Matemática Universitária, N. 6, Dezembro de 1987, 65-69.

Uma Demonstração Elementar do Teorema da Amizade

Mario A. Casarin Jr.
e
Carlos Tomei
Departamento de Matemática, PUC – RJ
Rua Marquês de São Vicente 225, Gávea
22.453 – Rio de Janeiro, RJ

O teorema do título foi chamado assim por H. Wilf, que o demonstrou utilizando resultados em geometrias projetivas finitas [1]. Seu enunciado é o seguinte:

Considere uma festa com n pessoas onde cada duas pessoas têm exatamente um amigo comum. Então alguém conhece todas as outras pessoas da festa.

A primeira demonstração do teorema da amizade é de G. Higman [2]. O Prof. Sóstenes Lins, do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, sugeriu o problema de encontrar uma demonstração elementar desse resultado, cujo enunciado, afinal, é tão fácil de entender. A demonstração abaixo só emprega fatos básicos sobre autovalores e autovetores. O argumento é um exemplo típico do uso de álgebra linear em combinatória.

A demonstração consiste numa sequência de pequenos resultados intermediários; o último passo é o único que não é completamente elementar. Vale a pena acompanhar os argumentos com uma figura (precisamente, um grafo): represente as pessoas na festa por pontos e ligue-os com um traço se as pessoas se conhecem.

A relação de amizade nesse problema é simétrica (se i conhece

j, então j conhece i) e irreflexiva (ninguém conhece a si mesmo, infelizmente talvez).

Começamos numerando as pessoas na festa de um modo conveniente. Atribua o número 1 a uma pessoa qualquer. Seja A_1 o conjunto de conhecidos de 1. Se A_1 é vazio, a festa tem uma só pessoa e o teorema está demonstrado. Se não, atribua o número 2 a uma pessoa qualquer em A_1 (em palavras, 2 é um amigo qualquer de 1). Chame de 3 o único amigo comum a 1 e 2. Se existir uma outra pessoa em A_1, chame-a de 4, e 5 vai ser o único amigo comum de 1 e 4 (5 não pode ser 2, senão 1 e 2 teriam dois amigos comuns, 3 e 4; do mesmo modo, 5 não pode ser 3). O argumento pode ser repetido, e obtemos a afirmação a seguir.

A.) A_1 tem um número de elementos, digamos, $2k$, divididos em pares de pessoas amigas que conhecem 1.

Para cada i amigo de 1, vamos chamar de A_i o conjunto de amigos de i diferentes de 1 e do amigo comum a i e 1. Os conjuntos A_i podem ser vazios.

B.) Os conjuntos A_i, $i = 1, \ldots, 2k+1$ formam uma partição do conjunto das pessoas da festa diferentes de 1. Isto é,

B1.) os conjuntos são disjuntos, para i diferente de j, ambos diferentes de 1, uma pessoa p em A_i e A_j seria um amigo comum de i e j diferente de 1; da mesma forma, uma pessoa p em A_1 e A_i (i diferente de 1) seria um amigo comum a i e 1, diferente daquele em A_1, por construção;

B2.) se j não é 1, então j pertence a algum A_i, de fato, se j é amigo de 1, então j está em A_1; se j não é amigo de 1, j está em A_i, onde i é o amigo comum a j e 1.

C.) Do mesmo modo como numeramos as pessoas em A_1, é possível numerar sucessivamente as pessoas em A_2, A_3, etc. de modo a concluir que todos esses conjuntos têm um número par de pessoas.

D.) Para i entre 2 e $2k+1$, ninguém em A_i conhece 1. Todos os amigos de i são 1, seu amigo comum a 1 e as pessoas em A_i. Esses fatos são conseqüências imediatas da definição dos conjuntos

A_i.

E.) Se alguém na festa (chamemo-lo 1) conhece exatamente duas pessoas, então A_2 ou A_3 devem ser vazios.

De fato, a lista de pessoas na festa é 1, A_1 (as pessoas 2 e 3), A_2 e A_3. O amigo comum de p em A_2 e q em A_3 não pode ser 1 (ninguém em A_2 ou A_3 conhece 1), 2 (se não, 2 e 3 conhecem 1 e q em comum) ou 3 (por quê?). Logo, o amigo comum de p e q está em A_2 ou A_3, em particular, existem duas pessoas diferentes, r em A_2 e s em A_3, que se conhecem. Mas então 2 e s têm dois amigos em comum, 3 e r.

F.) Se alguém na festa conhece exatamente duas pessoas, o teorema está demonstrado.

Por **E.)** e **B.)**, um amigo dessa pessoa conhece todos na festa.

Basta, então, demonstrar o teorema para festas cujos participantes têm pelo menos quatro amigos (as festas nas quais alguém não tem amigos só têm uma pessoa, e o teorema está satisfeito por vacuidade).

G.) Se i e j são dois amigos de 1 que não se conhecem, então i e j têm o mesmo número de amigos (ou, A_i e A_j têm o mesmo número de elementos).

