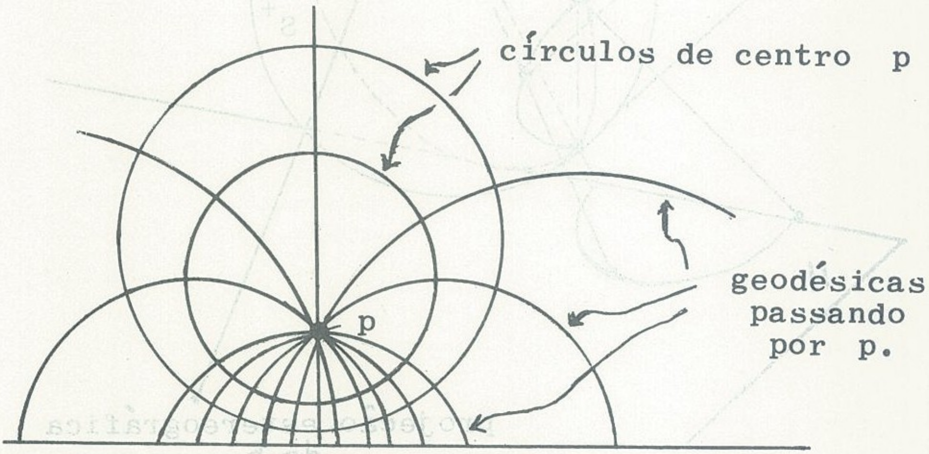

Figura 10

Círculos e geodésicas radiais no modelo de Poincaré.

e cujos centros tendem para o infinito ao longo de uma geodésica não tendem, como na geometria euclidiana, para uma reta mas para uma curva, chamada *horociclo,* que no modelo de Poincaré é representado por um círculo tangente ao eixo $0x$. Para maiores detalhes sobre horocíclos e outras curvas importantes da geometria hiperbólica, veja-se o capítulo V de [11].

Um outro exemplo interessante é o seguinte. Considere um modelo da geometria hiperbólica de curvatura $K =$ const. < 0 e faça $k^2 = -\frac{1}{K}$. Seja p um ponto fora de uma reta r e seja d a distância (hiperbólica) de p a r. Por p passam várias retas que não encontram r (isto é, paralelas a r). O conjunto de tais retas preenche um ângulo, cujo complementar, indicado por $\pi(d)$, é chamado o *ângulo de paralelismo* da Geometria em p relativamente a reta r. Se a geometria fosse euclidiana, $\pi(d) = 90^o$. No nosso caso, é possível calcular que

$$tg\frac{1}{2}\pi(d) = e^{-d/k}.$$

A fórmula acima desempenhou um papel fundamental nas primeiras investigações sobre as geometrias não–euclidianas e dá uma idéia precisa da distribuição das paralelas em função de d e de k: a medida que p se afasta de r, a "quantidade" de paralelas a r passando por p aumenta; por outro lado, se $k \to \infty$ tal "quantidade" tende para zero em todo p, e a geometria se aproxima de Geometria Euclidiana.

Para concluir, gostaríamos de fazer algumas observações.

Primeiro, o leitor deve ter estranhado a aparente preferência da natureza pelo sinal negativo da curvatura. Que a curvatura seja constante é uma exigência razoável, se queremos deslocar triângulos sem deformações; ou como diziam os gregos, se queremos que "o espaço seja igual a si mesmo em todos os seus pontos". Entretanto, por que negativa? Em verdade, é possível construir geometrias cujos modelos são superfícies de curvatura constante positiva e nas quais o Postulado das paralelas se enuncia afirmando que de um ponto fora de uma reta não se pode traçar paralela alguma a esta reta. É necessário, entretanto, modificar convenientemente os outros postulados. De acordo com tais modificações, obter-se ou a geometria esférica (cujo modelo é uma esfera) ou a geometria elíptica (cujo modelo é uma esfera com os pontos antípodas identificadas, i.é., o plano projetivo real). Tais geometrias foram essencialmente introduzidas no trabalho de Riemann mencionado anteriormente. Não entraremos aqui nos detalhes, referindo-nos a [10], Cap. XI.

Neste contexto, deve ser explicitamente mencionado que as geometrias esférica e elíptica não satisfazem às condições clássicas de uma geometria não–euclidiana, isto é, uma geometria na qual os postulados de Euclides, com a única exceção do das paralelas, sejam verificados. Neste sentido estrito, uma geometria não–euclidiana só ocorre com curvatura negativa constante.

