Nota de Ensino
Matemática Universitária N. 7, Junho de 1988, 55 - 66.

Um Problema de Otimização no Desenho de Foguetes*

Geraldo Ávila†
Instituto de Matemática - UNICAMP
13.081 — Campinas, SP

1. Introdução

O objetivo desta nota é o de apresentar um problema interessante sobre desenho de foguetes, para cuja solução são utilizadas técnicas relativamente simples de Cálculo, como integração e determinação do valor mínimo de uma função. Esse material pode, pois, ser apresentado nos próprios cursos de Cálculo, como ilustração de aplicações relevantes da disciplina; ou como complemento do curso, seja para leitura adicional, seja para exposições paralelas e complementares.

O material que vamos apresentar aqui já foi objeto de um Módulo da série do "UMAP Journal" [3]. Nossa exposição, entretanto, se baseia principalmente no capítulo 4 do livro de Burghes e Downs [2], que serviu de referência básica para o módulo [3] e é mais completa que a daquele módulo.

Como é bem sabido, os foguetes utilizados para colocar satélites em órbita são construídos em três estágios: após a queima total do combustível do primeiro estágio, este se desprende do foguete, ao mesmo tempo que o segundo estágio é acionado. Ao

*Este artigo foi publicado inicialmente no "Noticiário da SBM", Ano XIII, N$^{\underline{o}}$ 2, Outubro de 1982 e é aqui reproduzido com pequenas correções.

†Em licença da Universidade de Brasília.

terminar a queima do combustível deste, o terceiro estágio é acionado, e o segundo se desprende do foguete. Finalmente, ao terminar a queima do combustível do terceiro estágio, ele também se desprende, deixando em óbita o satélite ou cápsula espacial.

Mas por que os foguetes são assim construídos? Por que não foguetes de um único estágio? A análise que faremos ao longo desta exposição mostrará não apenas que os foguetes de estágios múltiplos são bem mais eficientes do que os de um único estágio, mas também que estes últimos nem mesmo têm condições de colocar um objeto em órbita.

2. Relação Entre Velocidade Orbital e Altura

Vejamos, em primeiro lugar, qual a relação existente entre a velocidade orbital v de um satélite e sua distância D ao centro da Terra. Sendo G a constante da gravitação, a lei de Newton nos diz que a Terra atrai o satélite com força dada por

$$G\frac{M_T m}{D^2},$$

onde m é a massa do satélite e M_T é a massa da Terra. Então, a aceleração que essa força imprime ao satélite é simplesmente GM_T/D^2. Como o satélite está em órbita (que supomos circular, por simplicidade) de raio D, esta aceleração deve igualar a acelaração centrípeta v^2/D, isto é,

$$\frac{GM_T}{D^2} = \frac{v^2}{D}, \quad \text{donde} \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{D}}.$$

Vamos eliminar o produto GM_T desta última expressão. Para isto basta notar que uma partícula qualquer na superfície da Terra tem aceleração gravitacional dada por GM_T/R_T^2, onde R_T é o raio da Terra; mas, por outro lado, esta é também a aceleração da gravidade g, de sorte que $GM_T = gR_T^2$. Substituindo este valor na expressão de v acima obtemos

$$(1) \qquad v = R_T\sqrt{g/D}.$$

Esta equação nos mostra que a velocidade do satélite deve ser tanto menor quanto maior sua distância D ao centro da Terra. Assim, enquanto a Lua, que está a 384.000 km do centro da Terra, tem velocidade aproximada de 1 km/s, um satélite a apenas 100 km acima do solo deve ter velocidade $v \approx 7,8\ km/s$. O leitor deve notar que estamos falando de velocidade orbital, que é a velocidade tangencial do satélite. Além de imprimir essa velocidade ao satélite, o foguete deve ser bastante potente para chegar até a altura desejada. Quanto maior esta altura, mais potente deve ser o foguete para atingi–la, embora quanto maior a altura, tanto menor a velocidade final necessária para manter o satélite em órbita. Não estamos considerando o problema de atingir determinada altura, mas sim o de imprimir ao satélite a velocidade necessária v para mantê–lo em órbita à distância D do centro da Terra, conforme a eq. 1.

