Artigos

Matemática Universitária N. 7, Junho de 1988, 21 - 47.

Métodos Variacionais em Equações Diferenciais

Djairo G. de Figueiredo
Instituto de Matemática - UNICAMP*
13.081 – Campinas, SP

Introdução. Métodos variacionais são, hoje em dia, uma das principais ferramentas utilizadas para atacar problemas na teoria das equações diferenciais ordinárias e parciais não lineares. O objetivo do presente trabalho é mostrar ao leitor através de três exemplos simples (o primeiro deles, inclusive, é um problema linear) como isso é feito. A ideia central, atrás desse programa, é a formulação de um problema variacional equivalente, em um certo sentido, ao problema de equação diferencial. O problema variacional consiste na obtenção de pontos críticos para um funcional associado, de modo natural, ao problema diferencial. O termo funcional é usado para designar uma função real, cujo campo de definição é um subconjunto de um espaço de funções. É interessante observar que o problema de minimização de funcionais é o objetivo central do Cálculo das Variações clássico, e que, em seu estudo, equações diferenciais (as conhecidas equações de Euler–Lagrange) aparecem de modo natural, como condições suficientes a que a função que minimiza o funcional deve satisfazer. Assim, no Cálculo das Variações clássico, a questão de minimização de um funcional é reduzida ao estudo de um problema na teoria das Equações Diferenciais. Esse programa tem sucesso, na medida em que o problema diferencial seja tratável por alguma outra técnica. A ideia de inverter a direção desse programa, isto é, tratar equações diferenciais através do estudo de um funcional associado,

*Em licença da Universidade de Brasília.

aparece em meados do século XIX, de modo explícito com Dirichlet e Riemann. Esses matemáticos usaram esse procedimento para lidar com o que hoje chamamos problema de Dirichlet para a equação de Laplace. Cf. [1]. Surge assim o Método Direto do Cálculo das Variações, que consiste em estudar diretamente o funcional e procurar obter seu mínimo (ou um ponto crítico, em geral) sem fazer apelo à sua equação de Euler–Lagrange. Hilbert foi pioneiro em utilizar esse método, de modo rigoroso, e efetivamente provar a existência de solução para o problema de Dirichlet. O trabalho de Hilbert foi, sem dúvida, um dos fatores que influiram no desenvolvimento da Integral de Lebesgue, da Análise Funcional e da Topologia. Mostraremos, aqui, como essas teorias possibilitam um tratamento elegante e simples de problemas variacionais.

No presente artigo nos limitamos a tratar equações diferenciais ordinárias, minimizando assim tecnicalidades que aparecem quando lidamos com equações diferenciais parciais. Cf. [5] para um exemplo em e.d.p. Entretanto não podemos iludir o leitor dizendo que tudo é fácil. A aparente simplicidade se deve ao fato que repousamos em resultados mais profundos da Análise. A Seção 1 tem um cunho didático: o problema é enunciado e a meta fica definida; começamos a trabalhar e as dificuldades vão surgindo. Assim vamos motivando a introdução de certas teorias matemáticas para superar os obstáculos. Fica claro porque utilizar a integral de Lebesgue, porque trabalhar com funções semicontínuas, porque introduzir outras topologias, além da norma, num espaço de Banach, etc. Nosso objetivo na Seção 1 é motivar, daí começarmos com um problema linear que pode ser resolvido por outros métodos, talvéz mais elementares. Nas Seções 2, 3 e 4 fazemos detalhes e provas de fatos usados na primeira seção. Na Seção 5 consideramos um problema de contorno não linear e rapidamente mostramos como resolvê–lo pela mesma técnica de minimização desenvolvida no primeiro exemplo. A Seção 6 é dedicada a um problema de contorno não linear, com uma parte não linear do tipo superlinear. Aí se vê a necessidade de ter resultados que assegurem a existência de pontos críticos que não são mínimos. Na Seção 7 apresentamos sem provar o Teorema de Passo Montanha que vem se constituindo, ele próprio ou seus refinamentos e extensões, como uma importante técnica de obtenção de pontos críticos do tipo sela.

Ao concluir esta introdução, queremos insistir que o presente trabalho apenas toca de leve a Teoria de Pontos Críticos de funcionais e as aplicações às equações diferenciais. A Teoria de Morse e a Teoria de Ljusternik–Schnierelmann têm sido cada vez mais estudadas e aplicadas nas questões de multiplicidade de soluções. Nas aplicações, muito se tem feito para sistemas Hamiltonianos e para equações elípticas não lineares. As tecnicalidades, que aí aparecem, são, em verdade, uma parte relevante e constituem belos desafios ao pesquisador.

Primeiro Exemplo

1. Um Problema de Contorno Linear. Considere, o seguinte problema de contorno:

$$(1) \qquad Lu = f \quad \text{em} \quad [a,\, b], \quad u(a) = u(b) = 0,$$

onde

$$(2) \qquad Lu = -(p(t)u')' + q(t)u$$

é um operador diferencial atuando em funções $u \in C^2[a,\, b]$, isto é, funções reais com duas derivadas contínuas definidas no intervalo $[a,\, b]$. Requeremos as seguintes condições nos coeficientes do operador L:

$$(3) \quad p \in C^1[a,\, b],\; q \in C^0[a,\, b];\; p(t) > 0,\; q(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a,\, b].$$

Supomos que $f \in C^0[a,\, b]$ é uma função dada. Uma *solução clássica* do problema (1) é uma função $u \in C^2[a,\, b]$ que satisfaz à equação em (1) e que se anula nas extremidades do intervalo $[a,\, b]$.

Multiplicando a equação em (1) por $v \in C^1[a,\, b]$, com $v(a) = v(b) = 0$, e, integrando por partes, obtemos

$$(4) \qquad \int pu'v' + \int quv = \int fv, \;\; \forall v \in C_0^1[a,\, b],$$

onde usamos a notação C_0^1 para indicar que as condições de fronteira $v(a) = v(b) = 0$ são satisfeitas. Usamos em (4) e ao longo de todo o trabalho a notação $\int g$ para designar $\int_a^b g(t)dt$. A expressão (4) motiva a seguinte definição. Uma função $u \in C_0^1[a, b]$ é uma *solução fraca* de (1) se u satisfaz à relação (4). É claro que uma solução clássica de (1) é também solução fraca. Consequentemente a questão de se obter uma solução clássica de (1) pode ser reduzida ao seguinte programa:

(I) determinação de uma solução fraca (em verdade, vamos estabelecer, primeiramente, a existência de uma solução num sentido mais fraco ainda do que o definido acima) que, como veremos a seguir, é algo mais fácil de ser feito, e

(II) prova de que, de fato, essa solução é de classe C^2; esse passo é a chamada "regularização" da solução.

