Matemática Universitária, N. 6, Dezembro de 1987, 71-82.

A Distribuição dos Números Primos

José Felipe Voloch
Instituto de Matática Pura e Aplicada - CNPq
Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico
22.460 - Rio de Janeiro, RJ

Um número $p > 1$ chama-se *primo* quando os únicos inteiros que o dividem (sem deixar resto) são 1 e o próprio p. Os números primos são fundamentais no estudo das propriedades dos números inteiros já que todo inteiro é produto de números primos, de maneira única a menos da ordem dos fatores. Este é o chamado teorema fundamental da Aritmética.

Estaremos interessados aqui na distribuição dos números primos entre os inteiros. Mais precisamente, se $x \geq 2$ é um número real, denotaremos por $\pi(x)$ o número de primos no intervalo $[2, x]$. Neste artigo, vamos descrever as investigações de Euler e Riemann, as quais foram culminadas pelos trabalhos de Hadamard e de la Valleé Poussin, que determinaram o comportamento assintótico da função $\pi(x)$.

1. Três Demonstrações do Teorema de Euclides

Euclides, nos seus Elementos ($\pm 300 AC$), provou que o conjunto dos números primos é infinito, isto é, que $\pi(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$. Vamos ver três provas deste resultado e depois analisá-las com mais cuidado para obter outras informações sobre $\pi(x)$.

A primeira prova é a do próprio Euclides, a qual foi considerada por Hardy uma das mais belas demonstrações da Matemática (ver [3]).

Suponhamos, por absurdo, que existisse apenas um número finito de primos $p_1, \ldots, p_m$. Então, seja $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m + 1$. O inteiro N se escreve como produto de números primos, logo há um primo p que o divide. Pela hipótese p é um dos p_i's, logo divide $p_1 \cdots p_m = N - 1$. Segue que p divide $N - (N-1) = 1$. Isso é um absurdo, o que mostra que o conjunto de primos é infinito.

Para a segunda demonstração, suponha novamente que $p_1, \ldots, p_m$ são todos os números primos. Seja $x \geq 2$, um número real. Se n é um inteiro, $n \leq x$, podemos escrever $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$ e temos

$$\sum \alpha_i \log\, p_i = \log\, n \leq \log\, x.$$

Logo,

$$\alpha_i \leq \log\, x / \log\, p_i \leq \log\, x / \log\, 2, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Temos então, no máximo $\log\, x/\log\, 2 + 1$ escolhas para o inteiro α_i e, conseqüentemente, $(\frac{\log\, x}{\log\, 2} + 1)^m$ escolhas para n. Como há, pelo menos, $x-1$ inteiros $n \leq x$, temos $x - 1 \leq (\log\, x/\log\, 2+1)^m$. Isso é um absurdo para x suficientemente grande, já que

$$\lim_{x \to +\infty} x/(\log\, x)^m = +\infty,$$

qualquer que seja m.

A terceira demonstração, devida a Euler, apontou a direção para todos os desenvolvimentos subsequentes. Suponha, pela última vez, que $p_1, \ldots, p_m$ são todos os primos e considere o produto de séries infinitas

$$P = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^n}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^n}\right) \cdots \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_m^n}\right).$$

Como cada termo do produto converge, já que é série geométrica de soma $(1 - 1/p_i)^{-1}$, podemos expandir P, obtendo

$$P = \sum_{n_1, \ldots, n_m = 0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}}.$$

Como cada inteiro é representado, de maneira única, como $p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$, temos que $P = \sum_{i=1}^{\infty} 1/n$. Mas sabemos que esta série, a série harmônica, diverge. Chegamos novamente a um absurdo, provando mais uma vez que o conjunto dos primos é infinito.