3. Foguetes de um Estágio

Vamos considerar, primeiramente, um foguete de estágio único. Seja M a massa do foguete e $\vec{v}$ sua velocidade relativamente à Terra. Seja $\vec{c}$ a velocidade dos gases expelidos, relativamente ao foguete, de sorte que a velocidade desses gases em relação à Terra é $\vec{v} + \vec{c}$. Como a massa do foguete decresce com o tempo, devido à queima do combustível, a derivada dM/dt é negativa e $-dM/dt$ representa a massa dos gases expelidos na unidade de tempo. Então, a variação do momento linear total (do foguete e dos gases) na unidade de tempo é dada por

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}) + (-\frac{dM}{dt})(\vec{v} + \vec{c}) = M\frac{d\vec{v}}{dt} - c\frac{dM}{dt}.$$

De acordo com a segunda lei de Newton, essa quantidade é igual à força aplicada $\vec{F}$ (força externa ao sistema foguete–gases):

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{c}\frac{dM}{dt} = \vec{F},$$

ou ainda,

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{c}\frac{dM}{dt} + \vec{F}. \qquad (2)$$

Desprezando a força de resitência com o ar, vamos tomar como força externa apenas a atração gravitacional, na forma do produto da massa do foguete pela aceleração da gravidade. (Ao final desta seção faremos um comentário sobre a forma exata desta força.) Então, considerando um eixo vertical com vetor unitário $\vec{\imath}$ dirigido para cima, teremos $\vec{F} = -Mg\vec{\imath}$, $\vec{v} = v\vec{\imath}$, e $\vec{c} = -c\vec{\imath}$, onde v e c são quantidades positivas. Agora a eq. 2 assume a forma

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{M}\frac{dM}{dt} - g. \tag{3}$$

A massa M do foguete consiste de três partes: a massa C da carga últil, a massa M_f do foguete vazio e a massa M_c do combustível. Esta última é a parte variável, $M_c = M_c(t)$, que tem valor inicial $M_c(0)$ e que se anula para um certo valor t_0 do tempo, quando o combustível acaba. Supondo que a queima se processe a uma taxa constante $-k$, teremos

$$\frac{dM_c}{dt} = -k,$$

donde

$$M_c(t) = M_c(0) - kt,$$

de sorte que

$$M = C + M_f + M_c(t) = C + M_f + M_c(0) - kt.$$

Pondo $M_0 = M_f + M_c(0)$, obtemos

$$M = C + M_0 - kt$$

e a eq. 3 passa a ser

$$\frac{dv}{dt} = \frac{kc}{C + M_0 - kt} - g.$$

Basta agora integrar de $t = 0$ a t para obtermos a expressão da velocidade. Designado a velocidade inicial com v_0 (geralmente $v_0 = 0$), teremos

$$\begin{aligned} v - v_0 &= -c\log\frac{C + M_0 - kt}{C + M_0} - gt \\ &= -c\log\left(1 - \frac{kt}{C + M_0}\right) - gt. \end{aligned} \tag{4}$$

Para encontrar $s = s(t)$ — espaço percorrido no tempo t — devemos integrar a função $v = v(t)$ dada em (4). Com $s_0 = s(0) = 0$, teremos

$$s(t) = \int_0^t v(t)dt = v_0 t - \frac{gt^2}{2} - c\int_0^t \log \frac{C + M_0 - kt}{C + M_0} dt.$$

Esta última integral se efetua com uma simples mudança de variáveis, lembrando também que $\int \log\ x\ dx = x\ \log\ x - x$. Obtemos então

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad s(t) &= v_0 t - \frac{gt^2}{2} \\
&+ \frac{c}{k}\left[kt + (C + M_0 - kt)\log \frac{C + M_0 - kt}{C + M_0}\right].
\end{aligned}
$$