Agora, considere o seguinte funcional definido em funções $v \in C_0^1[a, b]$:

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int p|v'|^2 + \frac{1}{2}\int qv^2 - \int fv. \tag{5}$$

Um cálculo simples mostra que, para um dado $u_0 \in C_0^1[a, b]$, tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\Phi(u_0+tv) - \Phi(u_0)\right\} &= \\ = \int pu_0'v' + \int qu_0v - \int fv,&\end{aligned}$$

para qualquer $v \in C_0^1[a, b]$. Vamos designar o limite acima por $\Phi'(u_0)v$. Essa expressão é conhecida no Cálculo das Variações como a *primeira variação* do funcional Φ. [A notação, que para ela usamos, é a da derivada direcional de Φ no ponto u_0 na direção v. Observe, entretanto, que no momento não falamos em derivada de Φ, pois ainda não colocamos estruturas algébrica e topológica no domínio de Φ; isso será feito mais adiante de um modo induzido pelos objetivos a atingir, e aí $\Phi'(u_0)$ será, de fato, a derivada de Gâteaux de Φ]. Assim, vemos que, se u_0 for um mínimo de Φ em $C_0^1[a, b]$:

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0+tv) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall v \in C_0^1[a, b]$$

e daí $\Phi'(u_0)v = 0$, ou seja, u_0 é uma solução fraca do problema (1). Portanto, a existência de uma solução fraca de (1) pode ser estabelecida se provarmos que o funcional Φ tem um mínimo em $C_0^1[a, b]$. Ótimo! Mas isso não é tão imediatamente atingível. Vejamos como proceder.

Inicialmente, mostraremos que o funcional Φ é limitado inferiormente em $C_0^1[a, b]$, o que nos dará alento para continuar o processo de minimização. Observe que

$$\Phi(v) \geq p_0 \int |v'|^2 - \left(\int f^2\right)^{1/2} \left(\int v^2\right)^{1/2}, \tag{6}$$

para todo $v \in C_0^1[a, b]$, onde $0 < p_0 = \min\{p(t) : t \in [a, b]\}$ e onde utilizamos o fato $q \geq 0$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Agora, para continuar a estimativa de Φ, utilizamos a seguinte desigualdade:

$$\int |v'|^2 \geq c \int v^2 \quad \forall\, v \in C_0^1[a, b], \tag{7}$$

onde $c > 0$ é uma constante independente de v. A desigualdade (7) pode ser provada, facilmente, usando o Teorema Fundamental de Cálculo. Ela é conhecida como a desigualdade de Wirtinger, cuja melhor constante c pode ser obtida usando séries de Fourier; cf. Seção 2 abaixo. De (6) e (7) se segue

$$\Phi(v) \geq p_0 \int |v'|^2 - \left(\frac{1}{c} \int f^2\right)^{1/2} \left(\int |v'|^2\right)^{1/2}, \tag{8}$$

o que implica

$$\Phi(v) \geq -\frac{1}{4p_0 c} \int f^2, \quad \forall\, v \in C_0^1[a, b].$$

Assim concluimos que o funcional Φ é limitado inferiormente. A questão agora é saber se o ínfimo de Φ é assumido. Neste sentido será conveniente introduzir em $C_0^1[a, b]$ alguma topologia. Por que? Bem, vem à memória (pelo menos, à minha) o teorema de Bolzano–Weierstrass da Análise que afirma: toda função real contínua definida num intervalo fechado e limitado da reta assume seu ínfimo nesse intervalo. O que tem de essencial nesse resultado são fatos topológicos a respeito da função e de seu domínio, e, de fato, o seguinte resultado da Topologia generaliza o teorema de Bolzano–Weierstrass:

Teorema A. *Seja X um espaço topológico compacto e seja Φ : $X \to \mathbb{R}$ uma função real semicontínua inferiormente definida em X. Então, o ínfimo de Φ existe e é assumido num ponto $u_0 \in X$.* [Cf. Seçaõ 3].

O espaço $C_0^1[a, b]$ com as definições usuais de soma e produto por um escalar é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Ele se torna um espaço normado se o munirmos da norma

$$(9) \qquad ||v|| = \left(\int |v'|^2\right)^{1/2}.$$

Para verificar que (9) realmente define uma norma usamos a desigualdade (7) e a desigualdade de Minkowski para integrais. É possível definir outras normas em $C_0^1[a, b]$, como, por exemplo:

$$(10) \qquad ||v||^* = \max\{|v'(t)| : t \in [a, b]\}.$$

Entretanto (10) apresenta sérias deficiências no método variacional, como apontaremos oportunamente. Designemos por X o espaço normado $C_0^1[a, b]$ com a norma (9).

O funcional Φ é contínuo em X. De fato, se $v_n \to v$ em X então pela desigualdade (7), $v_n \to v$ em L^2, e daí concluimos que

$$\left|\int p|v_n'|^2 - \int p|v'|^2\right| \leq \widehat{p} \int | \ |v_n'|^2 - |v'|^2| \to 0$$

$$\left|\int qv_n^2 - \int qv^2\right| \leq \widehat{q} \int |v_n^2 - v^2| \to 0$$

$$\left|\int fv_n - \int fv\right| \leq \left(\int f\right)^{1/2} \left(\int |v_n - v|^2\right)^{1/2} \to 0$$

onde $\widehat{p} = \max\{p(t) : t \in [a, b]$ e $\widehat{q} = \max\{q(t) : t \in [a, b]$. Para um real $R > 0$, convenientemente escolhido:

$$\text{Inf}_X \Phi = \text{Inf}\{\Phi(v) : v \in X, ||v|| \leq R\}.$$

Consequentemente, poderemos nos restringir à bola $B_R = \{v \in X : ||v|| \leq R\}$, e tentar aplicar o Teorema A ao funcional Φ restrito a B_R. Surge, porém, a primeira dificuldade: B_R não é compacta. Um dos motivos dessa falta de compacidade é o fato de X não ser completo.

Neste ponto, visando sanar a dificuldade acima, surge a ideia de completar o espaço X na norma (9). Os elementos do espaço completado são classes de equivalência de sequências de Cauchy em X, o que é algo incômodo de se trabalhar, para não dizer coisa pior. Não esqueçamos que estamos na busca de uma solução para o problema (1), e esperamos obter essa solução como uma função. É aqui, que a integral de Lebesgue entra no jogo. O horroroso espaço obtido pela completamento de X pode ser identificado com um espaço de funções. Não serão mais funções diferenciáveis, mas vamos ganhar em outros sentidos. Vejamos.

