

# Além das Séries de Fourier

*Mario Casarin Jr. e Carlos Tomei*  
Departamento de Matemática - PUC-RJ  
Rua Marquês de São Vicente 225, Gávea  
22.453 - Rio de Janeiro, RJ

## Seção 0.

Todos sabemos que uma função harmônica  $u$ , tomando valores reais e definida no disco aberto unitário  $D$  do plano complexo, é a parte real de uma função analítica  $f = u + iv$  também definida em  $D$ . O argumento conhecidíssimo, empregando as equações de Cauchy-Riemann e o teorema de Green ([LR], por exemplo), mostra também que todas as partes imaginárias possíveis diferem de uma constante real. Uma consequência óbvia desse fato é que uma singularidade isolada genuína de uma função analítica é uma singularidade de suas partes real e imaginária. A situação é muito mais complicada para pontos em  $T$ , a fronteira de  $D$ . Na seção 2, vamos construir uma função harmônica  $u$  que se estende continuamente a  $D$  sem que o mesmo ocorra com a parte imaginária  $v$ . O estudo de  $u$  e  $v$  na fronteira de  $D$  motivou a criação de uma parte substancial da análise harmônica do nosso século. Esse texto é um fragmento de uma longa história.

## Seção 1.

Sob condições bastante gerais, as funções harmônicas  $u$  e  $v$  assumem valores de fronteira  $g$  e  $h$  em  $T$ , no seguinte sentido :

$$\lim_{r \uparrow 1} u(re^{i\theta}) = g(e^{i\theta}) ; \lim_{r \uparrow 1} v(re^{i\theta}) = h(e^{i\theta})$$

Nestes casos podemos expressar  $u$  e  $v$  como soluções dos problemas de Dirichlet

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \Delta u = 0 \text{ em } D, & \Delta v = 0 \text{ em } D \\ u|_T = g & v|_T = h \end{array}$$

representadas pela convolução com o núcleo de Poisson ([F]), por exemplo em coordenadas polares

$$(2) \quad u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-t) + r^2} g(t) dt,$$

para  $r \in [0, 1)$  e  $\theta \in [-\pi, \pi)$ . Do primeiro curso em equações diferenciais parciais sabemos que se, digamos,  $g$  for contínua em  $T$ , então  $u$  definida por (2), de fato, é harmônica em  $D$ , contínua em  $\bar{D}$  e  $u|_T = g$ . Para estudar quais propriedades de  $h$  são determinadas por  $g$  consideramos a correspondência

$$(3) \quad g \mapsto u \mapsto v \text{ (com } v(0) = 0) \mapsto h = v|_T$$

em um conjunto  $P$  de funções muito simples, os polinômios trigonométricos a valores reais, definidos para  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Estes são combinações lineares finitas a coeficientes reais das funções  $\sin k\theta$ ,  $\cos k\theta$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , ou, equivalentemente, combinações lineares finitas complexas (com restrições nos coeficientes - veja (5) abaixo) das funções  $e^{in\theta}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . O nome, aliás, é mais que merecido: para  $z = 1 \cdot e^{i\theta} \in T$ ,  $z^n = e^{in\theta}$ . Além disso, os coeficientes da combinação linear são, a menos da inócua constante multiplicativa, os coeficientes da série de Fourier do polinômio

$$(4) \quad g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-n}^{+n} \hat{g}(k) e^{ik\theta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

onde alguns dos coeficientes  $\hat{g}(k)$  podem ser zero. Para que  $g$  tome valores reais, devemos ter  $\bar{g}(\theta) = g(\theta)$ , obrigando

$$(5) \quad \bar{\hat{g}}(k) = \hat{g}(-k) \quad (\text{por quê, leitor(a)?})$$

Para  $p \in P$ , é fácil explicitar a correspondência (3). Da reali-

dade de  $g$ ,

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}g(\theta) &= \hat{g}(0) + \sum_{k=1}^n (\hat{g}(k)e^{ik\theta} + \overline{\hat{g}(k)e^{ik\theta}}) \quad \text{por (5)} \\ &= \operatorname{Re}(\hat{g}(0) + \sum_{k=1}^n 2\hat{g}(k)e^{ik\theta}) \quad (\hat{g}(0) \in \mathbb{R}) \\ &= \operatorname{Re}(\hat{g}(0) + \sum_{k=1}^n 2\hat{g}(k)z^k),\end{aligned}$$

onde a expressão entre parênteses é uma função analítica (um polinômio), da qual  $g$  é a restrição da parte real a  $T$ .