Vamos utilizar a eq. 4 para calcular o incremento da velocidade com a queima total do combustível. Isto ocorre quando $t = t_0$ é tal que $M_c(t_0) = M_c(0) - kt_0 = 0$. Então $kt_0 = M_c(0) = M_0 - M_f$ e a eq. 4 nos dá

$$\Delta v = v(t_0) - v_0 = -c \log \frac{C + M_f}{C + M_0} - \frac{g(M_0 - M_f)}{k}.$$

Em termos do *fator estrutural*

$$\sigma = \frac{M_f}{M_0} = \frac{M_f}{M_f + M_c(0)}$$

e da *razão de massas* $\rho = C/M_0$, a expressão anterior assume a forma

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad \Delta v &= -c \log \frac{C + \sigma M_0}{C + M_0} - \frac{gM_0(1 - \sigma)}{k} = -c \log \frac{\rho + \sigma}{\rho + 1} \\
&- \frac{gM_0(1 - \sigma)}{k} = c \log \frac{1 + \rho}{\sigma + \rho} - \frac{gM_0(1 - \sigma)}{k}.
\end{aligned}
$$

Para o mesmo tempo $t = t_0$, a altura máxima $h = s(t_0)$ é obtida da eq. 5. Supondo que o foguete tenha partido do repouso ($v_0 = 0$), e notando que

$$t_0 = \frac{M_c(0)}{k} = \frac{M_0 - M_f}{k} = \frac{M_0(1 - \sigma)}{k},$$

obtemos:

$$(7) \qquad h = -\frac{gM_0^2(1-\sigma)^2}{2k^2} + \frac{c}{k}\left[(1-\sigma)M_0 + (C+\sigma M_0)\log\frac{C+\sigma M_0}{C+M_0}\right].$$

Como era de se esperar, a expressão (6) nos mostra que o incremento da velocidade será tanto maior quanto maior a velocidade c dos gases e quanto menores a razão de massas ρ e o fator estrutural σ. (Como veremos, logo adiante, k é muito grande, de sorte que o último termo em (6), contendo g, é desprezível.) Mas não é possível diminuir σ indefinidamente; em geral, este parâmetro é da ordem de 20%, isto é, o foguete vazio pesa 1/5 do foguete carregado de combustível. O parâmetro ρ pode ser diminuido, mas é claro que quanto mais próximo de zero ele for tanto menos eficiente será o foguete.

Vejamos um exemplo, com certos valores típicos:

$$M_0 = 10^5 kg, \qquad k = 5 \times 10^3 kg/s,$$

$$c = 10\,000 \ km/h, \quad \sigma = 0,2 \quad \text{e} \quad \rho = 0,01.$$

Substituindo estes números em (6) encontramos

$$(8) \qquad \Delta v \approx 4,363 - 0,157 = 4,206 \ km/s,$$

onde $0,157$ é a contribuição proveniente do termo em g. Como se vê, essa contribuição é desprezível diante do outro termo, $4,363$.

Com os mesmo valores numéricos acima, a equação (7) nos dá:

$$(9) \qquad h \approx -1,254 + 26,121 \approx 24,867,$$

onde $-1,254$ é a contribuição proveniente do primeiro termo em (7). Novamente aqui vemos que esta contribuição, devida a g, é desprezível face ao outro termo.

É claro, pelos valores obtidos em (8) e (9), que o foguete que estamos considerando não tem condições de colocar um objeto em órbita, pois ele mal alcança 25 km de altura, longe de sair da atmosfera terrestre. E mesmo que fosse possível colocar um satélite em órbita nessa altura, o raio dessa órbita seria

$D = 25 + 6400 = 6425\ km$. Levando este valor em (1) obtemos a velocidade orbital $v \approx 7,9\ km/s$, quase o dobro do valor alcançado pelo foguete (cf. eq. 8).