Vamos reconsiderar as demonstrações acima. A primeira demonstração nos dá muito pouco. Disponhamos os números primos na ordem ascendente $2 = p_1 < p_2 < \cdots$. A prova de Euclides nos diz que existe um primo $p \neq p_1, \ldots, p_m$, o qual divide $p_1 \cdots p_m + 1$ logo $p_{m+1} \leq p_1 \cdots p_m + 1$. Vamos supor, por indução, que $p_i \leq 2^{2^i}$, $i \leq m$, então:

$$p_{m+1} \leq p_1 \cdots p_m + 1 \leq 2^{2+4+\cdots+2^m} + 1 < 2^{2^{m+1}} + 1.$$

Logo $p_{m+1} \leq 2^{2^{m+1}}$. Segue que $p_n \leq 2^{2^n}$ para todo n. Se $2^{2^n} \leq x < 2^{2^{n+1}}$ então $\pi(x) \geq \pi(2^{2^n}) \geq \pi(p_n) = n$ e $n \geq \log_2(\log_2 x)$, logo $\pi(x) \geq \log_2(\log_2 x)$.

A segunda demonstração nos dá uma desigualdade um pouquinho melhor. De fato, se $p_1, \ldots, p_m$ são todos os primos $\leq x$ (e logo $m = \pi(x)$), a segunda prova nos dá que

$$x - 1 \leq \left(\frac{\log\ x}{\log\ 2} + 1\right)^m.$$

Daí concluimos que

$$\pi(x) \geq \log(x-1)/\log\left(\frac{\log\ x}{\log\ 2} + 1\right).$$

A demonstração de Euler dá muito mais informação, mas é mais difícil extraí-la. Na próxima seção começaremos a analisar a prova de Euler.

2. A Fórmula do Produto de Euler

Seja $s > 1$ um número real. Tomemos o produto, para todos os primos p, das séries $\sum_{n=0}^{\infty} 1/p^{ns}$. Esse produto vai convergir e, pelo mesmo argumento de prova da Euler, obtemos a chamada *fórmula do produto de Euler:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty} 1/p^{ns} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}. \qquad (1)$$

O símbolo $\prod_p$ denota o produto sobre todos os primos. A função $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ é conhecida como a *função zeta de Riemann*, por causa do estudo profundo que Riemann fez dela, o qual veremos mais adiante.

Antes de explorar (1) para obter informações sobre $\pi(x)$, vamos estudar $\zeta(s)$ um pouco. Temos que (faça um desenho para se convencer)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \geq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}.$$

Logo $\zeta(s) \to +\infty$ quando $s \to 1^+$, como era de se esperar, já que $\sum 1/n$ diverge.

Por outro lado, pela fórmula de Euler (1), temos

$$\log \zeta(s) = \sum_p \log(1 - p^{-s}).$$

Usando agora que

$$\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n, \qquad \text{para} \qquad |x| < 1,$$

temos

$$\log\ \zeta(s) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} 1/np^{ns} = \sum_p 1/p^s + \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}. \qquad (2)$$

Vamos mostrar que $\sum_p \sum_{n=2}^{\infty} 1/np^{ns}$ é limitado para $s > 1$. De fato, para $s > 1$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} &\leq \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}} = \\
&= \sum_p \frac{1}{p^{2s}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \leq 2 \sum_p \frac{1}{p^{2s}} \leq \\
&\leq \ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\zeta(2).
\end{aligned}$$

Pelo que já vimos, temos que $\log\ \zeta(s) \to +\infty$ quando $s \to 1^+$. Conseqüentemente, segue de (2) e do resultado acima que $\sum 1/p^s \to +\infty$ quando $s \to 1^+$. Daí segue, por exemplo que $\sum 1/p$ diverge pois, caso contrário, teríamos $\sum 1/p^s \leq \sum 1/p$ para $s > 1$.

Para obter informações sobre $\pi(x)$ notamos que $\pi(n)-\pi(n-1)$ vale 1 se n é primo e zero caso contrário, logo

$$\begin{aligned}\sum_p \frac{1}{p^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)-\pi(n-1)}{n^s} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^{s+1}}.\end{aligned}$$

Se tivessemos, por exemplo, $\pi(n) \leq n^\alpha$ para algum $\alpha < 1$, a série $\sum \pi(n)/n^2$ convergiria contrariando a divergência de $\sum 1/p$, logo a desigualdade $\pi(n) \leq n^\alpha$ não pode ser válida para nenhum $\alpha < 1$.