Então

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}h(\theta) &= (\operatorname{Im}(\sum_{k=1}^n 2\hat{g}(k)z^k))|_T, \quad \text{por (3)} \\ &= -i \sum_{k=-n}^n \operatorname{sgn}(k)\hat{g}(k)e^{ik\theta}, \quad \text{por (5)}\end{aligned}$$

$$\text{onde } \operatorname{sgn}(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k > 0 \\ 0, & \text{se } k = 0 \\ -1, & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

A fórmula (2), que estende  $g$  harmonicamente a  $u$  em  $D$ , é válida, já que  $g$  é contínua. Na verdade, fizemos até mais: explicitamos  $h$  em termos dos coeficientes de Fourier de  $g$  nas contas acima.

O operador  $\sim: \begin{matrix} P \rightarrow P \\ g \mapsto h = \tilde{g} \end{matrix}$ , habitualmente chamado de conjugação, é tal entãoque o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\sim} & P \\ \mathcal{J} \downarrow & & \downarrow \mathcal{J} \\ \text{seqüências finitas} & \xrightarrow{\text{Multiplicação}} & \text{seqüências finitas} \\ \text{indexadas por } k \in \mathbb{Z} & \text{por } (-i \operatorname{sgn} k) & \text{indexadas por } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

isto é,  $\sim = \mathcal{J}^{-1}M_{-i \operatorname{sgn} k}\mathcal{J}$ , onde  $\mathcal{J}$  leva um polinômio a seus coeficientes de Fourier. Como  $\mathcal{J}$  é um operador unitário

de  $L^{2+}$  a  $l^2(\mathbb{Z})$ , a continuidade da conjugação é equivalente à continuidade de

$$M_{-i \operatorname{sgn} k} : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}),$$

que é evidente, já que  $|-i \operatorname{sgn} k| \leq 1$ . Logo podemos estender a conjugação ao fecho de  $P$  na norma  $L^2$ , que é o próprio  $L^2$  (pelo teorema de Stone-Weierstrass), obtendo um operador de norma igual a 1.

Pergunta inevitável : e se normarmos  $P$  de outra maneira - será que a conjugação ainda é contínua ? Uma norma natural em  $P$  é a norma  $L^p$ ,  $p \in [0, \infty]$ , e veremos adiante que a conjugação é realmente limitada de  $P$  a  $P$  se  $p \in [1, \infty]$ . Se  $p = 1$  ou  $\infty$ , isto não é verdade. Na Seção 2, vamos construir uma função contínua (logo no fecho uniforme de  $P$ ) cuja conjugação não é contínua, empregando uma terceira descrição do operador de conjugação que veremos adiante. Antes disso, vamos considerar um outro problema no qual a conjugação aparece naturalmente.

Para uma função contínua  $f : T \rightarrow \mathcal{C}$ , o operador de Cauchy,

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} (Cf)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{f(w)}{w-z} dw$$

define uma função  $F$  analítica no disco aberto  $D$  (afinal,  $F$  é derivável em  $z \in D$ ). Mais uma vez, em que sentido  $F$  tem valores de fronteira ? Pelo teorema de Cauchy, se  $F$  é a restrição de uma função  $f$  analítica num aberto contendo  $\bar{D}$  então  $Cf = F$  em  $D$ , e  $Cf$  se estende continuamente a  $\bar{D}$ , com  $v.f.(F) = CF|_T = f$ . Em particular,  $C(z^n)|_T = z^n$ , se  $n \geq 0$ . Para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$C(z^{-n}) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{w^{-n}}{w-z} dw \equiv 0 \text{ em } D,$$

por resíduo. Logo  $v.f.(z^{-n}) = 0$ , se  $n \in \mathbb{N}$ . Em outras palavras, para polinômios trigonométricos  $g$  a valores complexos (isto é, combinações lineares de  $e^{in\theta}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , que não satisfazem (5) necessariamente)

$$v.f.(g) = \mathcal{J}^{-1} M_{\alpha(k)} \mathcal{J} g.$$

<sup>1</sup>A notação  $L^p$  representa o espaço de funções  $L^p(T, d\theta)$ , tomando valores reais, onde  $d\theta$  é a medida de Lebesgue habitual, na qual o círculo de raio 1 tem comprimento  $2\pi$

onde  $\alpha(k) = 1$ , se  $k \geq 0$  e  $\alpha(k) = 0$  se  $k < 0$ , ou

$$2\alpha(k) = \operatorname{sgn} k + 1 + \delta_{0k}$$

Então,  $2v.f.(g) = (i\hat{g} + g + \mathcal{J}^{-1}\delta_{0k}\mathcal{J}g) = i\hat{g} + g + \hat{g}(0)$ . A continuidade de  $v.f.$  na norma  $L^p$ , então é essencialmente equivalente à continuidade da conjugação: O operador que leva  $g$  a  $\hat{g}(0)$  é limitado na norma  $L^p$ ,  $p \in [0, \infty]$ , pela desigualdade de Hölder.

