

O Hiper cubo

Jonas de Miranda Gomes

Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq

Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico

22.460 - Rio de Janeiro, RJ

e

Geovan Tavares dos Santos

Departamento de Matemática, PUC - RJ

Rua Marquês de São Vicente 225, Gávea

22.453 - Rio de Janeiro, RJ

1.0. Introdução

O hiper cubo em R^4 é o conjunto de pontos

$$K^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4; -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, 4\}.$$

A definição anterior se refere ao que podemos chamar de *hipercubo sólido*. No caso do cubo em R^3 , seus elementos são classicamente conhecidos por vértices, arestas e faces. No caso do hiper cubo é mais conveniente chamar cada elemento genericamente de *face*, e usarmos a dimensão para distinguir os diversos tipos. Assim os *vértices* são faces de dimensão zero, as *arestas* são faces de dimensão um, e as faces propriamente ditas são faces de dimensão dois.

No hiper cubo temos faces de dimensão zero, um, dois e três; as faces de dimensão três são cubos sólidos. Elas são obtidas fixando uma das coordenadas iguais a ± 1 e permitindo que as outras três coordenadas variem, satisfazendo a condição da definição. Temos assim oito faces de dimensão três. As faces de dimensão dois são obtidas fixando duas coordenadas igual a ± 1 , e deixando que as

outras variem segundo as desigualdades na definição de \mathcal{K}^3 . É fácil verificar que temos 24 faces bidimensionais. Analogamente obtemos as faces de dimensão um (num total de 32) e as faces de dimensão zero (vértices) que totalizam 16.

Em [3] o leitor pode encontrar, com mais detalhes, os fatos acima mencionados sobre o hipercubo.

Neste artigo utilizaremos o computador para obtermos informações sobre \mathcal{K}^3 através de suas projeções no plano R^2 . Esse trabalho foi originalmente realizado por Banchoff-Strauss, e resultou em um filme [2].

2.0. O Cubo de R^3

Para uma melhor compreensão do estudo que faremos com o hipercubo, estudaremos nesta seção o cubo usual em R^3 cujos vértices têm coordenadas 1 ou -1 (ver Fig. 2.1). Se projetarmos ortogonalmente o cubo de R^3 no plano $z = 0$ obtemos um quadrado cujos lados são paralelos aos eixos coordenados, e cujo centro é a origem do plano R^2 (ver Fig. 2.2).

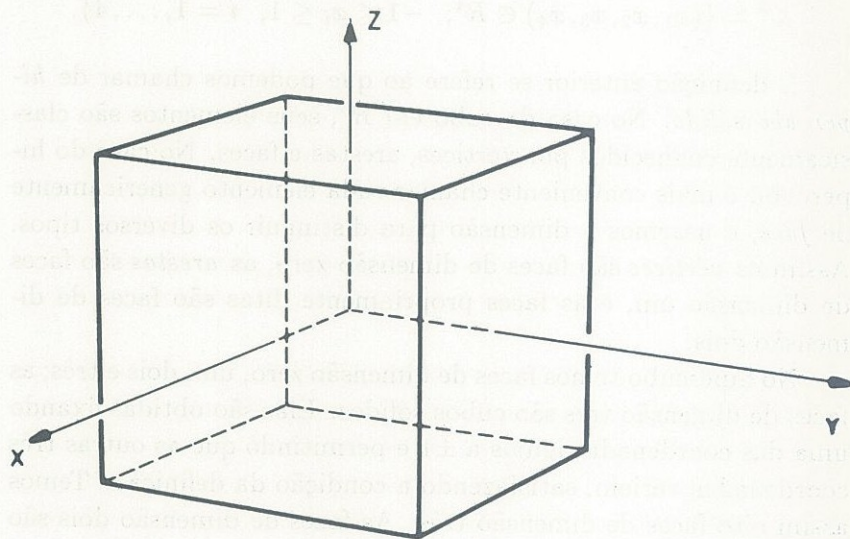


Figura 2.1. O cubo de R^3 .