Considere o espaço $L^2[a, b]$ das funções reais mensuráveis a Lebesgue definidas no intervalo $[a, b]$ e tais que $\int f^2 < \infty$. Com o produto interno $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int fg$, esse espaço é um espaço de Hilbert. Cf. por exemplo, Royden [13]. Designemos por $H_0^1[a, b]$ o subespaço de $L^2[a, b]$ das funções u que possuem derivada fraca em $L^2[a, b]$ e tais que $u(a) = u(b) = 0$. Relembremos o conceito de derivada fraca: $u \in L^2[a, b]$ tem *derivada fraca* em $L^2[a, b]$ se existir $v \in L^2[a, b]$ tal que

$$(11) \qquad \int v\varphi = -\int u\varphi' \quad \forall\, \varphi \in C_c^1[a, b]$$

onde o subíndice "c" indica que a função φ se anula fora de um intervalo fechado contido em (a, b). Veja detalhes das afirmações a seguir na Seção 4. A derivada fraca de u é única e é designada por u'. Se u possuir derivada fraca, então u é contínua em $[a, b]$; isso nos permite falar em $u(a)$ e $u(b)$. Em $H_0^1[a, b]$ define-se a norma

$$(12) \qquad ||u|| = \left(\int u^2 + \int |u'|^2\right)^{1/2}$$

e pode-se provar que $C_0^1[a, b]$ é denso em $H_0^1[a, b]$. Assim a desigualdade de Wirtinger é válida para $u \in H_0^1[a, b]$, por continuidade. Daí se segue que a norma (12) é equivalente a

$$(13) \qquad \|u\|_{H^1} = \left(\int |u'|^2\right)^{1/2}.$$

A partir de agora consideramos $H_0^1[a, b]$ munido da norma (13). Prova–se que ele é completo. Esse é um exemplo de um espaço de Sobolev. Assim o completamento do espaço X na norma (9) pode ser identificado com o espaço de funções $H_0^1[a, b]$.

Agora olhamos Φ como um funcional definido em $H_0^1[a, b]$. Φ é contínuo (mesma demonstração acima), mas a não compacidade de $B_R = \{v \in H_0^1[a, b].\|v\|_{H^1} \leq R\}$ persiste! A razão agora (que também ja existia antes do completamento) é que $H_0^1[a, b]$ é um espaço de dimensão infinita. Lembramos que a bola unitária num espaço normado é compacta se e só se o espaço for de dimensão finita. (Esse é o conhecido Teorema de Riesz). Por que nos demos ao trabalho de completar X se não havia esperança de ganhar compacidade de B_R? Por que não utilizar $C_0^1[a, b]$ com a norma (10) que já é completo? As respostas a essas perguntas virão no parágrafo seguinte, onde visando compacidade introduzimos a topologia fraca.

No nosso caso, observamos que o espaço $H_0^1[a, b]$ é, de fato, um espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int u'v',$$

isto é, a norma definida a partir desse produto interno é precisamente a norma (13). Em espaços de Hilbert, bolas são fracamente compactas. A topologia fraca em espaços de Hilbert pode ser definida em termos de sequências do seguinte modo. Para não introduzir notações adicionais, vamos definir convergência fraca apenas em $H_0^1[a, b]$: uma sequência $(u_n) \subset H_0^1[a, b]$ *converge fracamente* para $u \in H_0^1[a, b]$ se

$$\langle u_n, v\rangle_{H^1} \longrightarrow \langle u, v\rangle_{H^1} \quad \forall v \in H_0^1[a, b].$$

Esse é um ponto onde o espaço $C_0^1[a, b]$ com a norma (10) não funciona: a bola B_R em tal espaço não é fracamente compacta.

Agora voltamos à tentativa de aplicar o Teorema A com X

sendo a bola B_R em $H_0^1[a, b]$ munido da topologia fraca. Resta apenas ver que Φ seja semicontínua inferiormente na topologia fraca de $H_0^1[a, b]$. Para isso usamos o seguinte resultado:

Teorema B. *Seja E um espaço de Banach e $\Phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente (na norma) e convexo. Então Φ é semicontínuo na topologia fraca de E.* (Cf. Seção 3).

Observação. Aqui é o ponto onde se faz necessário usar semicontinuidade inferior. De fato não é verdade que Φ seja contínuo na topologia fraca. O Teorema B não é verdadeiro se substituirmos semicontinuidade inferior por continuidade. Para se convencer disso, tome exemplo de Φ com $p \equiv 1$ e $q \equiv 0$, isto é

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int |v'|^2 = \frac{1}{2}||v||_{H^1}^2.$$

Para simplificar a notação, tome $a = 0$ e $b = \pi$. Então, $v_n(t) = \frac{1}{n}\operatorname{sen} n\,t$ converge fracamente par 0 em $H_0^1[0, \pi]$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \cos n\,t \cdot v'(t)dt = 0, \quad \forall\, v' \in L^2[0, \pi]$$

pelo Lema de Riemann–Lebesgue, cf. [6; p. 56]. Mas

$$\Phi(v_n) = \frac{1}{2}\int_0^\pi |v_n'|^2 = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2 n\,t\,dt = \frac{\pi}{4} \not\to 0.$$

Portanto, podemos usar o Teorema A e concluir que Φ assume seu ínfimo em $u_0 \in B_R$. Se tomarmos R tal que $\Phi(v) > \Phi(0) = 0$, para $||v||_{H^1} = R$, concluimos que u_0 está no interior de B_R. Observe que o funcional Φ em $H_0^1[a, b]$ é diferenciável a Fréchet; seja $\nabla\Phi : H_0^1[a, b] \to H_0^1[a, b]$ sua diferencial, onde usamos o teorema de Riesz–Fréchet (cf. [2], [14]) para identificar o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $H_0^1[a, b]$ com o próprio $H_0^1[a, b]$. Assim

$$\langle\nabla\Phi(u_0), v\rangle_{H^1} = \Phi'(u_0)v,$$

onde $\Phi'(u_0)$ foi definida no começo desta seção. Portanto, $u_0 \in H_0^1[a, b]$ satisfaz à relação

$$\int p u_0' v' + \int q u_0 v = \int f v \quad \forall\, v \in H_0^1[a, b]. \tag{14}$$

Um tal u_0 é o que, de fato, se conhece como *solução fraca* do problema (1). É, essencialmente, a mesma definição dada no início desta seção, a menos do fato que a derivada, agora, é tomada no sentido fraco, ao passo que lá era no sentido clássico. Assim, provamos que o problema (1) possue solução fraca, e está cumprida a fase (I) de nosso programa.