## Seção 2.

Vamos encontrar outra representação do operador de conjugação. Da Seção 1, para  $p \in P$ , de grau  $n$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n+1} 2\hat{p}(k)e^{ik\theta} && (\hat{p}(n+1) = 0 \text{ e } \hat{p}(0) \in \mathbb{R}) \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=0}^{n+1} e^{ik(\theta-u)} \right) p(u) du, \end{aligned}$$

expandindo  $\hat{p}(k)$  e trocando o somatório com a integral. Somando a série e trocando variáveis,

$$\tilde{p}(\theta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{i(n+2)u}}{1 - e^{iu}} p(\theta - u) du.$$

Na última linha, a conjugação de  $p$  é descrita por um operador integral que, infelizmente, depende do grau de  $p$ . Para obter uma expressão para a conjugação de qualquer  $p \in P$ , que não depende do grau de  $p$ , decompos o integrando em duas partes:

$$(*) \quad \operatorname{Im} \left( \frac{1 - e^{i(n+2)u}}{1 - e^{iu}} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{1 - e^{iu}} \right) - \operatorname{Im} \left( \frac{e^{i(n+2)u}}{1 - e^{iu}} \right),$$

de modo que a primeira parcela independe de  $n$  e, como veremos, a segunda parte é irrelevante. Há uma dificuldade técnica, entretanto: as duas parcelas são descontínuas em  $0$ , e não é óbvio (nem verdadeiro em geral) que o produto de cada uma por  $p(\theta - u)$  seja integrável. A saída para isso é familiar:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = 0$$

o valor principal de uma integral,

$$v.p. \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[ \int_{-\pi}^{-\epsilon} f(u) du + \int_{\epsilon}^{\pi} f(u) du \right],$$

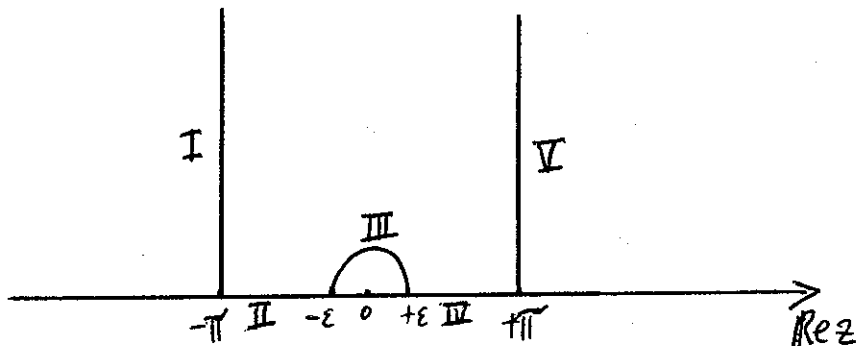
“torna finitas” integrais de funções que estouram como  $1/x$  perto de 0. Além disso, se  $f$  é contínua,

$$v.p. \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du = \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du.$$

Vamos mostrar que, se  $p$  é de grau  $n$ ,

$$v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{e^{i(n+2)u}}{1 - e^{iu}} \right) p(\theta - u) du = 0.$$

Isso se faz por resíduos. Da figura abaixo,



$\int_{I+...+V} \frac{e^{i(n+2)z}}{1 - e^{iz}} p(\theta - z) dz = 0$ , por argumentos-padrão do cálculo de integrais por resíduo [LR]. Pela  $2\pi$ -periodicidade do integrando,  $\int_I + \int_V = 0$ , logo,

$$v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(n+2)z}}{1 - e^{iz}} p(\theta - z) dz = - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \operatorname{Im} \int_{III} \frac{e^{i(n+2)z}}{1 - e^{iz}} p(\theta - z) dz = 0,$$

porque o resíduo do integrando em 0 multiplicado por  $i$  é real. (Lembre que  $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^{\pi} f(\epsilon e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta = \pi i \operatorname{Res}(f, 0)$ , se  $f$  tem um

polo simples em 0 [LR]). De (\*), então

$$\tilde{p}(\theta) = v.p. \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \operatorname{Im} \frac{1}{1 - e^{iu}} \right) p(\theta - u) du = v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \cot \frac{u}{2} \right) p(\theta - u) du.$$

Em  $P$ , o operador integral acima é uma conjugação. Não é óbvio que o operador aja sobre funções arbitrárias de, digamos,  $L^2$ . Certamente, os operadores

$$(T_\varepsilon f)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]} \left( \cot \frac{u}{2} \right) f(\theta - u) du.$$

são bem definidos e limitados de  $L^2$  a  $L^2$  (faça as contas, ou simplesmente mostre que  $T_\varepsilon$  é uma convolução por uma função limitada, logo integrável). Além disso, para  $f \in L^2$ ,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|T_\varepsilon f - \tilde{f}\|_2 = 0.$$