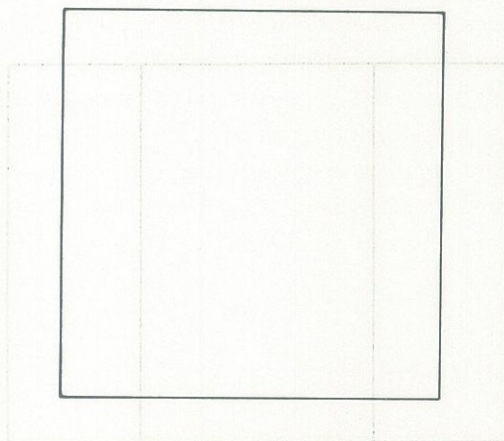


Figura 2.2. Projeção do cubo.

Para obtermos uma melhor visão do cubo devemos fazer uma projeção de modo que as linhas de projeção sejam transversais às faces do cubo, que chamaremos de *projeção genérica*. Podemos obter uma projeção genérica de dois modos distintos: mudando o plano de projeção (plano $z = 0$); ou mudando a posição do cubo. Optamos aqui pelo segundo método.

Sejam α o ângulo de rotação do cubo em torno do eixo- x e β o ângulo de rotação em torno do eixo- y . Se efetuarmos uma rotação de um ângulo $\alpha = 20^\circ$ e $\beta = 0^\circ$, obtemos a projeção mostrada na figura 2.3.

Se efetuarmos também uma rotação de 20° em torno do eixo- y i.e., $\beta = 20^\circ$, a projeção obtida será como indicada na figura 2.4. Essa é uma projeção ortogonal genérica do cubo.

Consideremos agora a diagonal principal do cubo, determinada pelos vértices de coordenadas $(-1, -1, -1)$ e $(1, 1, 1)$. Seja P_ℓ a família de planos ortogonais à reta suporte dessa diagonal, onde o parâmetro ℓ é a distância ao longo dessa reta medida a partir da origem. Para $\ell_0 \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ qualquer plano P_{ℓ_0} da família intersecta transversalmente o cubo em um polígono, podendo essa interseção ser um triângulo $\ell_0 \in (-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$ ou $\ell_0 \in (+\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{3})$, ou um hexágono $\ell_0 \in (-\frac{\sqrt{6}}{3}, +\frac{\sqrt{6}}{3})$. Na figura 2.5 mostramos o

polígono de interseção para quatro valores do parâmetro ℓ .