Antes de passarmos à parte (II) vamos provar a *unicidade* da solução fraca de (1). Suponha que existam duas tais soluções $u_1, u_2 \in H_0^1[a, b]$. De (14) obtemos

$$\int p(u_1' - u_2')v' + \int q(u_1 - u_2)v = 0, \quad \forall\, v \in H_0^1[a, b].$$

Tomando $v = u_1 - u_2$ e lembrando as hipóteses (3), segue-se que

$$\int p(u_1' - u_2')^2 = 0$$

o que implica $u_1' = u_2'$. Essa igualdade usada nas expressões

$$\int u_i'\varphi = -\int u_i\varphi', \quad \forall\, \varphi \in C_c^1[a, b]$$

fornece

$$\int (u_1 - u_2)\varphi' = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0^1[a, b].$$

Isso implica (veja Lema 1 na Seção 4) que $u_1 - u_2 = \text{const.}$ Utilizando-se as condições de fronteira obtemos $u_1 = u_2$.

Para cumprir a fase (II) de nosso programa, usamos a expressão (14) reescrevendo-a como

$$\int pu_0'v' = -\int [qu_0 - f]v \quad \forall\, v \in H_0^1[a, b].$$

Isso mostra que pu_0' possue derivada fraca em $L^2[a, b]$ e

$$(pu_0')' = qu_0 - f. \tag{15}$$

Portanto pu_0' é contínua, o que implica u_0' contínua. E finalmente de (15) obtemos

$$pu_0'' = -p'u_0' + qu_0 - f$$

o que mostra que u_0'' é também contínua.

2. A Desigualdade da Wirtinger. Nesta seção provamos a desigualdade (7) da seção anterior. Vamos a uma primeira demonstração. Seja $v \in C_0^1[a, b]$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$v(t) = \int_a^t v'(s)ds.$$

Usando a desigualdade de Cauchy–Schwarz obtemos

$$v(t)^2 \leq \int_a^t |v'(s)|^2 ds \cdot (t-a),$$

ou ainda:

$$v(t)^2 \leq \int_a^b |v'|^2 \cdot (t-a).$$

Daí

$$\int_a^b v^2 \leq \int_a^b |v'|^2 \int_a^b (t-a)dt = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |v'|^2.$$

Portanto, a constante c na desigualdade (7) pode ser tomada como $2/\ell^2$, onde ℓ é o comprimento do intervalo $[a, b]$. A melhor constante c pode ser obtida através de um outro procedimento de demonstração, usando-se séries de Fourier. Para facilitar a notação façamos $a = 0$ e $b = \ell$. A função v é igual à sua série de Fourier de senos, cf. [6; p. 21]:

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\, \frac{n\pi t}{\ell}$$

onde os coeficientes de Fourier, b_n, são definidos por

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell v(t) \text{sen}\, \frac{n\pi t}{\ell} dt.$$

Vale também a identidade de Parseval, [6; p. 84]

$$\frac{2}{\ell} \int_0^\ell |v|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2. \tag{16}$$

Por outro lado, $v'(t)$ é igual a sua série de cossenos

$$v'(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{\ell}$$

onde

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} v'(t) \cos \frac{n\pi t}{\ell} dt$$

e, também, temos a identidade de Parseval

$$\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} |v'|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \tag{17}$$

Para $n \geq 1$ temos, integrando por partes

$$a_n = \frac{2}{\ell} \frac{n\pi}{\ell} \int_0^{\ell} v(t) \sin \frac{n\pi t}{\ell} dt = \frac{n\pi}{\ell} b_n.$$

Podemos estimar o lado direito de (17) e obter

$$\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} |v'|^2 \geq \frac{\pi^2}{\ell^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2$$

e daí, usando (16) obtemos

$$\int_0^{\ell} |v'|^2 \geq \frac{\pi^2}{\ell^2} \int_0^{\ell} |v|^2. \tag{18}$$

Assim, a constante c na desigualdade de Wirtinger pode ser tomada como π^2/ℓ^2. Para ver que se trata da melhor constante tome $v(t) = \sin \frac{\pi t}{\ell}$ para a qual se obtem igualdade em (18).

Observação. Existe uma versão multidimensional da desigualdade de Wirtinger, que é conhecida como a desigualdade de Poincaré. Seja $u : \Omega \to R$ uma função de classe C^1 em um aberto limitado de R^N e suponha que u tem suporte compacto em Ω. Então, existe uma constante $c > 0$, independente da particular função u, com as propriedades enunciadas acimas [a constante depende apenas de Ω] tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \geq c \int_{\Omega} u^2. \tag{19}$$

Pode–se provar que c é o primeiro autovalor do Laplaciano, sujeito às condições de Dirichlet. Mais especificamente, o problema de autovalor

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{em} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega$$

onde $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω, possui uma sequência de autovalores (todos positivos)

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdot \;.$$

A constante c da desigualdade (19) é precisamente λ_1, e a igualdade em (19) é obtida quando u é igual a φ_1, uma auto–função correspondente ao primeiro autovalor, isto é

$$-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

Esses resultados podem ser vistos em livros sobre Equações Diferenciais Parciais; em particular, veja [9], ou [7] onde se trata operadores elipticos de 2ª ordem mais gerais que o Laplaciano.

3. Minimização de Funcionais. Relembremos duas definições. Um funcional real $\Phi : X \to \mathbb{R}$ definido num espaço topológico X é *semicontínuo inferiormente* se a imagem inversa $\Phi^{-1}(a, \infty)$ de qualquer semi–reta aberta (a, ∞) é um aberto de X. Um espaço topológico X é *compacto* se qualquer cobertura de X por abertos possui uma subcobertura finita. Agora demonstramos o Teorema A enunciado na Seção 1.

Primeiramente provamos que Φ é limitado inferiormente. De fato

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi^{-1}(-n, \infty)$$

ou seja X está recoberto por uma coleção de abertos $\Phi^{-1}(-n, \infty)$. Pela compacidade de X segue–se que existe n_0 tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_0} \Phi^{-1}(-n, \infty).$$

Logo $\Phi(x) > -n_0$ para todo $x \in X$. Seja I o infimo de Φ.

$$-\infty < I = \mathrm{Inf}_X \Phi.$$

Provemos a seguir que I é assumido. Suponha por contradição que isso não seja o caso. Logo

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi^{-1}(I + \frac{1}{n}, \infty)$$

ou seja X está recoberto por uma coleção de abertos. Novamente a compacidade de X nos fornece um n_1 tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_1} \Phi^{-1}(I + \frac{1}{n}, \infty).$$

Daí $\Phi(x) > I + \frac{1}{n_1}$, para todo $x \in X$, o que contradiz o fato de I ser o ínfimo de Φ.