Isso vê-se com um argumento arquetipal:

$$\|T_\varepsilon f - \tilde{f}\|_2 \leq \|T_\varepsilon f - T_\varepsilon p\|_2 + \|T_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2 + \|\tilde{p} - \tilde{f}\|_2,$$

para qualquer  $p \in P$  — vamos mostrar que para uma escolha adequada de  $\varepsilon_0$  o termo  $\|T_\varepsilon f - \tilde{f}\|_2$  é menor que um  $\mu$  arbitrário, para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , majorando cada termo de lado direito por  $\mu/3$ . Para cercar o terceiro termo, usamos que a conjugação tem norma 1 de  $L^2$  a  $L^2$  (veja Seção 1):

$$(a) \quad \|\tilde{p} - \tilde{f}\|_2 \leq \|p - f\|_2.$$

Para controlar o primeiro termo, notamos que as normas dos operadores  $T_\varepsilon$  são menores que uma constante  $C$  para  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ , fato mostrado no Apêndice. Daí,

$$(b) \quad \|T_\varepsilon f - T_\varepsilon p\|_2 \leq C \|f - p\|_2$$

O segundo termo é um pouco mais difícil. Pelo diagrama da Seção 1 e o fato que  $\mathcal{J}$  é unitária,

$$(c) \quad \|T_\varepsilon p - \tilde{p}\|_2 = \|\mathcal{J}^{-1} M_{T_\varepsilon(k)} \mathcal{J} p - \mathcal{J}^{-1} M_{T_{-i \operatorname{sgn} k}} \mathcal{J} p\|_2$$

$$\leq \sqrt{2n+1} \sup_{k \in [-n, n]} |T_\varepsilon(k) - (i \operatorname{sgn} k)|,$$

onde  $n$  é o grau de  $p$ , e  $M_{T_\varepsilon(k)}$  é o operador de multiplicação correspondente à convolução  $T_\varepsilon$  após aplicarmos  $\mathcal{J}$ . Também no Apêndice, mostramos que  $T_\varepsilon(k) \rightarrow -i\text{sgn}k$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o que garante  $T_\varepsilon p \rightarrow \tilde{p}$  em  $L^2$ . Para cercar os lados direitos de (a), (b) e (c) basta escolher  $p \in P$  tal que

$$\|p - f\|_2 < \mu/3 \text{ e } \|p - f\|_2 \leq \mu/3C,$$

o que é possível por Stone-Weierstrass e, para esse  $p$ , escolher  $\varepsilon_0$  tal que para  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  o segundo termo também seja menor que  $\mu/3$ .

Não é verdade, entretanto, que os operadores  $T_\varepsilon$  convirjam na norma de operadores para a conjugação.

Para que tanto esforço? É que a representação da conjugação em termos do v.p. nos dá um controle maior sobre ela. Como exemplo disso (muito mais vai acontecer nas próximas Seções), vamos construir uma função contínua no círculo cuja conjugação não é sequer(???) limitada. Em outras palavras, vamos mostrar a existência de uma função analítica em  $D$  cuja parte real se estende continuamente a  $D$  mas a parte imaginária não.

Considere a função :

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in [-\pi, -1] \\ g(u) & \text{se } u \in [-1, 1] \\ 0 & \text{se } u \in [1, \pi] \end{cases}$$

onde  $g$  é par,  $g(u) = g(-u)$ . Como aquecimento vamos mostrar que se  $g \equiv 1$ , então  $\tilde{f}$  não é limitada. De fato, para  $\theta \in (1, 2)$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cot u/2) f(\theta - u) du. \\ &= \int_{\theta-1}^{\theta+1} \cot u/2 du, \end{aligned}$$

e, integrando explicitamente,  $\lim_{\theta \downarrow 1} \tilde{f}(\theta) = +\infty$ .

Para obter uma  $f$  contínua com  $\tilde{f}$  não limitada, vamos tomar uma função que quase salta em  $u = 1$ , fazendo sua derivada à



esquerda em 1 ser  $-\infty$ .

Para  $g(u) = -(\ln \frac{1}{2}(-|u| + 1))^{-1}$  e  $\theta \in (1, 2)$

$$\tilde{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-1}^{\theta} \frac{-\cot u/2}{\ln \frac{1}{2}(-\theta + u + 1)} du + \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+1} \frac{-\cot u/2}{\ln \frac{1}{2}(\theta - u + 1)} du.$$

Quando  $\theta \downarrow 1$ , a segunda integral é limitada, mas a primeira *não* — fica por sua conta, leitor(a).