Figura 2.3. Projeção do cubo

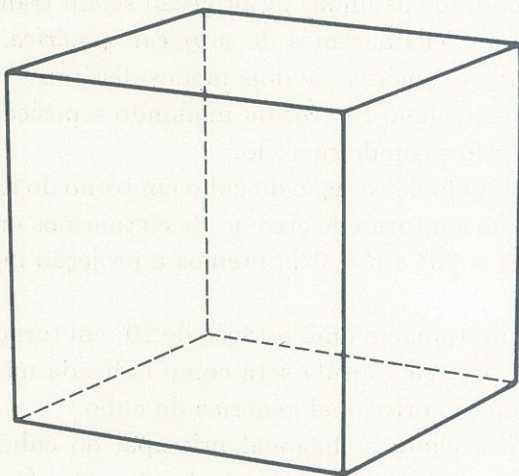


Figura 2.4. Projeção genérica do cubo

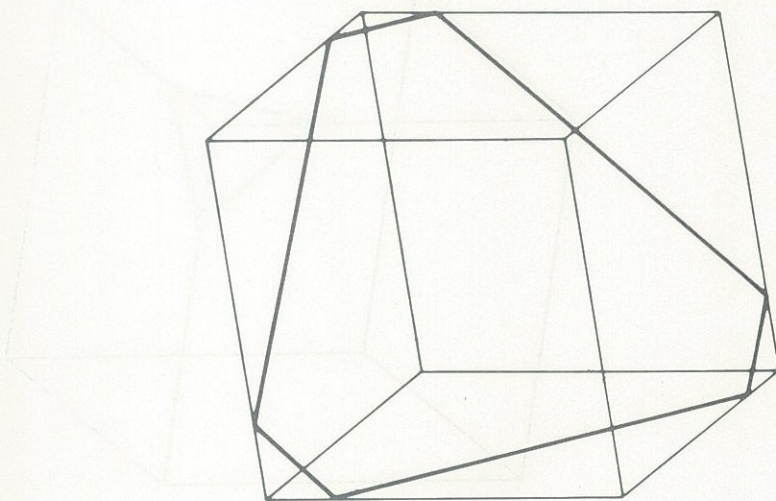
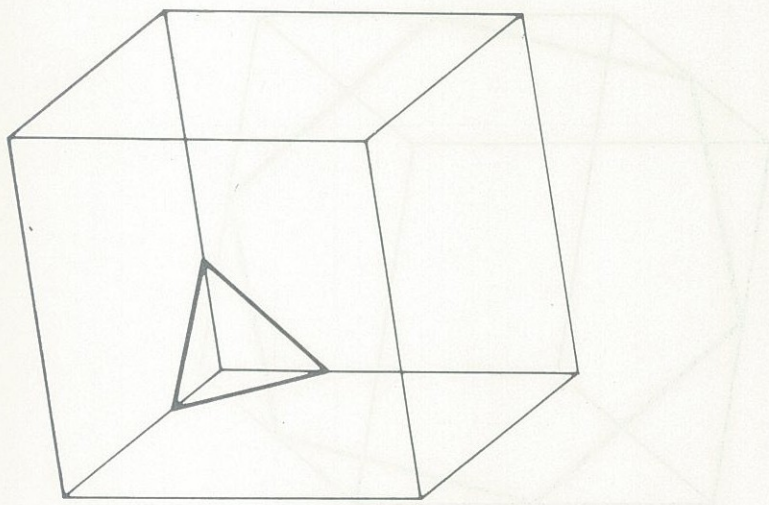


Figura 2.5. Seções do cubo.

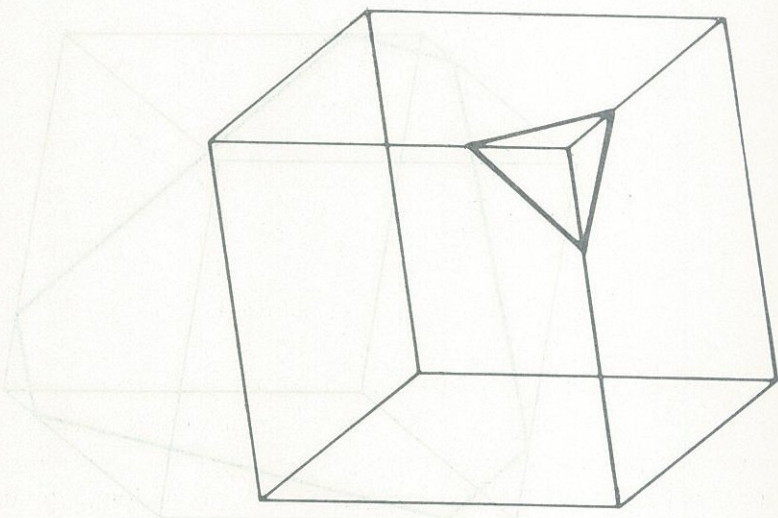
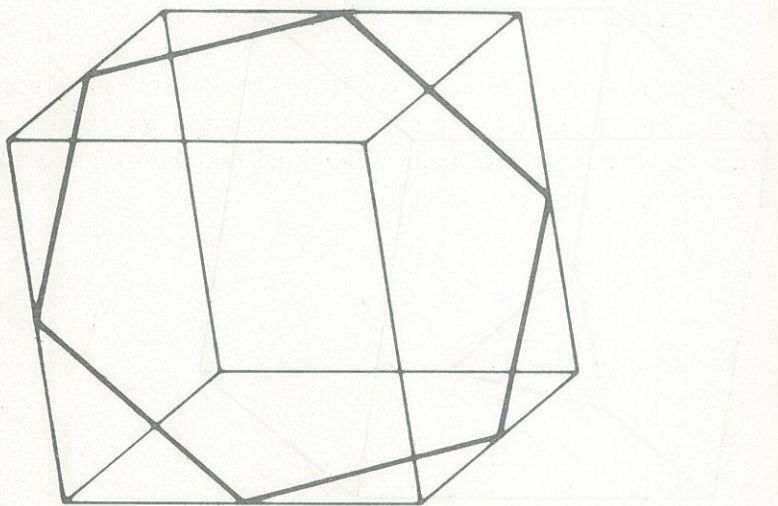