Nas aplicações do Teorema A no Cálculo das Variações, Φ está definida num espaço de funçoes ou num subconjunto do mesmo. Portanto, vamos agora considerar funcionais reais $\Phi : E \to \mathbb{R}$ definidos em espaços de Banach E de dimensão infinita. Na maioria dos casos, o funcional Φ é contínuo na topologia da norma. Além disso, é conveniente considerá-lo restrito a bolas de espaço de Banach E, e tais conjuntos nunca são compactos na topologia da norma, como já observamos na Seção 1. Daí, a introdução de outras topologias no espaço de Banach E. A mais conveniente é a chamada topologia fraca, cf. [2] ou [14]. Os espaços de Banach reflexivos constituem uma importante classe de espaços de Banach que são caracterizados pela propriedade de bolas fechadas serem conjuntos fracamente compactos. Espaços de Hilbert, espaços normados de dimensão finita, espaços L^p com $1 < p < \infty$, espaços de Sobolev modelados sobre tais L^p são exemplos de espaços reflexivos. Consequentemente consideramos em E a topologia fraca. Em contrapartida, porém o tipo de continuidade requerida em Φ para a aplicação do Teorema A deverá ser na topologia fraca. O seguinte resultado será de grande valia nas aplicações:

Teorema B. *Seja $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente na topologia da norma de espaço de Banach X. Se Φ for convexo, então ele é fracamente semicontínuo inferiormente.*

Demonstração. O conjunto

$$\Phi^{-1}(-\infty, a] = \{x \in X : \Phi(x) \leq a\}$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ é convexo. É uma consequência do Teorema de Hahn–Banach que um conjunto convexo num espaço de Banach é fechado se e só ele é fracamente fechado. □

4. O Espaço de Sobolev $H^1[a, b]$. Vimos na Seção 1 a necessidade de se trabalhar com funções do L^2 deriváveis num sentido fraco. Nesta seção, demonstraremos os resultados lá utilizados. É conveniente introduzir inicialmente um espaço maior que $H_0^1[a, b]$, isto é, não nos preocupemos com as condições de fronteira por enquanto,

$$H^1[a, b] = \{u \in L^2[a, b] : u' \in L^2[a, b]\}.$$

Para justificar a introdução da notação u', observemos que se $v_1, v_2 \in L^2[a, b]$ são tais que

$$\int v_i \varphi = -\int u \varphi' \quad \forall \varphi \in C_0^1[a, b]$$

então $v_1 = v_2$, q.t.p., [quase em toda parte = a menos de um conjunto de medida nula]. Isso decorre do fato que

$$\int v\varphi = 0, \ \forall \varphi \in C_c^\infty[a, b] \Rightarrow v = 0 \quad \text{q.t.p.}$$

o que por sua vez se segue do fato de $C_c^1[a, b]$ ser denso em $L^2[a, b]$. É claro que, se u for continuamente diferenciável no sentido clássico, isto é, de classe C^1, então ela possue derivada fraca, que é precisamente sua derivada clássica.

Munimos o espaço $H^1[a, b]$ com o produto interno

$$(u_1, u_2) = \int u_1' u_2' + \int u_1 u_2 \quad \forall u_1, u_2 \in H^1[a, b] \tag{20}$$

cuja norma correspondente é

$$||u|| = \left(\int |u'|^2 + \int u^2\right)^{1/2}. \tag{21}$$

A seguir, vejamos algumas propriedades de H^1.

Proposição 1. *$H^1[a, b]$ é um espaço de Hilbert*

Demonstração. Já aceitamos (o leitor deverá estar convencido) que (20) define um produto interno. Resta, pois, provar que o espaço é completo na norma (21). Seja $(u_n) \subset H^1[a, b]$ uma sequência de Cauchy. Segue-se da expressão (21) que $(u_n) \subset L^2$ e $(u_n') \subset L^2$ são também sequências de Cauchy em L^2. Logo, pelo fato de L^2 ser completo, existem $u, v \in L^2[a, b]$ tais que

$$u_n \longrightarrow u, \quad u_n' \longrightarrow v \quad \text{em} \quad L^2.$$

Para concluir mostremos que $u \in H^1$ e $u' = v$. Que isso é verdade se segue do fato que

$$\int u_n \varphi' = -\int u_n' \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty[a, b]$$

implica, por passagem ao limite:

$$\int u\varphi' = -\int v\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty[a, b],$$

o que conclue a demonstração. □

Proposição 2. *Dada $u \in H^1[a, b]$, existe uma função $\tilde{u} \in C^0[a, b]$ tal que $u = \tilde{u}$,* q.t.p. *Neste sentido, escrevemos $H^1[a, b] \subset C^0[a, b]$.*

Demonstração. Definámos

$$w(t) = \int_a^t u'(s)ds \quad \forall t \in [a, b]. \tag{22}$$

A função w é contínua, e, de fato, absolutamente contínua (cf. [10] ou [13]), o que pode ser visto a partir da estimativa

$$|w(t_2) - w(t_1)| \leq \left(\int_{t_1}^{t_2} |u'|^2\right)^{1/2} |t_2 - t_1|^{1/2}$$

para $t_1, t_2 \in [a, b]$. Além disso, a teoria de Lebesgue nos diz que w é diferenciável q.t.p. e $w' = u'$ q.t.p. Por outro lado $w\varphi$ é também diferenciável q.t.p., e

$$(w\varphi)' = w'\varphi + w\varphi'.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo para a integral Lebesgue, cf. [10; p. 285]

$$(w\varphi)(b) - w\varphi(a) = \int (w\varphi)' = \int w'\varphi + \int w\varphi'$$

de onde se segue (pois $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$) que

$$\int w'\varphi = -\int w\varphi'.$$

Por outro lado, pela definição de derivada fraca

$$\int u'\varphi = -\int u\varphi'$$

e como $u' = w'$ q.t.p., obtemos

$$\int (w-u)\varphi' = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^1[a,\, b]. \tag{23}$$

Para concluir a demonstração basta provar o seguinte lema.

Lema 1. *Se* $u \in L^2[a,\, b]$ *for tal que*

$$\int u\varphi' = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^1[a,\, b] \tag{24}$$

então $u =$ constante.

Demonstração do Lema. Fixe $\psi \in C_c^1[a,\, b]$ com $\int \psi = 1$. Para todo $v \in C_c^0[a,\, b]$ considere a função

$$h = v - \psi \int v$$

e observe que

$$\varphi(t) = \int_a^t h \in C_c^1[a,\, b].$$

Usando essa função em (24) obtemos

$$\int u\,[v - \psi \int v] = \int v\,[u - \int u\psi] = 0$$

para todo $v \in C_c^0[a, b]$. Logo

$$u = \int u\psi \Rightarrow u = \text{const.} \quad \square$$

Conclusão da Prova da Proposição 2. De (23) usando o lema concluimos que

$$w - u = c \tag{25}$$

onde c é uma constante. Assim fazendo $\tilde{u} = w - c$, que é uma função contínua (pois w é contínua), obtemos $u = \tilde{u}$ q.t.p. $\square$