Uma dúvida possível: vimos que, para  $f \in L^2$ ,  $T_\varepsilon f \rightarrow f$  em  $L^2$ , mas quem garante que a representação integral via v.p. realmente nos dá valores pontuais de  $\tilde{f}$  (que em geral nem existem para funções em  $L^2$ )? Há duas abordagens: um teorema mais difícil, envolvendo as chamadas funções maximais, garante que isso é verdade q.t.p.. Nos exemplos acima, entretanto (e na demonstração do teorema da próxima seção) podemos nos justificar de maneira bem mais simples. Estamos sempre calculando  $\tilde{f}(\theta)$  para  $\theta$  num intervalo  $I$  tal que a singularidade de  $\cot u/2$  (isto é  $u = 0$ , encontra-se num intervalo onde  $f(\theta - u)$  é nula. Para  $\theta \in I$ ,  $(T_\varepsilon f)(\theta)$  faz sentido, é constante para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, e a convergência  $L^2$  em  $I$  de  $T_\varepsilon f$  a  $\tilde{f}$  implica a convergência pontual q.t.p. em  $I$  (aliás, em  $I$ ,  $\tilde{f}$  é contínua — por que, leitor(a)?).

### Seção 3.

Para onde vai a conjugação  $\tilde{f}$  de uma função limitada  $f$ ? Como  $L^\infty \subset L^p \subset L^q$  para  $p \geq q \geq 1$ ,  $\tilde{f}$  deve estar em  $L^2$  e se admitimos que a conjugação leva  $L^p$  a  $L^p$ , para  $p > 1$  (o que não provamos mas é verdadeiro), então  $\tilde{f}$  está em  $\bigcap_{p \in (1, \infty)} L^p$ . Já vimos, entretanto,

que  $\tilde{f}$  não precisa estar em  $L^\infty$ . Estamos então, procurando um contradomínio  $X$  tal que

$$L^\infty \neq X \subset \bigcap_{p \in (1, \infty)} L^p$$

Já temos até alguns exemplos interessantes de funções em  $X$ , as conjugações calculadas na Seção anterior. A escolha do espaço “correto” (e a descoberta de outras razões que comprovam a correção

dessa escolha) é um dos pontos altos da Análise dos últimos vinte anos.

O espaço denotado por BMO, consiste das funções mensuráveis  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de período  $2\pi$  (por isso identificáveis com funções definidas em  $T$  para as quais

$$(1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

$$(2) \quad \|f\|_* \stackrel{\text{def}}{=} \left( \sup_{[a,b] \in \mathbb{R}} \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(a) - f_{[a,b]}| dx \right) + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right| < \infty$$

$$\text{onde } f_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Vamos explicar um pouco essa definição. O número  $f_{[a,b]}$ , obviamente, é a média de  $f$  em  $[a, b]$  e é finito, por (1) e Cauchy-Schwarz. O primeiro termo de definição de  $\|f\|_*$  é o supremo sobre todos os intervalos  $Q$  de um número que pode ser pensado como a oscilação média de  $f$  em torno de sua média  $f_Q$  no intervalo  $Q$ . Queremos que  $\|f\|_*$  seja uma norma e, por isso, convém acrescentar o segundo termo — a oscilação média de uma constante é zero, e queremos ter  $\|f\|_* = 0 \Leftrightarrow f = 0$ . De fato  $\|\cdot\|_*$  é uma norma que torna BMO um espaço de Banach — não vamos dar detalhes, que não são difíceis. Aliás, BMO quer dizer *bounded mean oscillation* — oscilação média limitada. É verdade que  $\text{BMO} \subset L^p$ ,  $p \in (1, \infty)$  mas também não vamos demonstrar — a afirmativa segue do famoso lema de John-Nirenberg, que já haviam empregado BMO no estudo de certas equações diferenciais parciais.

O resto da Seção é dedicado a demonstrar o resultado abaixo.

**Teorema (Spanne-Stein):** A conjugação é um operador linear limitado de  $L^\infty$  a BMO.

Queremos então mostrar que existe  $C$  tal que

$$\|\tilde{f}\|_* \leq C \cdot \|f\|_\infty.$$

Note que basta controlar a oscilação média em torno de uma constante  $C_Q$ , dependente de  $Q$ , para ter o controle da oscilação em torno da média  $f_Q$ : mais precisamente, omitindo a dependência na variável,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - C_Q| + \frac{1}{|Q|} \int_Q |C_Q - f_Q| \\ &= \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - C_Q| + \frac{1}{|Q|} \int_Q (C_Q - f_Q) \\ &\leq \frac{2}{|Q|} \int_Q |f - C_Q| \end{aligned}$$

Em resumo

$$(*) \quad \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| \leq 2 \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int |f - C_Q|.$$

Vamos começar por algo fácil:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f} \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\tilde{f}\|_2, \text{ por Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2 \leq \|f\|_{\infty}, \end{aligned}$$

e o segundo termo da definição de  $\|f\|_*$  já está controlado. Agora, vamos estimar a oscilação média para intervalos  $Q$  grandes, digamos  $|Q| \geq \pi$  e  $|Q| \in (2\pi n, 2\pi(n+1)]$ , para algum  $n = 0, 1, \dots$