Figura 2.5. (Continuação)

3.0. O Hiper cubo em R^4

Repetiremos nesta seção as construções geométricas da seção anterior para o hiper cubo \mathcal{K}^3 em R^4 . Nossa situação é análoga à dos habitantes imaginários de um plano, na tentativa de entender o cubo do espaço de três dimensões.

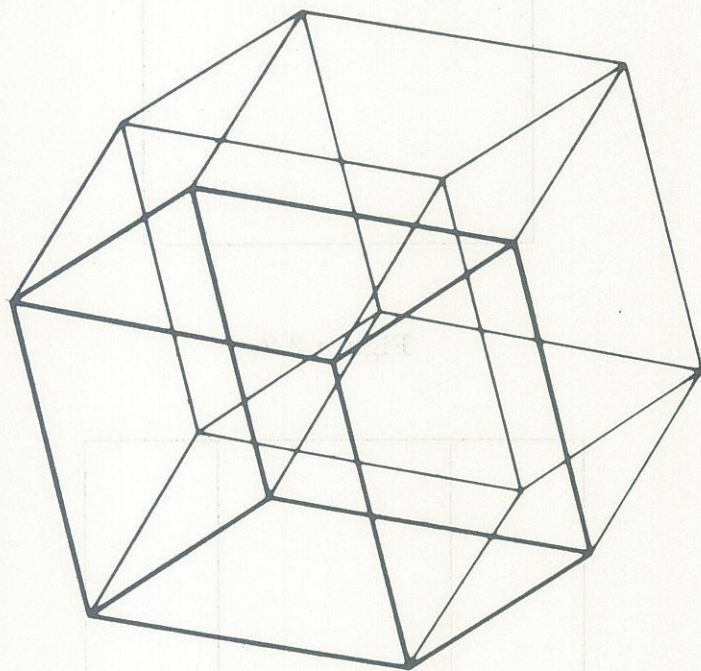


Figura 3.1. Projeção genérica de \mathcal{K}^3

De um ponto de vista intuitivo, podemos observar o seguinte: as projeções ortogonais do cubo em R^3 no plano R^2 vistas anteriormente podem ser obtidas por translações do cubo em R^2 (quadrado) no plano. Se fizermos essa translação ao longo de uma direção não paralela a um dos lados obtemos a projeção genérica da fig. 3.1; caso contrário obtemos as projeções dadas nas figuras 3.2 e 3.3. Desse ponto de vista somos levados a intuir que as projeções de \mathcal{K}^3 no plano R^2 são obtidas por translações das projeções do cubo de R^3 em R^2 . Podemos pois esperar que a projeção genérica de \mathcal{K}^3 seja obtida quando fizermos essa translação em uma direção

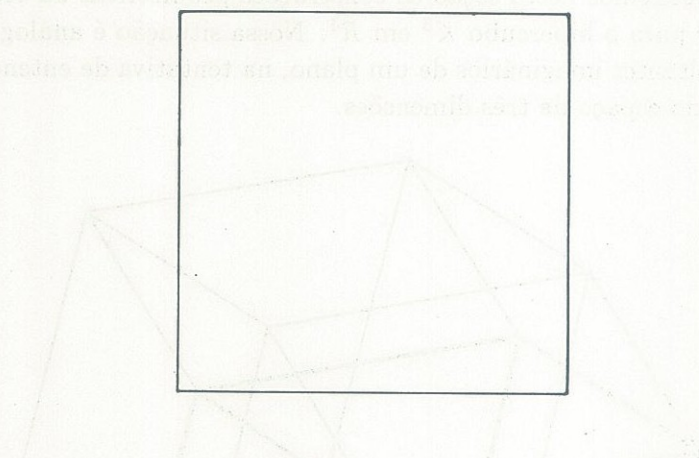


Figura 3.2.

