Matemática Universitária N. 8, Dezembro de 1988, 43 - 45.

Uma Prova da Unicidade no Problema de Dirichlet

Gianluca Gorni
Istituto di Matematica
Università di Udine – Italia

Os textos de cálculo costumam fornecer a seguinte condição suficiente para que uma função duas vezes diferenciável atinja um ponto de máximo estrito interior: o gradiente deve ser zero e a matriz Hessiana deve ser negativa definida em alguma vizinhança de um ponto de máximo estrito. Obviamente a condição é necessária. No entanto qualquer vizinhança de um ponto de máximo estrito contém necessariamente algum ponto em que a matriz Hessiana é nagativa definida. Este fato não só é fácil de provar como também de forte significado geométrico. Ao mesmo tempo deixa intuir a verificação do princípio do máximo para funções harmônicas.

Em termos mais gerais a unicidade do problema de Dirichlet para uma grande classe de equações elípticas nãoestá muito longe.

O que aqui provamos é uma formulação ligeiramente mais geral da propriedade enunciada, com aplicações elípticas.

Proposição. Seja Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função contínua duas vezes diferenciável em todo ponto de Ω. Suponha que $\sup u(\Omega) > \sup u(\partial\Omega)$. Existe então um ponto $x_1 \in \Omega$ onde a matriz Hessiana $D^2u(x_1)$ é negativa definida.

Demonstração :

Seja x_0 um ponto de máximo para u, isto é, $u(x_0) = \sup u(\bar{\Omega})$. A ideia geométrica é de situar um paraboloide (para baixo), com vértice no ponto $(x_0, 0)$ com coeficientes suficientemente pequenos. No ponto $x_1 \in \Omega$ em que o gráfico está mais distante (verticalmente) do paraboloide, a matriz Hessiana de u é menor (no sentido da ordem entre matrizes simétricas) ou igual à matriz Hessiana do paraboloide, que é negativa definida.

Formalizando essa ideia, definamos a função seguinte

$$v(x) \equiv u(x) + \underbrace{\frac{u(x_0) - \sup u(\partial\Omega)}{2(\operatorname{diam}\Omega)^2}}_{=\varepsilon} |x - x_0|^2.$$

Não é difícil verificar que:

$$\begin{aligned} \sup v(\delta\Omega) &< \sup v(\Omega) \text{ porque } v(x_0) = u(x_0) = \sup u(\Omega) \\ \sup v(\partial\Omega) &\leq \tfrac{\sup u(\bar{\Omega}) + \sup u(\partial\Omega)}{2} < \sup u(\bar{\Omega}) \end{aligned}$$

Então v atinge um máximo em um ponto $x_1 \in \Omega$. Logo $D^2v(x_1) \leq 0$ (na ordem parcial das matrizes simétricas). Porém $D^2v(x_1) = D^2u(x_1) + 2\varepsilon I$ (sendo I a matriz identidade $n \times n$). Logo $D^2u(x_1) \leq -2\varepsilon I$, isto é, a matriz $D^2u(x_1)$ é negativa definida.

Com esta proposição em mãos podemos provar imediatamente o princípio do máximo, e portanto a unicidade para o problema de Dirichlet para a equação de Laplace:

$$\Delta_u = 0 \text{ em } \Omega.$$

onde u é contínua em $\bar{\Omega}$ e dada em $\delta\Omega$. De fato Δ_u é o traço da matriz Hessiana de u, e portanto, deverá ser negativo no ponto em questão. Isso é consequência de um fato conhecido em Álgebra Linear:

Lema. Se A_1 e A_2 são matrizes simétricas $n \times n$ e $A_1 \leq A_2$ então traço de $A_1 \leq$ traço de A_2.

Exatamente o mesmo raciocínio leva ao príncipo do máximo para a seguinte classe de equações diferenciais elípticas

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0$$

onde, se S é o conjunto parcialmente ordenado das matrizes simétricas $n \times n$, a função

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S \to \mathbb{R}$$

tem uma propriedade de monotonicidade estrita na componente matricial:

$$\forall (x,t,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ (A \le B,\ A \ne B)$$

$$\Rightarrow \ F(x,t,p,A) < F(x,t,p,B),$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ F(x,t,p,-\varepsilon I) < 0,\ F(x,t,p,\varepsilon I) > 0.$$

Finalmente consideramos a equação:

$$G(x,u,D^2u) = 0$$

onde para cada x a função $(t,A) \to G(x,t,A)$ é linear, monótona não crescente em t e monótona não decrescente em A, e uma das duas monotonidades é estrita (por exemplo no caso que $-u + \Delta u = 0$). Aqui podemos não ter o principo do máximo, mas ainda conseguimos a unicidade para o problema de Dirichlet se observamos que para o ponto x_1 achado na prova da Proposição vale a desigualdade $u(x_1) > \sup u(\partial\Omega)$.

Referência

[1] Hitoshi Ishi
On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully, non linear second-order elliptic PDE's
Preprint