Então

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |\tilde{f}| \right)^2 &\leq \frac{1}{|Q|} \int_Q |\tilde{f}|^2, \text{ por Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \frac{n+1}{|Q|} \int_0^{2\pi} |\tilde{f}|^2, \text{ pela periodicidade de } \tilde{f} \\ &\leq \frac{n+1}{|Q|} \|f\|_2^2, \text{ porque a conjugação tem} \\ &\quad \text{norma 1 de } L^2 \text{ a } L^2 \\ &\leq \frac{n+1}{|Q|} 2\pi \|f\|_{\infty}^2 \\ &\leq 4 \|f\|_{\infty}^2 \end{aligned}$$

Usando (\*) acima com  $C_Q = 0$ , temos

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f - f_Q| \leq 2 \|f\|_{\infty},$$

para intervalos  $Q$  grandes. O controle para intervalos pequenos é mais sutil; para  $f \in L^\infty$  e  $Q = [p-a, p+a]$ ,  $a \in (0, 2\pi)$ , o controle da oscilação média de  $f$  em  $Q$  por  $\|f\|_\infty$  equivale – por uma troca de variável – ao controle da oscilação média de  $g(\pi) = f(\pi - p)$  no intervalo  $[-a, a]$  pela cota superior  $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$ . Logo, sem perda, podemos supor  $p = 0$ . Seja  $\chi_{2Q}$  a função característica do intervalo  $[-2a, 2a] = 2Q$  e decomponha  $f$ ,

$$f = f_1 + f_2 = f\chi_{2Q} + (f - f\chi_{2Q}),$$

em suas partes “perto” e “longe” de  $Q$  (e da singularidade em 0 de  $\cot u/2$ ) – temos que controlar  $\|\tilde{f}_i\|_*$  em termos de  $\|f\|_\infty$ . Mais uma vez, tendo em vista (\*) com  $C_Q = 0$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2a} \int_Q |\tilde{f}_1|\right)^2 &\leq \frac{1}{2a} \int_Q |\tilde{f}_1|^2 \leq \frac{1}{2a} \int_{-\pi}^{+\pi} |\tilde{f}_1|^2 \\ &\leq \frac{1}{2a} \|f_1\|_2^2 \leq \frac{1}{2a} \int_{2Q} |f_1|^2 \leq 2\|f\|_\infty^2 \end{aligned}$$

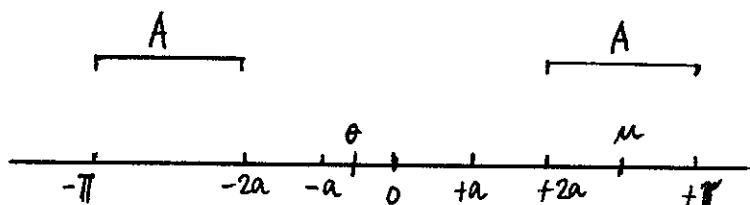
Para controlar  $\tilde{f}_2$ , vamos usar a representação via v.p. da conjugação:

$$\tilde{g}(\theta) = v.p. \int_{-\pi}^{+\pi} K(u)g(\theta - u)du = v.p. \int_{-\pi}^{+\pi} K(\theta - u)g(u)du,$$

onde  $K(u) = \frac{1}{2\pi} \cot u/2$ . Note que para  $\theta \in Q$ ,

$$\tilde{f}_2(\theta) = \int_{A=[-\pi, -2a] \cup [2a, \pi]} K(\theta - u)f(u)du$$

o v.p. mais uma vez desapareceu (ver o final da Seção anterior).



Convém fazer a seguinte escolha diabólica de  $C_Q$ :  $C_Q = \tilde{f}_2(0) =$

$\int_A K(-u)f(u)du$ . Então

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_2 - C_Q| &\leq \int_A |K(\theta - u) - K(-u)| |f(u)| du \\ &\leq \|f\|_\infty \int_A |K(\theta - u) - K(-u)| du \leq \|f\|_\infty \int_B |K(\theta - u) - K(-u)| du \end{aligned}$$

onde  $B = \{u \mid \pi \geq |u| \geq 2|\theta|\}$ .

A última desigualdade, óbvia pela figura acima (já que  $A \subseteq B$ ), estima  $|\tilde{f}_2 - C_Q|$  por um número independente de  $Q$ . Agora, é "só" mostrar que esse número é menor que  $M < \infty$ , para todo  $\theta \in Q$  - de novo, a conta é sua, leitor(a): divida em casos de acordo com a posição relativa de  $\theta$ ,  $\mu$  e 0, e calcule explicitamente a integral sobre  $B$ . Daí, por (\*),  $\frac{1}{|Q|} \int_Q |\tilde{f}_2 - (C_Q)| \leq 2M \|f\|_\infty$ , e a demonstração está concluída.