Observação sobre a força gravitacional. Antes de passarmos à análise dos foguetes de estágios múltiplos, observamos que a força de atração gravitacional foi tomada na forma constante Mg. Isto só é possível no pressuposto de que a altura do foguete seja pequena em comparação com o raio da Terra. Para grandes alturas seria necessário substituir essa expressão Mg pela forma correta da lei de Newton,

$$\frac{GMM_T}{x(t)^2},$$

onde $x(t)$ representa a distância do foguete ao centro da Terra. Isto tem o incoveniente de trazer grandes complicações ao problema, pois a eq. 3 seria substituida por uma equação diferencial muito complicada em $x(t)$.

Na verdade, o efeito da gravidade é bastante pequeno, como já tivemos oportunidade de ver, numéricamente, em (8) e (9). E a razão disto é que a queima do combustível se processa muito rapidamente, fazendo com que o *empuxo*

$$-c\frac{dM}{dt}$$

seja realmente muito maior que o peso Mg. isto permite desprezar g no segundo membro da eq. 3. Assim, no exemplo concreto considerado acima, $k = 10^3 kg/s$, vale dizer, o foguete queima uma tonelada de combustível por segundo, o que permite gerar um enorme empuxo, comparado ao peso do foguete. Face a essas observações, daqui por diante desprezaremos a atração gravitacional, o que equivale a tomar $g = 0$.

4. Os Foguetes de Estágios Múltiplos

Consideremos agora um foguete de n estágios. Seja M_i a massa do i-ésimo estágio carregado de combustível. Para simplificar, suporemos que a velocidade dos gases da combustão seja a mesma para todos os estágios, a qual designaremos por c. Suporemos também que cada estágio tenha o mesmo fator estrutural σ, de sorte que σM_i é a massa do i-ésimo estágio vazio.

Vamos adaptar a fórmula (6) para calcular o incremento Δv_i da velocidade do foguete durante a ativação do i-ésimo estágio. Quando isto acontece, é como se estivessemos lidando com um foguete de estágio único, massa M_i (que substitui M_0 em (6)) e carga útil de massa $M_{i+1} + \cdots + M_n + C$ (que substitui C em (6)). Então, de acordo com a primeira expressão em (6),

$$\Delta v_i = -c \log \frac{(M_{i+1} + \cdots + M_n + C) + \sigma M_i}{(M_{i+1} + \cdots + M_n + C) + M_i},$$

ou ainda,

$$\Delta v_i = c \log \frac{M_i + M_{i+1} + \cdots + M_n + C}{\sigma M_i + M_{i+1} + \cdots + M_n + C}.$$

O problema que nos interessa resolver é o de encontrar a melhor distribuição de massas pelos vários estágios do foguete para se atingir uma dada velocidade final V, dada por

$$(10) \quad V = \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = c \sum_{i=1}^{n} \log \frac{M_i + M_{i+1} + \cdots + M_n + C}{\sigma M_i + M_{i+1} + \cdots + M_n + C}.$$

Isto significa encontrar os valores $M_1, \ldots, M_n$ que minimizem a soma

$$(11) \qquad M_0 = M_1 + \cdots + M_n,$$

ao mesmo tempo que a eq. 10 fique satisfeita. A questão assim posta é um problema de máximos e mínimos condicionados, que pode ser resolvido pelo chamado "método dos multiplicadores de Langrange", estudado nos cursos de Cálculo de várias variáveis (veja, p. ex., [1], Seção 3.4, p. 97) e que se resume na seguinte regra: *para achar os valores que minimizam uma função* $f(x_1, \ldots, x_n)$, *sujeitos à condição* $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, *formamos a função*

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda g(x_1, \ldots, x_n)$$

e resolvemos as $n+1$ *equações em* $n+1$ *incógnitas* $x_1, \ldots x_n, \lambda$ *que se obtém igualando a zero as* $n+1$ *derivadas parciais de* F, *isto é,*

$$(12) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda\,\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -g = 0.$$