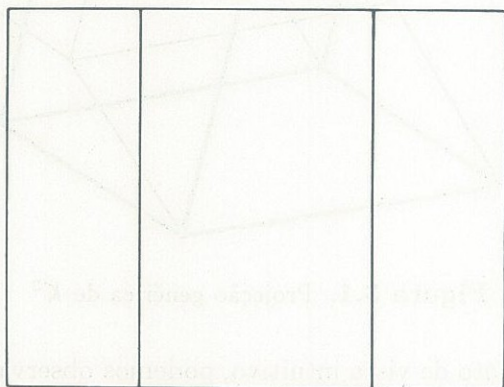


Figura 3.3.

que seja linearmente independente com qualquer projeção das arestas. A imagem obtida nesse caso é mostrada na figura 3.1, onde as linhas mais cheias representam o cubo original que foi transladado.

Ainda na mesma linha é de se esperar que as projeções não

genéricas de K^3 sejam como mostradas nas figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5.

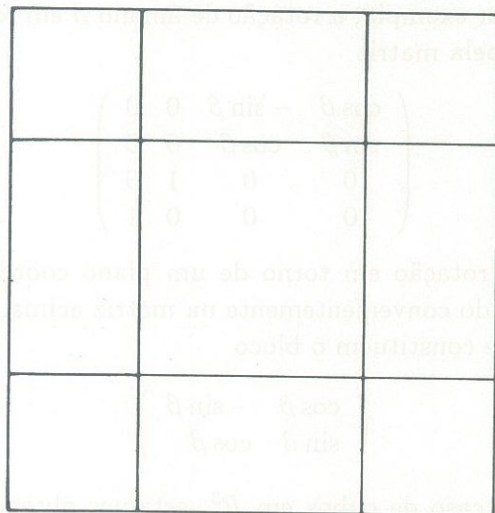


Figura 3.4.

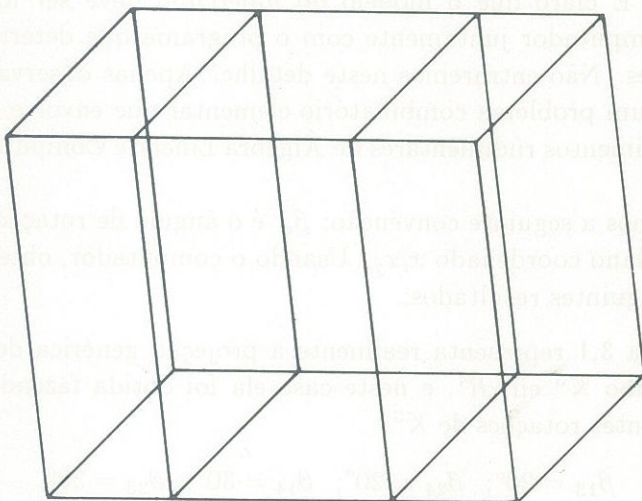


Figura 3.5.

Como fizemos para o cubo em R^3 , podemos programar o computador de modo a obter as projeções ortogonais de K^3 no plano R^2 . Nesse caso as rotações (que no caso R^3 foram feitas em torno

dos eixos coordenados) serão efetuadas em torno dos planos coordenados x_1x_2 , x_2x_3 , x_3x_4 , etc.

Assim, por exemplo, a rotação de ângulo β em torno do plano x_3x_4 é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz de rotação em torno de um plano coordenado x_ix_j é obtida trocando convenientemente na matriz acima a posição dos elementos que constituem o bloco

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Como no caso de cubos em R^3 , estamos obtendo a projeção de \mathcal{K}^3 , supondo que o computador já tem conhecimento de sua definição. É claro que o modelo do hipercubo deve ser fornecido ao computador juntamente com o programa que determina as projeções. Não entraremos neste detalhe. Apenas observamos que isto é um problema combinatório elementar que envolve apenas conhecimentos rudimentares de Álgebra Linear e Computação Gráfica.