3. Um Raciocínio Informal

Antes de prosseguir no nosso estudo da função zeta, vamos fazer um raciocínio informal que nos conduzirá a conjecturar a ordem de magnitude da função $\pi(x)$.

Já que existem aproximadamente x/p inteiros divisíveis por p menores ou iguais a x, qualquer que seja $x \geq 2$, podemos dizer que a probabilidade de um inteiro ser divisível por p é $1/p$. Logo a probabilidade de um inteiro não ser divisível por p é $1 - 1/p$. Se essas probabilidades fossem independentes (na realidade elas não são mas "quase são") concluiríamos que a probabilidade de um inteiro $\leq x$ ser primo seria $\prod_{p \leq x}(1 - 1/p)$. Por um raciocínio análogo aos feitos anteriormente

$$\prod_{p\leq x}(1-1/p)^{-1} \geq \sum_{n\leq x} 1/n \quad \text{e} \quad \sum_{n \leq x} 1/n \geq \int_1^x \frac{dt}{t} = \log x.$$

Concluiríamos então que a probabilidade de um inteiro $\leq x$ ser primo é, no máximo $1/\log x$, ou que $\pi(x) \leq x/\log x$. Isso não é verdade, mas quase é. De fato, Gauss e Legendre conjecturaram no final do século XVIII e Hadamard e de la Valleé Poussin provaram, no final do século XIX, que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1. \tag{3}$$

Esse fato é conhecido como o *Teorema dos Números Primos*.

A prova do teorema dos números primos, isto é, (3), devida a Hadamard e de la Valleé Poussin, foi feita elaborando idéias fundamentais de Riemann. O leitor já deve estar convencido da importância da função zeta e da identidade (1). O que Riemann fez foi estudar a função zeta como função de variável complexa.

4. A Função Zeta de Riemann

A *função zeta* é definida para uma variável complexa s, na região Re $s > 1$ (Re = parte real) pela série convergente $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$. A função zeta é holomorfa nessa região e a fórmula de Euler (1) vale para todo $s \in \mathbb{C}$ com Re $s > 1$. Vamos primeiramente extender $\zeta(s)$ para Re $s > 0$. Para isso temos as seguintes identidades

$$\frac{1}{2^{s-1}}\,\zeta(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s},$$

$$(1 - \frac{1}{2^{s-1}})\,\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}.$$

A última série converge para Re $s > 0$ e podemos definir $\zeta(s)$ para Re $s > 0$ pela igualdade acima. Não é difícil mostrar que $\zeta(s)$ é holomorfa em Re $s > 0$ exceto por um polo simples em $s = 2$, de resíduo 1 (é só imitar a prova acima de que $\zeta(z) \geq 1/s - 1$ para $s > 1$, s real).

O primeiro resultado fundamental mostrado por Riemann foi que $\zeta(s)$ satisfaz a seguinte equação funcional (ver [1] Ch 8 ou [2] Ch 1, para uma prova). Se $0 <$ Re$s < 1$, então:

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos(\frac{\pi s}{2})\zeta(s). \tag{4}$$

O lado direito de (4) está definido para Re $s > 0$, logo podemos usar (4) para continuar analiticamente $\zeta(s)$ para todo o plano complexo obtendo uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com um único polo em $s = 1$.

Riemann prosseguiu, obtendo uma fórmula explícita para $\pi(x)$ em termos dos zeros de função zeta. Vamos esboçar a prova de uma fórmula análoga para a função $\psi(x)$, que será definida a seguir, que é mais simples que a fórmula original de Riemann e serve para os mesmo propósitos.