#### Seção 4.

Na seção anterior, BMO foi apresentado como um contradomínio natural para a conjugação em  $L^\infty$ . Na verdade, BMO é um espaço natural em vários sentidos. A seguir, descrevemos sem demonstração uma propriedade muito interessante de BMO.

É bem sabido que se  $L : L^p \rightarrow L^p$  e sua restrição  $L : L^q \rightarrow L^q$  são operadores lineares bem definidos e limitados para  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  então  $L : L^r \rightarrow L^r$  é bem definido e limitado para  $r \in (p, q)$  (lembre que  $L^p \supset L^r \supset L^q$ ). Conhecem-se extensões substanciais desses resultados, os chamados teoremas de interpolação ([SW], cap 5). Com o espaço BMO foi possível encontrar extensões muito poderosas. O seguinte resultado é um caso particular de um teorema bem mais forte:

**Teorema** (Fefferman-Stein, [FS]): Se  $L : L^p \rightarrow L^p$  e  $L : L^\infty \rightarrow BMO$  são bem definidos e limitados, então  $L : L^r \rightarrow L^r$  também é, para  $r \in (p, \infty)$ .

Uma consequência imediata desse teorema, da limitação da conjugação em  $L^2$  e do teorema do Spanne-Stein é a limitação da conjugação de  $L^p$  a  $L^p$ , para  $p \in (2, \infty)$ . Os argumentos habituais de dualidade podem ser empregados para definir a conjugação

como operador limitado de  $L^p$  a  $L^p$ ,  $p \in (1, 2)$ . A limitação da conjugação de  $L^p$  a  $L^p$ ,  $p \in (1, \infty)$ , é a motivação para outro resultado clássico, cuja demonstração não completaremos, entretanto, neste artigo. Seja  $H^p$ ,  $p \in [1, \infty)$ , o espaço vetorial dos valores de fronteira  $f : T \rightarrow \mathcal{C}$  de funções analíticas  $F : D \rightarrow \mathcal{C}$  (isto é, os limites radiais  $\lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta})$  para quase todo  $\theta$ ) tais que

$$(a) \quad F(0) \in \mathbb{R}$$

$$(b) \quad \|f\|_{H^p}^p \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{r \in (0,1)} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

Obviamente, esta norma é equivalente à soma das normas  $L^p$  das partes real e imaginária de  $f$ .

**Teorema:** A correspondência  $\begin{matrix} L^p \rightarrow H^p \\ g \rightarrow g+i\tilde{g} \end{matrix}$  é um isomorfismo de espaços de Banach, para  $p \in (1, \infty)$ .

Já sabemos que  $\tilde{g} \in L^p$  e que  $g + i\tilde{g}$  admite, pela fórmula de Poisson (que vale para valores de fronteira em  $L^p$ ), uma extensão analítica  $G$  a  $D$  com  $G(0) \in \mathbb{R}$ . Faltaria ver que os limites radiais de  $G$  são, de fato, iguais a  $g + i\tilde{g}$  para quase todo  $\theta$ , e isso mais uma vez envolve o emprego de funções maximais.

Como interpretar a versão dualizada do teorema de Spanne-Stein? A resposta é inevitável:  $L^\infty$  é o dual de  $L^1$  (mas não o contrário), logo a conjugação deve ser limitada de um subespaço  $Y$  de  $L^1$  a  $L^1$ , e o dual de  $Y$  deve ser BMO! A descrição explícita de  $Y$  é mais um grande resultado dos últimos vinte anos.

**Teorema (Fefferman):**  $Y = \text{Re}H^1$ , as partes reais  $\text{Re}f$  das funções  $f$  em  $H^1$ , com norma  $\|\text{Re}f\| = \|f\|_{H^1}$

Demonstrar esse teorema é muito mais difícil que adivinhá-lo.

## Seção 5.

Bom, como esse assunto continua? Algumas extensões são naturais – porque não a reta em vez do círculo? Isso nem é tão difícil, e os resultados análogos se encontram nas referências. Por que não  $\mathbb{R}^n$ ? Isso é bem pior: você deve ter notado a abundância de cálculos com uma variável complexa. Para estender os resultados apresentados, foi necessário desenvolver novas técnicas

de análise real (funções maximais, decomposição de Calderón-Zygmund, medidas de Carleron). Ou uma variedade (para 'onde' vão as extensões harmônicas?!)? A resposta é: mais técnicas (decomposição atômica de Coifman-Weiss). Essas novas ferramentas aumentaram substancialmente a compreensão de certas classes de operadores lineares. No texto, estudamos a regularidade na fronteira de um sistema elíptico de equações diferenciais parciais (as equações de Cauchy-Riemann em  $D$ ), um operador integral singular (o.v.p. da convulação por  $\cot u/2$  - a conjugação) e os valores de fronteira de dois operadores integrais (o operador de Cauchy e - surpresa (?) - o operador que leva  $g$  a  $h = v|_T$  em (3) da Seção 1). A nomenclatura da frase anterior foi empregada para sugerir contextos onde as novas técnicas são indispensáveis.