Usaremos a seguinte convenção: β_{ij} é o ângulo de rotação em torno do plano coordenado x_ix_j . Usando o computador, obtemos então os seguintes resultados:

- a) A figura 3.1 representa realmente a projeção genérica do hipercubo \mathcal{K}^3 em R^4 , e neste caso ela foi obtida fazendo as seguintes rotações de \mathcal{K}^3 :

$$\beta_{13} = 20^\circ; \quad \beta_{24} = 20^\circ; \quad \beta_{14} = 30^\circ; \quad \beta_{23} = 30^\circ.$$

- b) Na figura 3.2 temos a projeção de \mathcal{K}^3 para $\beta_{ij} = 0$, $(i, j) = (1, 4)$.
- c) A figura 3.3 é a projeção do hipercubo onde fazemos apenas uma rotação em torno do plano coordenado x_1x_3 de um ângulo de 20° .

- d) A figura 3.4 é a projeção do hipercubo, onde fizemos duas rotações de 20° , uma em torno do plano coordenado x_1x_3 , e outro em torno do plano x_2x_4 .
- e) Na figura 3.5 mostramos a projeção de K^3 efetuando rotações de um ângulo de 20° em torno dos planos coordenados x_1x_3 , x_2x_4 e x_1x_4 .

Do mesmo modo que procedemos com o cubo em R^3 , podemos tomar a diagonal ligando os pontos de coordenadas $(-1, -1, -1)$ e $(1, 1, 1, 1)$, e estudar as interseções de K^3 com os elementos da família P_ℓ de hiperplanos ortogonais à reta suporte dessa diagonal, onde ℓ é tomado como sendo a distância orientada ao longo da reta suporte da diagonal a partir da origem. Para $\ell < -2$ ou $\ell > 2$ o hiperplano P_ℓ não intercepta K^3 . No caso $\ell = -2$ e $\ell = 2$ a interseção é apenas um ponto.

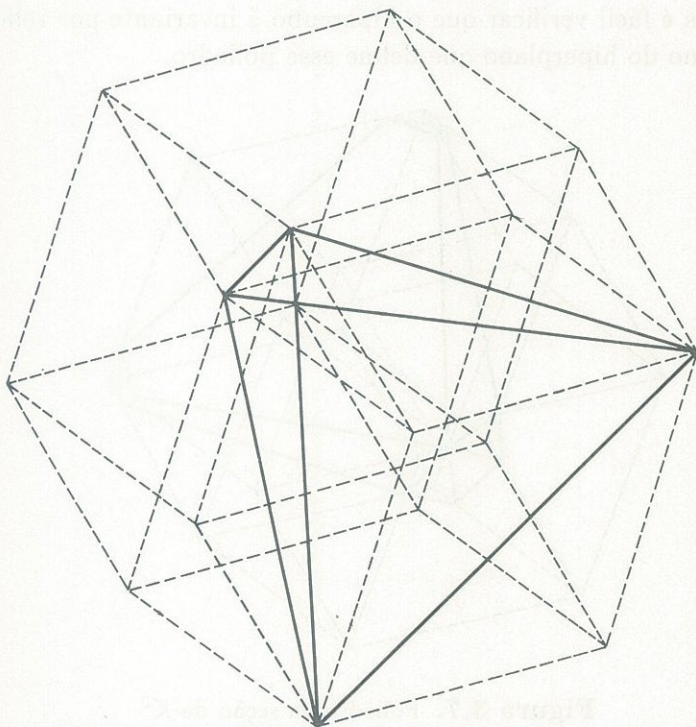


Figura 3.6. Tetraedro da seção de K^3

A interseção de cada hiperplano da família acima com as faces tridimensionais de K^3 é um polígono. Segue-se então que a interseção de K^3 com um hiperplano P_ℓ para $\ell \in (-2, 2)$ é um poliedro. Nas figuras que se seguem mostramos como muda esse poliedro quando variamos ℓ desde -2 até 2 .

Para ℓ variando de -2 até -1 , o hiperplano P_ℓ intersecta apenas quatro faces tridimensionais de K^3 , a interseção resulta pois em um tetraedro. Esse tetraedro tem volume máximo quando $\ell = -1$, e é mostrado na figura 3.6.