Sejam $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $\psi : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{se} \quad n = p^r, \ p \ \text{primo} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

A fórmula explícita então se escreve, denotando por $L = \{\lambda \in C \mid \varsigma(\lambda) = 0 \text{ e } 0 \leq \mathrm{Re}\lambda \leq 1\}$,

$$\psi(x) = x - \frac{\varsigma'(0)}{\varsigma(0)} - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}) - \sum_{\lambda \in L} \frac{x^\lambda}{\lambda}, \tag{5}$$

válida para todo x real, $x \geq 2$, $x \notin N$.

Vamos agora dar uma idéia da prova de (5) omitindo alguns detalhes técnicos que podem ser vistos em [1] Ch 17 ou [2] Ch 3.

Para isso usaremos a seguinte fórmula, válida para c real, $c > 0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 1, & x = 1. \\ 0, & 0 < x < 1. \end{cases} \tag{6}$$

Para provar (6), seja primeiramente $x > 1$. Faça o caminho de integração ir para a esquerda fazendo $c \to -\infty$. O integrando tem um polo em $s = 0$ de resíduo 1, que deverá ser contado, pelo Teorema dos Resíduos. Quando Re $s \to -\infty$ o integrando tende a zero, logo (6) segue para $x > 1$. Quando $0 < x < 1$, fazemos o caminho de integração ir para a direita, fazendo $c \to +\infty$. O integrando tende a zero quando Re $s \to +\infty$ e não passamos por nenhum polo do integrando. O resultado novamente segue do teorema dos resíduos.

Passemos a prova de (5). Primeiramente, para Re $s > 1$, temos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{d}{ds}\log\zeta(s) = \frac{d}{ds}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{1}{np^{ns}}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p} -\frac{\log p^n}{np^{ns}} = \sum_{n=1}\sum_{p}\frac{-\log p}{p^{ns}} = -\sum\frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Vamos utilizar (6) para extrair (5) desta última fórmula. Sejam $c > 1$ e $x \geq 2$, $x \notin N$. Então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{x^s}{s}ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{2\pi i}\int_{c-1\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^{s}\frac{ds}{s} = \psi(x).$$

Na última igualdade usamos (6).

Vamos agora fazer o caminho de integração ir para a esquerda fazendo $i \to -\infty$, como na prova de (6). Pode-se mostrar que o integrado tende a zero quando Re $s \to -\infty$. Como na prova de (6) vamos aplicar o Teorema dos Resíduos e para isso temos que ver os polos do integrando e os resíduos correspondentes. Os polos são $s = 0$, $s = 1$ e os zeros de $\zeta(s)$. Os resíduos são

$$\begin{array}{rl} s = 0 & -\zeta'(0)/\zeta(0) \\ s = 1 & x \\ \zeta(\lambda) = 0 & -x^{\lambda}/\lambda. \end{array}$$

Logo, se $x \geq 2$, $x \notin N$, temos

$$\psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{\zeta(\lambda)=0}\frac{x^{\lambda}}{\lambda}.$$

Falta agora analisar os zeros da função zeta. Da fórmula de Euler (1), segue que $\zeta(s) \neq 0$ para Re $s > 1$. Da equação funcional

(4) segue agora que $\varsigma(s) = 0$ para Re $s < 0$ se e só se $s = -2n$, n inteiro, $n \geq 1$. Obtemos disso e da igualdade anterior a fórmula explícita (5).

Convém mencionar que, para a análise da série $\sum_{\lambda \in L} x^\lambda/\lambda$, é crucial no resultado de Riemann, o qual diz que $\#\{\lambda \in L \mid |\text{Im } \lambda| \leq T\}$ é aproximadamente $T/\pi \ \log(T/2\pi)$ para T grande. (Ver [1] Ch 15).

Na próxima seção veremos como se deduz o teorema dos números primos a partir de (5).