Observação. Na realidade, podemos reforçar a conclusão da Proposição 2, afirmando que a inclusão $H^1[a, b] \subset C^0[a, b]$ é uma *injeção contínua* considerando-se em H^1 a norma (21) e em $C^0[a, b]$ a norma do máximo:

$$||u||_\infty \leq c\,||u|| \quad \forall\, u \in H^1[a, b] \tag{26}$$

onde $||u||_\infty = \max\{|u(t)| : t \in [a, b]\}$. Provemos (26) retirando informações da demonstração da Proposição 2. Dada $u \in H^1[a, b]$ podemos supor que u é absolutamente contínua em $[a, b]$. Fixando $t_0 \in [a, b]$, podemos utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de Lebesgue e escrever

$$|u(t_0) - u(t)| = \left| \int_{t_0}^t u'(s)ds \right| \quad \forall\, t \in [a, b]$$

e estimar, usando Cauchy-Schwarz:

$$|u(t_0) - u(t)| \leq \left[\int_{t_0}^t |u'|^2 \right]^{1/2} |t - t_0|^{1/2} \tag{27}$$

e daí

$$|u(t_0) - u(t)| \leq (b - a)^{1/2} \left(\int |u'|^2 \right)^{1/2}.$$

Consequentemente, pela desigualdade do triângulo obtemos:

$$|u(t_0)| \leq |u(t)| + (b - a)^{1/2} \left(\int |u'|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall\, t \in [a, b]. \tag{28}$$

Integrando (28), e usando a desigualdade de Cauchy–Schwarz mais uma vez, segue–se que

$$(b-a)|u(t_0)| \leq (b-a)^{1/2}\Big(\int u^2\Big)^{1/2} + (b-a)^{3/2}\Big(\int |u'|^2\Big)^{1/2}$$

e daí

$$(29) \qquad |u(t_0)| \leq c\,||u||$$

onde a constante c pode ser tomada como o máximo dos dois valores $(b-a)^{-1/2}$ e $(b-a)^{1/2}$. Como t_0 é arbitrário em (29), essa desigualdade implica (26). Uma outra demonstração de (26) pode ser vista em [2; p. 129]. A desigualdade (27) nos dá mais informação ainda sobre a injeção $H^1[a,\, b] \hookrightarrow C^0[a,\, b]$. De fato, se A é subconjunto limitado de $H^1[a,\, b]$, então (27) nos diz que as funções $u \in A$ são equicontínuas:

$$|u(t_0) - u(t)| \leq ||u||,\ |t - t_0|^{1/2} \leq k|\,t - t_0|^{1/2}$$

para quaisquer $t,\, t_0 \in [a,\, b]$ e onde $k = \max\{||u|| : u \in A\}$. Logo, pelo Teorema de Arzellà–Ascoli o conjunto A, olhado como subconjunto de $C^0[a,\, b]$, é relativamente compacto. Dizemos, então, que a *injeção* $H^1[a,\, b] \hookrightarrow C^0[a,\, b]$ é *compacta*.

Agora introduzimos o espaço $H_0^1[a,\, b]$ como um subespaço de $H^1[a,\, b]$ do seguinte modo. Seja $\ell_a : H^1[a,\, b] \to I\!R$ o funcional linear definido por

$$\ell_a(u) = u(a),$$

o qual é contínuo pois temos a limitação

$$|\ell_a(u)| = |u(a)| \leq ||u||_\infty \leq c\,||u||$$

onde utilizamos a desigualdade (26). De modo semelhante, temos $\ell_b \cdot$ $H_0^1[a,\, b]$ é definido como $\ell_a^{-1}(0) \cap \ell_b^{-1}(0)$, ou seja

$$H_0^1[a,\, b] = \{u \in H^1[a,\, b] : u(a) = u(b) = 0\}.$$

Daí se segue que $H_0^1[a,\, b]$ é um subespaço fechado e consequentemente um espaço de Hilbert com a norma (21).

A proposição seguinte é um resultado cuja demonstração utiliza os núcleos de Dirac [conhecidos também como regularizadores ou mollifiers], cf. [2; p. 127].

Proposição 3. *Dado $u \in H^1[a, b]$, existe uma sequência de função $\varphi_n \in C_c^1(\mathbb{R})$, tais que $\varphi_n|_{[a,b]} \to u$ na norma (21). Se $u \in H_0^1[a, b]$, então as φ_n podem ser tomadas em $C_c^1[a, b]$.*

A Proposição 3 permite estender a desigualdade de Wirtinger para todas as funções de $H_0^1[a, b]$. E daí se segue que, em $H_0^1[a, b]$, a norma (21) é equivalente à norma

$$||u||_{H^1} = \left(\int |u'|^2\right)^{1/2}, \quad \forall\, u \in H_0^1[a, b]$$

cujo produto interno correspondente é

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int u'v'.$$

Segundo Exemplo

5. Um Problema de Contorno Não Linear. Considere o seguinte problema:

$$(30) \qquad Lu = f(t, u) \ \text{ em } \ [a, b], \quad u(a) = u(b) = 0,$$

onde L é o operador definido na Seção 1 e $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, isto é, existe uma constante $k > 0$, tal que

$$(31) \qquad |f(t, s)| \leq k, \quad \forall\, t \in [a, b], \quad \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

A exemplo do que fizemos na Seção 1, vamos determinar inicialmente uma solução fraca do problema (30), isto é, $u_0 \in H_0^1[a, b]$ tal que

$$(32) \qquad \int p u_0' v' + \int q u_0 v = \int f(t, u_0) v, \quad \forall\, v \in H_0^1[a, b].$$

O funcional associado ao problema (30) é

$$(33) \qquad \Phi(u) = \frac{1}{2} \int p|u'|^2 + \frac{1}{2} \int q u^2 - \int F(t, u)$$

onde $F(t,u) = \int_0^u f(t,s)ds$. Segue-se de (31) que existem constantes positivas k_1 e k_2 tais que

(34) $$|F(t,u)| \le k_1|u| + k_2, \quad \forall\, u \in I\!R, \quad \forall\, t \in [a,\, b].$$

Observe que Φ está bem definido em $H_0^1[a,\, b]$: a parte quadrática é a mesma do funcional da Seção 1, e o terceiro termo é uma função integrável em vista de (34) [o que também pode ser visto lembrando que $u \in H_0^1[a,\, b]$ é necessariamente contínua, e portanto $F(t, u(t))$ é contínua em $[a,\, b]$].

Para demonstrar a continuidade de Φ em $H_0^1[a,\, b]$, como já provamos a continuidade da parte quadrática, resta provar a continuidade do terceiro termo. Esta, porém, se segue, como na observação entre colchetes acima, da continuidade da injeção $H_0^1[a,\, b] \hookrightarrow C^0[a,\, b]$. Além disso, Φ é de classe C^1 com derivada

$$\langle \Phi'(u), v\rangle_{H^1} = \int pu'v' + \int quv - \int f(t,u)v$$

para todo $v \in H_0^1[a,\, b]$. Consequentemente, os pontos críticos de Φ em $H_0^1[a,\, b]$ são precisamente as soluções fracas de (30), ou seja, as soluções de (32).