Quando ℓ passa por -1 , cada vértice do tetraedro se bifurca em três vértices; obtemos assim um poliedro com oito faces, sendo quatro faces triangulares, e quatro hexagonais. Na figura 3.7 mostramos esse poliedro para um determinado valor do parâmetro ℓ .

Para $\ell = 0$ obtemos um octaedro regular, como mostramos na figura 3.8. Esse é o poliedro que tem volume máximo entre todos os poliedros de interseção do hipercubo com os planos da família P_ℓ , pois é fácil verificar que o hipercubo é invariante por reflexão em torno do hiperplano que define esse poliedro.

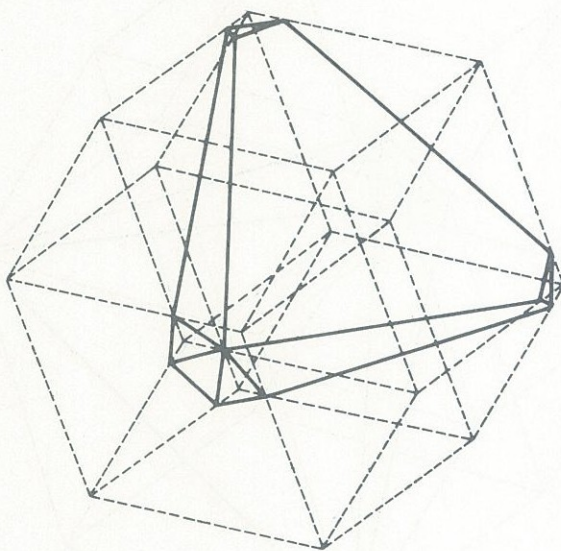


Figura 3.7. Poliedro da seção de K^3

Devido à simetria mencionada no parágrafo anterior, conclui-

mos que quando ℓ varia de 0 até 2, obtemos todas as seções encontradas anteriormente para ℓ variando de -2 até 0, porém com as figuras geométricas invertidas.

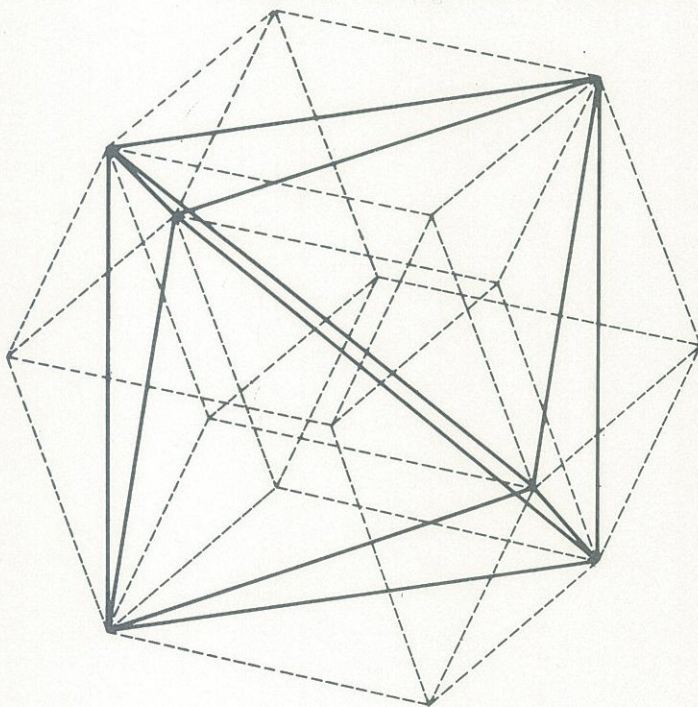


Figura 3.8. Octaedro da seção de K^3

O programa do hipercubo foi implementado usando Fortran 77, com o sistema gráfico GKS no ambiente DOS. Existe também uma implementação feita em Turbo Pascal. O programa pode ser obtido enviando um disquete para um dos editores da seção.

Referências

- [1] T. BANCHOFF, *Computer Animation and the Geometry of Surfaces in 3 - and 4 - space*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Helsink (1978), 1005-1013.