A aplicação desta regra diretamente ao problema de minimizar (11) com a condição (10) é um problema muito complicado. Para simplificá-lo introduzimos as novas variáveis independentes

$$(13) \qquad x_i = \frac{M_i + M_{i+1} + \ldots + M_n + C}{\sigma M_i + M_{i+1} + \ldots + M_n + C}, \qquad i = 1, \cdots n.$$

Assim a condição (10) passa a ser

$$(14) \qquad g(x_1, \ldots, x_n) = V - c\sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0.$$

Ao mesmo tempo notamos que

$$\frac{M_i + \cdots + M_n + C}{M_{i+1} + \cdots + M_n + C} =$$
$$\frac{(1-\sigma)(M_i + \cdots + M_n + C)}{\sigma M_i + (1-\sigma)M_{i+1} + \cdots + (1-\sigma)M_n + (1-\sigma)C - \sigma M_i}$$
$$= \frac{(1-\sigma)(M_i + \cdots + M_n + C)}{\sigma M_i + M_{i+1} + \cdots + M_n + C - \sigma(M_i + \cdots + M_n + C)}$$
$$= \frac{(1-\sigma)x_i}{1-\sigma x_i}.$$

Então,

$$\frac{M_0 + C}{C} = \frac{M_1 + \cdots + M_n + C}{M_2 + \cdots + M_n + C} \cdot \frac{M_2 + \cdots + M_n + C}{M_3 + \cdots + M_n + C} \cdots$$
$$\cdots \frac{M_{n-1} + M_n + C}{M_n + C} \cdot \frac{M_n + C}{C}$$
$$= \frac{(1-\sigma)x_1}{1-\sigma x_1} \cdot \frac{(1-\sigma)x_2}{1-\sigma x_2} \cdots \frac{(1-\sigma)x_n}{1-\sigma x_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(1-\sigma)x_i}{1-\sigma x_i},$$

donde obtemos

$$(15) \qquad f(x_1, \ldots, x_n) = \log\frac{M_0 + C}{C} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\Big[\log x_i + \log(1-\sigma) - \log(1-\sigma x_i)\Big].$$

Observamos agora que minizar M_0 equivale a minimizar $(M_0 + C)/C$, que por sua vez equivale a minimizar a função f dada acima. Portanto, nosso problema agora é o de minimizar (15) com a condição (14). Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, obtemos o seguinte sistema de equações, o equivalente do sistema (12):

$$\frac{1+\lambda c}{x_i} + \frac{\sigma}{1-\sigma x_i} = 0, \quad i = 1 \cdots, n.$$

Resolvendo em relação a x_i, encontramos o mesmo valor para essas variáveis:

$$x_i = \frac{\lambda c + 1}{\lambda \sigma c}. \tag{16}$$

Levando (16) em (14) obtemos

$$V = nc \log x_i = nc \log \frac{\lambda c + 1}{\lambda \sigma c}.$$

Daqui segue-se que

$$x_i = e^{V/nc}, \tag{17}$$

valor este que levado em (16) nos dá

$$\lambda = \frac{1}{c}(\sigma e^{V/nc} - 1)^{-1}.$$

Substituindo (17) em (15) encontramos

$$\log \frac{M_0 + C}{C} = \frac{V}{c} + \log\left(\frac{1-\sigma}{1-\sigma e^{V/nc}}\right)^n;$$

portanto,

$$\frac{M_0 + C}{C} = e^{V/c}\left(\frac{1-\sigma}{1-\sigma e^{V/nc}}\right)^n,$$

ou ainda,

$$M_0 = \left[e^{V/c}\left(\frac{1-\sigma}{1-\sigma e^{V/nc}}\right)^n - 1\right]C. \tag{18}$$