5. O Teorema dos Números Primos e os Zeros da Função Zeta

Começamos por reformular o teorema dos números primos em termos da função $\psi(x)$. Seja $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log\, p$. Então

$$\begin{aligned} \theta(x) &\leq \psi(x) = \theta(x) + \sum_{m \geq 2} \sum_{p^m \leq x} \log\, p \leq \\ &\leq \theta(x) + \sum_{p \leq x^{1/2}} \log\, x \leq \theta(x) + x^{1/2} \log\, x. \end{aligned}$$

Também temos que $\theta(x) \leq \pi(x) \log\, x$ e se $\epsilon > 0$ é arbitrário

$$\begin{aligned} \theta(u) &\geq \sum_{x^{1-\epsilon} < p < x} \log\, p \geq (1-\epsilon) \log\, x(\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})) \geq \\ &\geq (1-\epsilon)\pi(x) \log\, x - x^{1-\epsilon} \log\, x. \end{aligned}$$

Dessas desigualdades, é fácil concluir que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x) \log\, x}{\psi(x)} = 1.$$

Segue que, para provar o teorema dos números primos, basta provar que $\lim_{x \to +\infty} \psi(x)/x = 1$. Para isso, usa-se a fórmula explíciita (5). O ponto crucial da prova de Hadamard e de de la Valleé Poussin foi mostrar que $\varsigma(s) \neq 0$ se Re $s = 1$. Disso não é muito difícil concluir que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \left(-\frac{\varsigma'(0)}{\varsigma(0)} - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) - \sum_{\lambda \in L} \frac{x^\lambda}{\lambda} \right) = 0,$$

o que conclui a prova do teorema dos números primos.

Vamos agora mostrar que $\zeta(s) \neq 0$ se Re $s = 1$, utilizando um argumento muito elegante devido a Mertens.

Suponha, por absurdo, que $\zeta(1+ia) = 0$. Considere a função $\zeta(s)^3\zeta(s+ia)^4\zeta(s+2ia) = f(s)$. O polo simples de $\zeta(s)$ em $s = 1$ é cancelado pelo zero de $\zeta(s+ia)$ em $s = 1$ com sobras, logo $f(1) = 0$. Segue que

$$\lim_{s\to 1^+} \log|f(s)| = -\infty.$$

Vamos mostrar que $\log|f(s)| \geq 0$ para $s > 1$, s real, isso nos levará a um absurdo, provando que $\zeta(s) \neq 0$ para Re $s = 1$. Lembremos que para $z \in \mathbb{C}$ temos $\log|z| = \mathrm{Re}(\log z)$; logo para s real, $s > 1$,

$$\begin{aligned}
\log|f(s)| &= \mathrm{Re}\,\log f(s)\\
&= \mathrm{Re}(3\log\zeta(s) + 4\log\zeta(s+ia) + \log\zeta(s+2ia)) =\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p}\frac{3}{np^{ns}} + \frac{4}{np^{n(s+ia)}} + \frac{1}{np^{n(s+2ia)}}\right) =\\
&= \sum_{n=1}\sum_{p}\frac{1}{np^{ns}}\mathrm{Re}\left(3 + \frac{4}{p^{nia}} + \frac{1}{p^{2nia}}\right) =\\
&= \sum_{n=1}\sum_{p}\frac{1}{np^{ns}}(3 + 4\cos(-na\log p) + \cos(-2na\log p)).
\end{aligned}$$

Como $3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0$, concluimos que $\log|f(s)| \geq 0$, terminando a demonstração.

A fórmula explícita (5) mostra que a distribuição dos números primos está intimamente ligada à localização dos zeros de $\zeta(s)$. Riemann sugeriu que talvez todos os zeros de $\zeta(s)$ com $0 <$ Re $s < 1$ tivessem na verdade Re $s = 1/2$. Essa é a famosa ***hipótese de Riemann*** que até hoje não foi provada. Pelas inúmeras conseqüências que a hipótese de Riemann tem para a distribuição dos números primos ela é considerada um dos mais importantes problemas em aberto de toda a Matemática, se não o mais importante. Ela figura na famosa lista de 23 problemas de Hilbert.