Inicialmente, vejamos que o funcional Φ é limitado inferiormente. Exatamente como no caso linear, usamos (3), (34) e a desigualdade de Cauchy–Schwarz para estimar

$$\Phi(u) \ge \frac{1}{2}\int |u'|^2 - k_1\left(\int u^2\right)^{1/2}(b-a)^{1/2} - k_2$$

e daí, usando a desigualdade de Wirtinger:

$$\Phi(u) \ge \frac{1}{2}\int |u'|^2 - k_1\left(\frac{b-a}{c}\right)^{1/2}\left(\int |u'|^2\right)^{1/2} - k_2,$$

o que mostra que Φ é limitada inferiormente. E, além disso, para $R > 0$ suficientemente grande

$$\operatorname{Inf}\Phi = \operatorname{Inf}\{\Phi(u) : ||u||_{H^1} \le R\}.$$

Para a aplicação do Teorema A, resta provar que Φ é semicontínua inferiormente na topologia fraca de $H_0^1[a,\, b]$. Mas, isso se segue facilmente de que já sabemos que a parte quadrática é semicontínua inferiormente na topologia fraca e do seguinte argumento para o terceiro termo do funcional. Se u_n converge fracamente em $H_0^1[a,\, b]$ para u então, da compacidade da injeção $H_0^1[a,\, b] \hookrightarrow C^0[a,\, b]$ se segue que existe uma subsequência (u_{n_j}) de (u_n) que converge em $C^0[a,\, b]$ para u. Logo, $F(t, u_{n_j}(t))$ converge em $C^0[a,\, b]$ para $F(t, u(t))$. Logo

$$\int F(t, u_{n_j}) \to \int F(t, u). \tag{35}$$

Daí, concluimos que

$$\int F(t, u_n) \to \int F(t, u) \tag{36}$$

completando a demonstração da que Φ é semicontínuia inferiormente na topologia fraca de $H_0^1[a,\, b]$. [A passagem de (35) para (36) utiliza o seguinte resultado: uma seguência de reais converge para um real α se e só se toda subsequência da sequência original possui uma subsequência que converge para α].

Podemos, pois, aplicar o Teorema A e concluir a existência de $u_0 \in H_0^1[a,\, b]$ que minimiza Φ. Como no caso linear, R pode ser tomado, de partida, suficientemente grande de modo que o mínimo u_0 obtido seja tal que $||u_0||_{H^1} < R$. E daí concluimos que u_0 é um ponto crítico de Φ. De modo análogo ao caso linear, mostramos que u_0 é de classe C^2. Exemplos de equações do tipo (30):

$$-u'' = e^{-u^2}$$
$$-u'' = f(t) \cos u$$

para as quais não é trivial a existência de uma solução se anulando nas extremidades do intervalo $[a,\, b]$!

Terceiro Exemplo

6. Um Problema Superlinear. Considere o problema de contorno

$$-\, u'' = u^2 \qquad u(a) = u(b) = 0. \tag{37}$$

Obviamente $u \equiv 0$ é solução de (37). Estamos interessados em obter uma solução $u \not\equiv 0$.

Inicialmente vemos diretamente da equação que se u for uma eventual solução então $u \geq 0$. Isso decorre do Principio do Máximo, cf. [9], [11], que também vale para equações diferenciais parciais de 2ª ordem do tipo elíptico. No caso presente, podemos concluir que $u \geq 0$ usando argumentos elementares. De fato, integrando a equação obtemos

$$u'(t) = u'(a) - \int_a^t u^2(s)ds, \quad \forall\, t \in [a,\, b],$$

o que mostra que a derivada de u é decrescente. Se o leitor preferir ele pode olhar a equação em (37) e ver que u é uma função côncava, e daí o resultado. Além disso, se $u(t_0) = 0$ para algum $t_0 \in (a, b)$ então $u \equiv 0$, em virtude do teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias. Consequentemente, as eventuais soluções de (37) são tais que

$$u(t) > 0 \quad \forall\, t \in (a, b).$$

Seguindo o esquema dos dois exemplos anteriores, vamos inicialmente procurar uma solução fraca de (37). Para tal, consideremos o funcional Φ em $H_0^1[a,\, b]$ definido por:

$$\Phi(v) = \frac{1}{2}\int |v'|^2 - \frac{1}{3}\int v^3, \quad v \in H_0^1[a,\, b]. \tag{38}$$

É fácil ver que Φ é de classe C^1 e

$$\langle \Phi'(u), v \rangle_{H^1} = \int u'v' - \int u^2 v, \quad \forall\, u,\, v \in H_0^1[a,\, b]. \tag{39}$$

Assim os pontos críticos de Φ são as soluções fracas de (37). Agora observe que Φ não é limitado nem superior nem inferiormente em $H_0^1[a,\, b]$. De fato, para simplificar notação façamos $a = 0$, $b = \pi$ e tome $u_n = \operatorname{sen} nt$

$$\Phi(u_n) \geq \frac{n^2}{2}\int_0^\pi \cos^2 nt - \frac{1}{3}\pi = \frac{n^2\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \to +\infty. \tag{40}$$

Por outro lado tome $u_n = n\,u$, onde $0 < u \in H_0^1[a, b]$

$$\Phi(u_n) = \frac{n^2}{2} \int |u'|^2 - \frac{n^3}{3} \int u^3 \to -\infty. \tag{41}$$

Segue–se de (41) que não há esperanças de se obter um ponto crítico $u \neq 0$ usando o Teorema A. A salvação será tentar obter algum ponto crítico do tipo sela. Para tal devemos entender melhor o jeitão do funcional. Por exemplo que tipo de ponto crítico é o 0? Vamos ver que se trata de um *mínimo local*. De fato, o mesmo argumento (Teorema Fundamental do Cálculo) usado para demonstrar a desigualdade de Wirtinger, prova, para $1 < p < \infty$, que existe uma constante c_p tal que

$$\left(\int |v|^p\right)^{1/p} \leq c_p\left(\int |v'|^2\right)^{1/2} \quad \forall\, v \in H_0^1[a, b]. \tag{42}$$

Se o leitor preferir (42) se segue de (26) e da desigualdade de Wirtinger. Portanto, podemos estimar

$$\Phi(v) \geq \frac{1}{2} \int |v'|^2 - \frac{c}{3}\left(\int |v'|^2\right)^{3/2}$$

onde $c = c_3^3$, isto é,

$$\Phi(v) \geq \frac{1}{2}\,||v||_{H^1}^2 - \frac{c}{3}\,||v||_{H^1}^3, \quad \text{para} \quad v \in H_0^1.$$