Quase dois séculos depois da definição da continuidade, a análise real mantém-se uma área de atividades e aplicações surpreendentes.

### Apêndice

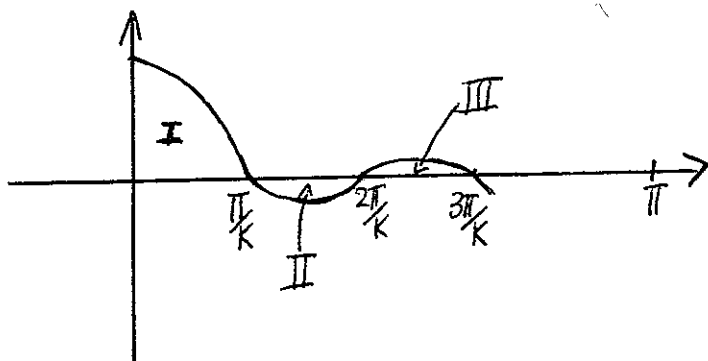
Os operadores  $\mathcal{J}T_\varepsilon\mathcal{J}^{-1}$  são multiplicações  $M_{T_\varepsilon(k)}$  onde  $T_\varepsilon(k)$  é o  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier da função

$$K_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{2\pi} \chi_{[-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]}(\theta) \cot \theta/2,$$

multiplicado por  $\sqrt{2\pi}$ . Demonstrar, então, que os  $T_\varepsilon$  são uniformemente limitados de  $L^2$  a  $L^2$ , reduz-se a mostrar que  $|T_\varepsilon(k)| \leq C$ , onde  $C$  independe de  $k$  e  $\varepsilon$ . Descartando a parte ímpar do integrando,

$$\sqrt{2\pi}T_\varepsilon(k) = \int_{-\pi}^{+\pi} K_\varepsilon(\theta)e^{-ik\theta}d\theta = -\frac{i}{\pi} \int_\varepsilon^\pi \sin k\theta \cot(\theta/2)d\theta$$

O gráfico do integrando é um seno ( $\sin k\theta$ ) 'modulado' pela amplitude  $\cot \theta/2$  ( $k > 0$ ):



Não é difícil ver, usando o gráfico dos dois fatores e também a derivada que

(a)  $|\sin k\theta \cot \theta/2| \leq 2k$  em  $(0, \pi/k)$

(b) a área das regiões I, II, III, ... decresce

(c)  $|\int_{\epsilon}^{\pi} \sin k\theta \cot \theta/2 d\theta| < \text{área da região I} < 2\pi$

e a limitação uniforme agora é imediata.

Além disso, também na seção 2 ficamos devendo a demonstração de que  $T_{\epsilon}(k) \rightarrow -i \operatorname{sgn} K$  quando  $\epsilon \downarrow 0$ . É mais uma aplicação do teorema de resíduos: para  $K < 0$ , usando a figura da Seção 2,

$$T_{\epsilon}(K) = -\frac{1}{2\pi} \int_{III} e^{-iKz} \cot z/2 dz$$

$$\rightarrow \frac{i}{2} \operatorname{Res}(e^{-iKz} \cot z/2, 0) = i = -i \operatorname{sgn} K.$$

Para  $K > 0$ , a conta análoga segue da mesma figura espelhada no eixo horizontal. Para  $k = 0$ ,  $T_{\epsilon}(k) = 0$ , porque o integrando é ímpar.

## Referências

- [F] Figueiredo, D.G de  
Análise de Fourier e equações diferenciais parciais  
IMPA, 1977



- [FS] Feffermann, C e Stein, E  
 *$H^p$  Spaces of Several Variables*  
Acta Mathematica 129(1972), pp. 137-193
- [LR] Levinson, N e Redheffer, R  
Complex Variables  
Holden-Day Inc., 1970
- [SW] Stein, E e Weiss, G  
Fourier Analysis on Euclidean Spaces  
Princeton University Press, 1971
- [GR] Garcia-Cuerva e J. Rubio de Francia  
Weighted Mean Inequalities and Selected Topics  
North-Holland, 1985
- [T] Torchinsky, A  
Real Variable Methods in Harmonic Analysis  
Academic Press, 1986
- [K] Katznelson, Y  
An Introduction to Harmonic Analysis John Wiley & Sons,  
1968
- [II] Iório, R e Iório, V  
Equações Diferenciais Parciais: um introdução  
LTC, projeto Euclides, 1988