Vamos supor inicialmente que A_i e A_j não são vazios. Note que o único amigo comum p entre i e uma pessoa q em A_j é uma pessoa em A_i (p não pode ser 1, porque ninguém em A_j conhece 1, para j entre 2 e $2k+1$; e p não pode ser r, o amigo comum a i e 1, senão j e r teriam dois amigos comuns, 1 e q). Além disso, pessoas diferentes em A_j têm amigos comuns a i diferentes em A_i (se o amigo comum s fosse o mesmo, j e s teriam dois amigos comuns diferentes). Logo, o número de pessoas em A_j é menor ou igual ao número de pessoas em A_i. O argumento pode ser simetrizado, e concluímos que A_i e A_j contêm o mesmo número de pessoas, para i e j entre 2 e $2k+1$. Se, por outro lado, A_j é vazio, A_i tem que ser vazio também: j não pode ter amigos comuns com as pessoas em A_i (por quê? Leitor, não pare de desenhar figuras). Por simetria, a afirmativa **G.)** está provada.

H.) Todos os conjuntos A_i, para i entre 2 e $2k+1$, têm o mesmo número de elementos.

Por **G.**), se i e j em A_1 não se conhecem (1 tem pelo menos quatro amigos),

A_i e A_j têm o mesmo número de pessoas. O amigo comum h a i e 1 não conhece j logo A_h e A_j têm o mesmo número de pessoas.

Note que a escolha da pessoa que chamamos de 1 foi totalmente arbitrária. Logo, podemos supor que, dada uma pessoa com mais de dois amigos, todos os seus amigos conhecem o mesmo número de pessoas.

I.) Todas as pessoas nessas festas têm o mesmo número de amigos. Facílimo: duas pessoas arbitrárias p e q tem um amigo comum r, que conhece mais de duas pessoas, o resultado segue da hipótese acrescentada entre **F.**) e **G.**).

O último passo exige uma certa preparação. Vamos supor que todas as pessoas na festa têm $2k$ amigos. Numere-as, de 1 a $n = 4k^2 - 2k + 1$ (por quê? Note que n é $1 + 2k + 2k(2k-2)$). Considere a matriz ("de adjacência") M, n por n, dada por $M_{ij} = 1$, se i e j se conhecem, ou $M_{ij} = 0$, caso contrário. Então M é uma matriz simétrica, e todos os elementos na diagonal são iguais a 0. Note que os elementos iguais a 1 na linha i correspondem aos amigos de i. Os elementos da matriz M^2 têm uma propriedade interessante: $(M^2)_{ij}$ é o número de amigos comuns de i e j (ou, pensando em termos de grafos, o número de caminhos de comprimento 2 ligando i a j). Para ver isso, basta ler a definição de produto de matrizes:

$$(M^2)_{ij} = \sum_{h=1}^{n} M_{ih} M_{hj}$$

e essa expressão conta justamente quantos h são amigos de i e j. Das hipóteses, todos os elementos de M^2 fora da diagonal são iguais a 1 (duas pessoas têm um único amigo em comum), e todos os elementos na diagonal são iguais a $2k$ (todas as pessoas têm o mesmo número de amigos, $2k$). É fácil calcular os autovalores e autovetores da matriz M^2: escreva $M^2 = U + (2k-1)I$, onde U é a matriz com todos os elementos iguais a 1, e I é a identidade. O vetor v cujas coordenadas são todas iguais a 1 é um autovetor de U associado ao autovalor n. Qualquer vetor ortogonal a v está no núcleo de U. Resumindo, os autovalores de U são n e 0 ($n-1$ vezes). Então os autovalores de M^2 são $n+2k-1$ e $2k-1$ ($n-1$ vezes). O teorema da amizade é conseqüência imediata da afirmação abaixo.

J.) A única festa satisfazendo as hipóteses do teorema na qual todos os participantes conhecem o mesmo número de amigos só tem três pessoas (e, para ela, o teorema é obviamente verdadeiro). Os autovalores da matriz M devem ser raízes quadradas (positivas ou negativas) dos autovalores da matriz M^2, afinal, os autovalores de M^2 são o quadrado dos autovalores de M. Como a diagonal de M só contém zeros, o traço de M é 0, assim como a soma de seus autovalores. Isto é, existe um inteiro a tal que

$$a \cdot \sqrt{2k-1} = \sqrt{n+2k-1}.$$

Simplificando, devemos ter

$$a^2(2k-1) = 4k^2$$

o que obriga $k=1$ (por quê? Pense nos primos dividindo $2k-1$).

Referências

[1] H. S. WILF, *The Friendship Theorem,* Combinatorial Mathematics and Its Applications, Proc. Conf. Oxford, 1969, Academic Press, London, 1969.

[2] G. HIGMAN, Conferencia no encontro "Combinatorial Mathematics and Its Applications", Oxford, 1969.