Vejamos agora o que nos diz este resultado numa situação concreta. Suponhamos que nosso foguete, partindo do repouso, deva atingir a velocidade final $V = 7,8\ km/s = 28\ 080\ km/h$. Como vimos na Seção 2, esta é a velocidade orbital de um satélite a 100 km acima do solo. Tomando, como antes, $\sigma = 0,2$ e $c = 10\ 000\ km/h$, obtemos os seguintes valores:

1. $n = 1$, $M_0 \approx -6,57C$ (este valor negativo mostra a impossibilidade de se atingir a velocidade desejada com um foguete de um estágio);

2. $n = 2$, $M_0 \approx 306C$;

3. $n = 3$, $M_0 \approx 71C$;

4. $n = 4$, $M_0 \approx 53C$;

5. $n = 5$, $M_0 \approx 46C$;

6. $n \to \infty$, $M_0 \to 32,4C$.

Este último resultado é obtido calculando, primeiro, o limite de (18) com $n \to \infty$. Para isto, notamos que

$$\left(\frac{1-\sigma}{1-\sigma e^{V/nc}}\right)^n = \exp\left[n\log(1-\sigma) - n\log(1-\sigma e^{V/nc}\right]$$

e que o limite da expressão em colchetes pode ser calculada pela regra de ℓ'Hôpital: quando $n \to \infty$ o limite dessa expressão é o mesmo que o limite de

$$\frac{\log(1-\sigma) - \log(1-\sigma e^{V/nc})}{1/n},$$

o qual, por sua vez, é igual ao limite do quociente das derivadas

$$\frac{\sigma(V/c)e^{V/nc}}{1-\sigma e^{V/nc}}$$

que é $\sigma V/c(1-\sigma)$. Então o limite de M_0 em (18) é

$$(e^{V/c+\sigma V/c(1-\sigma)} - 1)C = (e^{V/c(1-\sigma)} - 1)C.$$

Substituindo os valores numéricos nesta expressão obtemos, aproximadamente, $32,4C$.

Os resultados obtidos mostram que, enquanto a massa de um foguete de dois estágios é cerca de 306 vezes a massa da carga útil, já um foguete de três estágios deve ter massa de $71C$, e isto representa um decréscimo substancial da massa do foguete. Já a passagem de três para quatro estágios implica um decréscimo muito menor, de $71C$ para $53C$, o que não é compensador, diante dos enormes custos e complicações acarretados pelo maior número de estágios. Isto explica por que os foguetes espaciais têm três estágios, não menos nem mais!

Finalmente, vamos calcular as massas $M_1, \ldots, M_n$ dos vários estágios do foguete. Para isto, temos de resolver as eqs. 13 utilizando os valores de x_i dados em (17). É fácil ver que essas equações se resolvem, facilmente, começando com $i = n$, que dá $M_n = \alpha C$, onde

$$\alpha = \frac{e^{V/nc} - 1}{1 - \sigma e^{V/nc}};$$

depois resolvemos a eq. 13 com $i = n - 1$, e assim sucessivamente até $i = 1$. Encontramos

$$M_n = \lambda C,\ M_{n-1} = \lambda(\lambda + 1)C,\ M_{n-2} = (\lambda + 1)^2 C,$$
$$\ldots, M_1 = \lambda(\lambda + 1)^{n-1} C.$$

Assim, para $n = 3$, as massas dos três estágios, no caso do foguete que vimos considerando, são

$$M_1 \approx 54,8C,\ \ M_2 \approx 13,2C,\ \ M_3 \approx 3,2C.$$

Referências

[1] G. ÁVILA, Cálculo 3 – Funções de Várias Variáveis, 4ª. edição, LTC Editora, 1987, 274 págs.

[2] D. N. BURGHES and A. M. DOWNS, Modern Introduction to Classical Mechanics and Control, Halstead Press (a division of John Wiley and Sons, Inc.), 1975, 320 págs.

[3] A. L. PERESSINI, Lagrange Multipliers and the Design of Multistage Rockets, Unit 517 of "Module and Monographs in Undergraduate Mathematics and its Applications Projecto", 1981, 10 págs, Editora Birhäuser.