Uma conseqüência da hipótese de Riemann que decorre de (5) é que $\psi(x) = x + 0(x^{1/2}\log^2 x)$. (Dizemos que $f(x) = 0(g(x))$ se

$|f(x)|/g(x)$ é limitado). Essa última igualdade é equivalente a

$$\pi(x) = \int_2^x dt/\log\, t + 0(x^{1/2}\log\, x).$$

A função $\int_2^x dt/\log\, t$ é assintótica a $x/\log\, n$ e é uma melhor aproximação a $\pi(x)$. Reciprocamente quaisquer dessas duas fórmulas assintóticas implica a hipótese de Riemann.

6. Alguns Problemas Clássicos

Para terminar, vamos fazer uns raciocínios informais ligados a dois problemas clássicos da Teoria dos Números que podem ser formalizados se soubermos bastante sobre a distribuição dos números primos. Aqui, bastante = um pouco mais que a hipótese de Riemann.

A conjectura de Goldbach afirma que se n é um inteiro par, $n \geq 4$, então n é a soma de dois números primos. Por exemplo $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, etc ... Até onde os cálculos foram efetuados a conjectura foi verificada.

Se n é par, $n \geq 4$ seja $X(n) = \{n - p \mid p \leq n,\ p \text{ primo}\}$ então $X(n) \subset [0, n]$ e tem $\pi(n)$ elementos. Como a probabilidade de um inteiro em $[0, n]$ ser primo é $\pi(n)/n$, aproximadamente $1/\log\, n$, podemos esperar que a probabilidade de um elemento de $X(n)$ ser primo é $1/\log\, n$. Se isso fosse verdade então $X(n)$ conteria aproximadamente $\pi(n)/\log\, n$ primos e n seria soma de dois primos de aproximadamente $n/(\log\, n)^2$ maneiras. Isso também é confirmado pela evidência numérica. Apesar da conjectura de Goldbach não ter sido provada, Vinogradov mostrou que todo inteiro ímpar é soma de três primos e que o número de maneiras de escrever o número como a soma de três primos é, assintóticamente, o esperado. Sabe-se também que o número de inteiros pares $\leq x$ que não são soma de dois primos é $0(n(\log\, n)^{-A})$, $\forall A > 0$ (para esses resultados ver [4]).

A conjectura dos primos gêmeos afirma que existe uma infinidade de primos p tais que $p + 2$ também é primo. Alguns exemplos de tais primos são 5, 17, 29, 101. Considere, para $x \geq 2$, o conjunto $X = \{p - 2 \mid p \text{ primo},\ p \leq x\}$. Então $X \subset [0, a]$ e tem

$\pi(x)$ elementos. Um argumento análogo ao anterior nos leva a crer que X contenha aproximadamente $x/(\log x)^2$ primos, isto é, que existem aproximadamente $x/(\log x)^2$ primos $p \leq x$ com $p+2$ primo. Novamente, isso é confirmado pela evidência numérica e há resultados parciais apontando nessa direção.

O leitor interessado numa discussão histórica dos tópicos tratados nesse artigo deve consultar o belíssimo livro [2], no qual ele irá encontrar as demonstrações completas dos resultados esboçados aqui.

Ao leitor interessado em conhecer os desdobramentos modernos da teoria da distribuição dos primos recomendamos a referência [1].

O artigo [5] discute a evidência numérica, bastante convincente, para a hipótese de Riemann.

Referências

[1] H. DAVENPORT, *Multiplicative Number Theory,* 2nd edition, Springer, 1980.

[2] H. M. EDWARDS, *Riemann's zeta function,* Academic Press, 1974.

[3] G. H. HARDY, *A mathematician's apology,* Cambride Univ., Press, 1940.

[4] R. C. VAUGHAN, *The Hardy-Littlewood method,* Cambridge Univ. 1981.

[5] S. WAGON, *Where are the zeros of zeta of s*? Math. Intelligencer, Vol. 8, No. 4 (1986), 57-62.