Matemática Universitária N. 7, Junho de 1988, 49 - 54.

Sobre a Existência de Coberturas Simples

Elon Lages Lima
Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq
Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico
22.460 - Rio de Janeiro, RJ

Em várias situações, quando se estuda a topologia de uma variedade diferenciável M, é necessário considerar uma cobertura de M por abertos contráteis, tais que a interseção de um número finito qualquer deles é ainda contrátil. Em sua conhecida demonstração do Teorema de De Rham, André Weil [1] chamou *simples* as coberturas que têm esta propriedade. Seguiremos sua terminologia.

Para provar que em toda variedade diferenciável existem coberturas simples arbitrariamente finas, o argumento comumente usado se beseia na Geometria Riemanniana, cobrindo a variedade com vizinhanças V "geodesicamente convexas", isto é, tais que dois pontos quaisquer de V podem ser ligados por uma única geodésica minimizante, contida em V. (Ver, por exemplo, [2], pp. 50-71.)

Embora seja razoável esperar que a familiaridade com os fatos básicos da Geometria Riemanniana faça parte da cultura de um matemático, parece conveniente, num curso, seminário ou livro texto de Topologia, demonstrar a existência de coberturas simples com argumentos topológicos elementares, complementados, naturalmente, pelos elementos de Análise, já que se tem como ambiente uma variedade diferenciável.

Weil [1] deu uma demonstração desse tipo. Aqui apresentaremos outra, que nos parece mais simples. Ela faz uso da vizinhança tubular de uma superfície no espaço euclidiano. O argumento crucial apela para o teorema abaixo, que ocorre como exercício no volume 2 de nosso "Curso de Análise". (Veja [3], p. 342.)

Teorema 1. *Seja $f : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^2 entre abertos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Para todo ponto $a \in U$ existe um número real $r > 0$ tal que a imagem $f(B)$ de qualquer bola B de centro a e raio $\leq r$ é um conjunto convexo.*

Lembremos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se diz *convexo* quando, para quaisquer dois pontos $a, b \in X$, o *segmento de reta* $[a, b] = \{(1-t)a + tb;\ 0 \leq t \leq 1\}$ está contido em X.

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$, com valores reais, diz-se *convexa* quando, para quaisquer $a, b \in X$ e $t \in [0, 1]$, tem-se

$$\varphi((1-t)a + tb) \leq (1-t)\varphi(a) + t\varphi(b).$$

A fim de que uma função $\varphi : U \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável no aberto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$, seja convexa é necessário e suficiente que sua *matriz hessiana*

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)$$

seja não-negativa em todos os pontos $x \in U$.

Isto significa que, para cada $x \in U$ e cada $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\varphi''(x) \cdot u^2 \cdot \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x)\alpha_i \alpha_j \geq 0.$$

O número $\varphi''(x) \cdot u^2$, definido pelo somatório acima, chama-se o valor da *derivada segunda* $\varphi''(x)$ no vetor $u \in \mathbb{R}^n$.

Esta caracterização das funções convexas resulta simplesmente da obseravação de que $\varphi : U \to \mathbb{R}$ é convexa se, e somente se, sua restrição a todo segmento de reta contido em U é uma função convexa real de uma variável real. Ora, para funções φ de uma variável real, sabe-se do primeiro curso de Cálculo que $\varphi'' \geq 0$ é condição necessária e suficiente para convexidade se φ é duas vezes derivável.

Depois destes preliminares, passemos à

Demonstração: Sejam $g = f^{-1} : V \to U$ e $b = f(a)$. Consideremos a função $\varphi : V \to \mathbb{R}$, de classe C^2, definida por

$$\varphi(y) = |g(y) - g(b)|^2 = \langle g(y) - g(b), g(y) - g(b)\rangle.$$

Suas derivadas parciais são:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(y) = 2\,\langle \frac{\partial g}{\partial y_i}(y),\ g(y) - g(b)\rangle.$$

As derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j}(y) = 2\,\langle \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}, g(y) - g(b)\rangle + \\ +2\,\langle \frac{\partial g}{\partial y_i}(y),\ \frac{\partial g}{\partial y_j}(y)\rangle.$$

No ponto $y = b$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j}(b) = 2\,\langle \frac{\partial g}{\partial y_i}(b),\ \frac{\partial g}{\partial y_j}(b)\rangle.$$

Dado $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$, seja $w = \sum_i \alpha_i \frac{\partial g}{\partial y_i}(b)$. Como g é um difeomorfismo, os vetores $\frac{\partial g}{\partial y_i}(b)$ são linearmente independentes, logo $w \neq 0$. Segue-se que

$$\varphi''(b) \cdot u^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j}(b)\alpha_i\alpha_j = 2\,\langle w,\, w\rangle = 2|w|^2 > 0,$$

para todo $u \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$. Como φ é de classe C^2, existe uma bola B', de centro b, tal que $\varphi''(y) \cdot u^2 > 0$ para todo $y \in B'$ e todo $u \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$. Portanto φ é uma função convexa na bola B'.

Afirmamos agora que, se $B = B(a; r)$ é qualquer bola aberta de centro a, tal que $f(B) \subset B'$, então o conjunto $f(B)$ é convexo.