Segundo, convém observar que em tudo o que fizemos, a restrições à dimensão dois foi simplesmente por conveniência de exposição. Por exemplo, um modelo de Poincaré em dimensão três é facilmente construído tomando o semi–espaço $\{(x, y, z) \in R^3;\ z > 0\}$ e definindo como comprimento do vetor $w = (u, v, t)$ no ponto (x, y, z) o valor

$$|w| = \frac{\sqrt{u^2 + v^2 + t^2}}{z}$$

Para estender os métodos de Geometria Diferencial das superfícies a esta situação, é conveniente seguir as idéias de Riemann e definir uma generalização da noção de superfície abstrata que hoje chamamos variedade diferenciável de dimensão n (v. [2], Cap. 5, Sec. 10). Introduzindo uma maneira de medir comprimentos de vetores tangentes em uma variedade diferenciável, obteremos o que hoje chamamos uma variedade Riemanniana, onde é possível definir geodésicas, ângulos, isometrias e todos os conceitos necessários ao desenvolvimento de uma geometria. A noção de curvatura, embora um pouco mais difícil, também pode ser introduzida (v. [2], p. 442), e é possível mostrar que a constância da curvatura é uma condição necessária e suficiente para a existência de muitas isometrias. Deste modo se verifica que geometrias não–euclidianas existem em qualquer dimensão e são modeladas pelas variedades Riemannianas de curvatura constante. A determinação de todas estas variedades envolve problemas delicados de teoria dos grupos, ainda não completamente resolvidos.

Este ponto de vista permite explicar um fato curioso observado pelos fundadores das geometrias não–euclidianas. Considere no modelo de Poincaré da geometria hiperbólica de dimensão três, a rotação euclidiana do plano de um horocíclo em torno de um eixo de simetria do horocíclo. Nesta rotação, o horocíclo gera uma superfície chamada ***horoesfera***. Havia sido observado que a geometria euclidiana de dimensão dois vale na superfície da horoesfera, um fato que parecia paradoxal. Do nosso ponto de vista, isto significa simplesmente, que como superfície do espaço hiperbólico, a horoesfera adquire uma métrica que tem curvatura identicamente nula, o que pode ser verificado pelo cálculo.

Finalmente, seria agora natural levantar a restrição que a curvatura seja constante e estudar geometrias mais gerais que as geometrias euclidianas clássicas. Isto é feito em Geometria Riemanniana, que é hoje um vasto domínio de pesquisas, e para uma introdução da qual mencionamos [3]. Outras generalizações são possíveis, mas isto é um assunto muito amplo que demandaria mais espaço e tempo do que o que nos é dado no momento.

Referências

[1] R. BONOLA, *Non-Euclidean Geometries,* Dover, 1955.

[2] M. DO CARMO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces,* Prentice Hall, New Jersey, 1976.

[3] M. DO CARMO, *Geometria Riemanniana, Projeto Euclides,* IMPA, em impressão.

[4] D. GANS, *An Introduction to Non-Euclidean Geometry,* Academic Press, New York, 1973.

[5] M. GREENBERG, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries,* Freeman and Co., San Francisco, 1974.

[6] T. L. HEATH, *The Thirteen Books of Euclides Elements,* original de 1908; republicado pela Dover em 1925, 3 volumes.

[7] G. MARTIN, *The Fondations of Geometry and the Non-Euclidean Plane,* Intext Educational Publishers, New York, 1975.

[8] A. V. POGORELOV, *Geometria Elemental,* tradução espanhola do russo, Ed. Mir, Moscou, 1974.

[9] C. E. SJÖSTEDT, *Le Axiome de Paralleles* (em Interlingue). Interlingue Fundation, Upsala (Suécia), 1968.

[10] G. VERRIEST, *Introduction a la Geométrie Non–Euclidienne par la Méthode élémentaire,* Gauthier–Villars, Paris, 1951.

[11] L. F. CARVALHO DA ROCHA, *Introdução à Geometria Hiperbólica,* XVI Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1987.

[12] V. F. KAGAN, *Lobachewski,* Editorial Mir, Moscou, tradução espanhola de 1986.

[4], [5] e [10], particularmente os dois últimos, são excelentes textos para um curso sobre geometrias não–euclidianas ao nível de graduação. [7] é um texto mais ambicioso, e excelente para referências históricas. [1] é um clássico do assunto. [9] contém traduções em Interlingue de quase todos os artigos importantes no desenvolvimento das geometrias não–euclidianas. Finalmente, [6] é a clássica tradução para o Inglês dos Elementos de Euclides, com um volume imenso de notas e referências históricas. [11] é uma exposição elementar onde se desenvolve em detalhes o modelo de Poincaré. [12] é uma biografia de Lobachewski, com excelentes seções expositórias sobre geometrias não–euclidianas.