Logo

$$\Phi(v) > 0 \quad \text{para} \quad 0 < ||v||_{H^1} < r$$

onde $r = 3/(2c)$; o que mostra que 0 é, em verdade, um mínimo local. A desigualdade (41) nos induz a pensar que deva haver um outro ponto crítico. Para tal utilizamos o Teorema C, o conhecido Teorema de Passo Montanha, que enunciamos e comentamos na seção seguinte. Olhando as hipóteses do Teorema C, vemos que nos resta verificar que o funcional (38) satisfaz à condição de Palais–Smale. Seja pois $(u_n) \subset H_0^1[a, b]$ tal que

$$|\Phi(u_n)| = |\frac{1}{2} \int |u_n'|^2 - \frac{1}{3} \int u_n^3| \leq c \tag{43}$$

e

$$(44) \qquad |\langle \Phi'(u_n), v\rangle_{H^1}| = |\int u_n' v' - \int u_n^2 v| \leq \varepsilon_n ||v||_{H^1}$$

onde $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$, e (44) vale para toda $v \in H_0^1[a, b]$. Tome $v = u_n$ em (44) e de (43) e (44) obtemos

$$\frac{1}{6} \int |u_n'|^2 \leq c(1 + ||u_n||_{H^1})$$

o que mostra que $||u_n||_{H^1} \leq$ const. Tome uma subsequência (representada ainda por u_n) tal que u_n converge fracamente para u em $H_0^1[a, b]$ (isso é possível em vista da reflexividade do espaço de Hilbert) e tal que $u_n \to u$ em $C^0[a, b]$ (isso vem da injeção compacta de $H_0^1[a, b]$ em $C^0[a, b]$. Tome em (44) $v = u_n - u$ para obter

$$(45) \qquad |\int u_n'(u_n' - u') - \int u_n^3(u_n - u)| \leq \varepsilon_n ||u_n - u||_{H^1}.$$

A segunda integral em (45) converge a 0 e o lado direito de (45) também converge a zero pois $||u_n - u||_{H^1} \leq$ const. Logo

$$(46) \qquad \lim \int u_n'(u_n' - u') = 0.$$

Por outro lado, da convergência fraca de u_n para u em $H_0^1[a, b]$ obtemos

$$(47) \qquad \lim \int u'(u_n' - u') = 0.$$

Finalmente, de (46) e (47) obtemos

$$\lim \int |u_n' - u'|^2 = 0$$

ou seja, u_n converge para u na norma de $H_0^1[a, b]$. Isso prova a condição de Palais–Smale, e o Teorema C nos fornece um ponto crítico não trivial $u_0 \in H_0^1[a, b]$. Como nos dois exemplos anteriores se segue que u_0 é de classe C^2.

7. O Teorema do Passo da Montanha. Seja E um espaço de Hilbert e $\Phi : E \to R$ um funcional de classe C^1. Dizemos que Φ

satisfaz à *condição de Palais–Smale* se toda sequência $(u_n) \subset E$ tal que

(48) $$|\Phi(u_n)| \leq \text{const} \quad \text{e} \quad \nabla\Phi(u_n) \to 0$$

possue uma subsequência convergente na norma de E. A segunda condição em (48) diz que a sequência $(\nabla\Phi(u_n)) \subset E$ converge para 0 na norma de E. Isso é equivalente a dizer

(49) $$|\langle \nabla\Phi(u_n), v\rangle_E| \leq \varepsilon_n ||v||_E \quad \forall\, v \in E$$

com $\varepsilon_n \to 0$, onde $\langle\ ,\ \rangle_E$ designa o produto interno em E. O Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti e Rabinowitz [1] diz:

Teorema C. *Seja $\Phi : E \to I\!R$ um funcional de classe C^1, satisfazendo à condição de Palais–Smale, definido num espaço de Hilbert E. Suponha que existem $r > 0$ $e \in E$, com $||e||_E > r$ tais que*

$$\text{Inf}\,\{\Phi(u) : ||u||_E = r\} > \text{Max}\,\{\Phi(0),\, \Phi(e)\} \equiv d.$$

Seja

$$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1]; E) : \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(1) = e\}$$

e defina

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)).$$

Então, $c \geq d$ e c é um valor crítico de Φ, isto é existe $u_0 \in E$ tal que

$$\Phi'(u_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \Phi(u_0) = c.$$

Nota sobre Bibliografia. Além do artigo acima citado, mencionamos as notas de Rabinowitz [12] e Costa [3], onde outros teoremas variacionais são estudados e aplicados às equações diferenciais. A demonstração do Teorema C usa o Lema de Deformação de Clark. Recentemente, Brézis e Ekeland produziram uma outra demonstração usando o Princípio Variacional de Ekeland. Este princípio e suas variações vêm se constituindo uma poderosa arma no estudo de problemas em Análise, cf. [4]. Para outras aplicações, inclusive o tratamento dos teoremas variacionais de Ambrosetti–Rabinowitz e Rabinowitz via Ekeland, veja [8]. O material básico usado aqui está todo contido no excelente livro [2].

Referências

[1] A. AMBROSETTI and P. H. RABINOWITZ, Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal. 14 (1973), 349–381.

[2] H. BRÉZIS, Analyse Fonctionnelle. Masson, Paris (1983).

[3] D. G. COSTA, Tópicos em Análise Não–Linear e Aplicações às Equações Diferenciais. VIII Escola Latino–Americana de Matemática, Rio (1986).

[4] I. EKELAND, Non convex minimization problems. Bull. A.M.S vol. 1 (1979), 443-474.

[5] D. G. DE FIGUEIREDO, O princípio de Dirichlet. Mat. Univ. Nº 1 (1985), 63-84.

[6] D. G. DE FIGUEIREDO, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. Projeto Euclides, 2ª edição (1988).

[7] D. G. DE FIGUEIREDO, Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems. Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, vol. 957, Springer–Verlag, Berlin (1982), 34-87.

[8] D. G. DE FIGUEIREDO, Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours. Campinas (1987).

[9] D. GILBARG and N. S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer–Verlag, Berlin,Heidelberg (1983).

[10] E. HEWITT and K. STROMBERG, Real and Abstract Analysis, Springer–Verlag (1965).

[11] M. H. PROTTER and H. F. WEINBERGER, Maximum Principles in Differential Equations. Springer–Verlag New York (1984).

[12] P. H. RABINOWITZ, Some aspects of critical point theory. MRC Technical Report # 2465 (1983).

[13] H. L. ROYDEN, Real Analysis. MacMillan Publishing Co., Inc. (1968).

[14] K. YOSIDA, Functional Analysis, Springer–Verlag, New York (1974).