Com efeito, dados $y_1, y_2 \in f(B)$ e $t \in [0, 1]$, para provar que $(1-t)y_1 + ty_2 \in f(B)$, basta mostrar que o ponto $g((1-t)y_1 + ty_2)$

pertence a B, isto é, que sua distância ao ponto a é $< r$. Ora, a convexidade da função φ nos dá:

$$\begin{aligned} |g((1-t)y_1 + ty_2) - g(b)|^2 &\leq (1-t)|g(y_1) - g(b)|^2 + t|g(y_1 - g(b)|^2 \\ &< (1-t)r^2 + tr^2 = r^2 \end{aligned}$$

portanto $g((1-t)y_1 + ty_2) \in B$, ou seja, $(1-t)y_1 + ty_2 \in f(B)$.

Passaremos agora ao nosso resultado principal, que é o

Teorema 2. *Em toda variedade diferenciável existem coberturas simples arbitrariamente finas.*

A fim de provar o Teorema 2, sem perda de generalidade, podemos supor que nossa variedade é uma superfície m-dimensional M de classe C^∞ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{m+k}$.

Para cada ponto $p \in M$, indicamos com T_pM o espaço vetorial tangente a M no ponto p e com $T_pM^\perp$ seu complemento ortogonal em $\mathbb{R}^{m+k}$. Os vetores $v \in T_pM^\perp$ chamam-se *normais* a M no ponto p.

Sejam V uma vizinhança tubular de M e $r : V \to M$ a retração correspondente. $V \supset M$ é um aberto em $\mathbb{R}^{m+k}$, reunião de segmentos de reta abertos do tipo $(p - v,\ p + v)$, centrados nos pontos $p \in M$, tais que v é um vetor normal a M no ponto p. Esses *segmentos normais* são tomados de modo que $(p - v,\ p + v)$ e $(q - w,\ q + w)$ sejam disjuntos quando $p \neq q$. Portanto, todo ponto $y \in V$ pertence a um único segmento normal $(p - v,\ p + v)$. A retração $r : V \to M$ é definida então por $r(y) = p$.

A existência da vizinhança tubular V e a prova de que a retração $r : V \to M$ é de classe C^∞ são estabelecidas em [4] quando $k = 1$ mas o caso geral se prova da mesma maneira.

Dado um ponto arbitrário $p \in M$, seja $\varphi : U_0 \to U$ uma parametrização C^∞ de uma vizinhança $U \ni p$ em M. A aplicação φ é definida num aberto $U_0 \subset \mathbb{R}^m$, com $\varphi(x_0) = p$.

Tomando U_0 suficientemente pequeno, podemos obter k campos de vetores de classe C^∞ $v_1, \ldots, v_k : U \to \mathbb{R}^{m+k}$, tais que, para cada $x \in U_0$, $\{v_1(\varphi(x)), \ldots, v_k(\varphi(x))\}$ é uma base ortonormal de $T_{\varphi(x)}M^\perp$.

Isto nos permite definir a aplicação

$$\Phi : U_0 \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k},$$

$$\Phi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i(\varphi(x)).$$

Vê-se facilmente que a derivada $\Phi'(x_0, 0) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, Φ é um difeomorfismo numa vizinhaça de $(x_0, 0)$. Usando o Teorema 1, obtemos uma bola B_p de centro $(x_0, 0)$ em $U_0 \times \mathbb{R}^k$, tal que $\Phi(B_p)$ é uma vizinhança aberta convexa do ponto p em $\mathbb{R}^{m+k}$.

A projeção $\pi : U_0 \times \mathbb{R}^k \to U_0 \times 0$, definida por $\pi(x, z) = (x, 0)$, transforma a bola B_p num seu subconjunto: $\pi(B_p) \subset B_p$. Como a retração $r : V \to M$, restrita a $\Phi(B_p)$, é dada por $r = \Phi \circ \pi \circ \Phi^{-1}$, segue-se que $r\Phi(B_p) \subset \Phi(B_p)$. Mais precisamente, se escrevermos $A_p = \Phi(B_p) \cap M$, os conjuntos A_p, $p \in M$, constituirão uma cobertura aberta de M tal que $r(B_p) \subset A_p$ para todo $p \in M$.

Desta obseravação, resulta que os abertos $A_p \subset M$ são r-convexos no seguinte sentido.

Diremos que um subconjunto $X \subset M$ é *r-convexo* quando, para quaisquer $a, b \in X$, o segmento de reta $[a, b]$ estiver contido na vizinhança tubular V e, além disso, sua imagem $r([a, b])$ pela retração $r : V \to M$ estiver contida em X.

Evidentemente, a interseção de uma família qualquer de subconjuntos r-convexos de uma superfície $M \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é ainda um conjunto r-convexo. Também é claro que todo subconjunto r-convexo $X \subset M$ é contrátil: basta fixar um ponto $a \in X$ e definir a homotopia $H : X \times [0, 1] \to X$ pondo $H(x, t) = r((1 - t)x + ta)$, $x \in X$, $t \in [0, 1]$. (Note que H é diferenciável.)

Concluímos portanto que os conjuntos A_p, $p \in M$, acima construídos, constituem uma cobertura simples de M.

Referências

[1] ANDRÉ WEIL, Sur les théorèmes de Rham, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 26 (1952), 119-145.

[2] MANFREDO P. DO CARMO, Geometria Riemanniana, IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.

[3] ELON LAGES LIMA, Curso de Análise, vol. 2, ($2^{\underline{a}}$ edição) IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1985.

[4] ELON LAGES LIMA, Duas novas demonstrações do Teorema de Jordan–Brouwer no caso diferenciável, Matemática Universitária, Nº 4, (1986), 89-105.