

Superfícies e perfis

Marcio G. Soares

Departamento de Matemática ICEx UFMG
C.P. 702 30161-Belo Horizonte

I. Introdução

Imagine-se circundando e fotografando uma escultura. Cada fotografia a exhibe de um determinado ângulo e o contorno da escultura é o que chamamos perfil. Perguntamos então:

Dada a sequência de fotografias, é possível reconstruir a escultura a partir de seus perfis ?

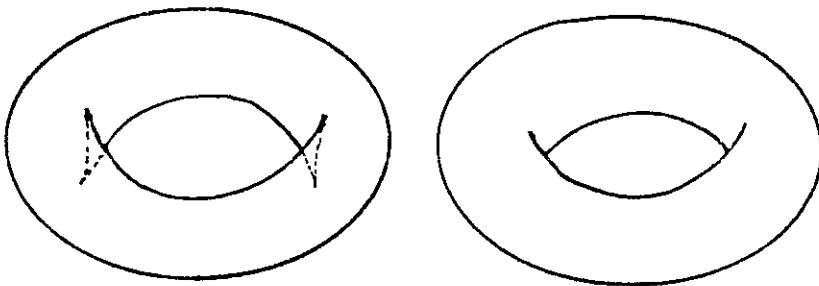
Problemas dessa natureza fazem parte do que se convencionou chamar "reconhecimento de formas", um ramo do que é atualmente conhecido por "visão artificial".

Nesse artigo consideramos o problema de reconstrução de uma superfície suave M a partir de uma família de perfis de M . As superfícies das quais tratamos são *transparentes* e não *opacas* pois, em relação a essas últimas, o problema apresenta dificuldades ainda não superadas.

O uso de perfis no reconhecimento e descrição de superfícies foi explorado por vários autores. Em [3, lema 2.1] a característica de Euler-Poincaré de M é obtida a partir de um único perfil. Em [4] busca-se uma classificação de superfícies a partir de perfis em todas as direções (direções da "esfera de visão"). Em [9] obtém-se uma fórmula para a curvatura gaussiana de M a partir de uma sequência de perfis.

Nosso objetivo aqui será o de reconstruir superfícies a partir de perfis correspondendo a um círculo de "direções de visão" (contornando a escultura). Quase toda a superfície pôde ser reconstruída

dessa maneira e nos concentramos mais na região hiperbólica de M pois aí os perfis podem apresentar singularidades, o que torna o problema bem mais interessante. Também exibimos fórmulas para o cálculo das curvaturas gaussiana e média de M a partir de uma sequência de perfis.



perfil completo

Figura 1

perfil com oclusão

O conteúdo desse artigo é baseado em trabalhos de Giblin, Weiss e do autor ([6] e [7]).

II. Perfis de uma superfície

Sejam M uma superfície suave, conexa, sem bordo, mergulhada em \mathbb{R}^3 e u um vetor unitário de \mathbb{R}^3 . Consideramos u como definindo uma direção de visão, isto é, estamos interessados na projeção

$$\Pi_u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \Gamma_u$$

onde Γ_u é o subespaço de \mathbb{R}^3 ortogonal a u . Em M , o lugar dos pontos p nos quais o plano tangente a M em p , $T_p M$, contém a direção de visão u é chamado conjunto crítico de Π_u e notado Σ_u . A imagem de Σ_u por Π_u é chamada perfil de M na direção u , uma curva no plano Γ_u .

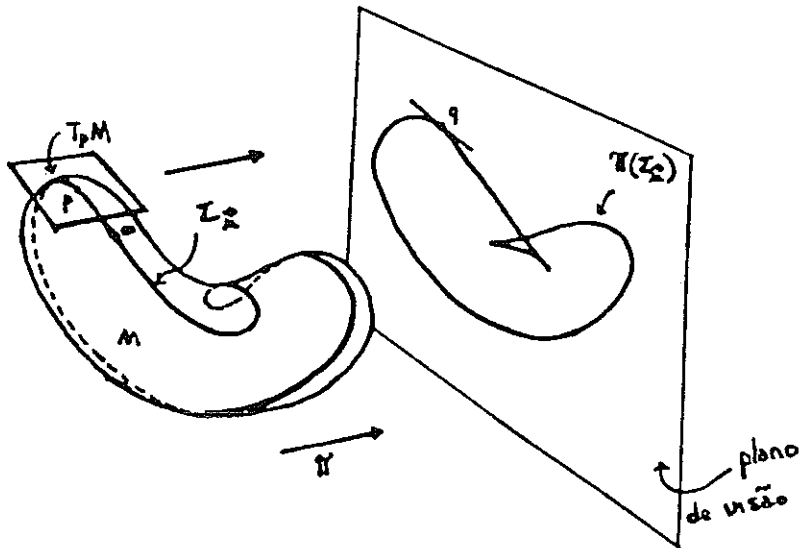


Figura 2

Listamos a seguir algumas propriedades bem conhecidos de Σ_u e do perfil de M .

Proposição 1

- (i) Σ_u é uma curva suave em torno de $p \in M$ a menos que p seja um ponto parabólico e u determine a direção assintótica de M em p .
- (ii) se $q = \Pi_u(p)$ com $p \in \Sigma_u$ então o perfil é uma curva suave em torno de q a menos que u determine uma direção assintótica de M em p .
- (iii) se Σ_u é uma curva suave em torno de p então sua direção tangente em p é paralela ao plano Γ_u se e sómente se u determina uma direção principal de M em p .

(iv) se o perfil é suave em $q = \Pi_u(p)$ com $p \in \Sigma_u$ então sua direção tangente em q está em $T_p M$.

Demonstração Veja [5] para as noções de geometria diferencial mencionadas.

Podemos supor que $p = (0, 0, 0)$, que M é um gráfico, $z = f(x, y)$ numa vizinhança de p e que o plano tangente a M em p é $z = 0$. A fórmula de Taylor com centro em $(0, 0)$ nos dá

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + R_3(x, y)$$

Seja $u = (0, 1, 0)$ a direção de visão. A condição para que o plano tangente a M em (x, y, z) contenha u é que a normal a M nesse ponto, cuja direção é determinada por $(-f_x, -f_y, 1)$ seja ortogonal a u , ou seja, $f_y = 0$. Segue do teorema da Função Implícita que $A \subset \Sigma_u$ onde $A = \{(x, y, z), z - f(x, y) = f_y(x, y) = 0\}$ é suave em p a menos que $f_{xy} = f_{yy} = 0$ em $(0, 0)$, isto é, $b = c = 0$ o que nos diz que p é ponto parabólico de M e u determina a direção assintótica de M em p . Observe que caso também tenhamos $a = 0$ então p é um ponto planar. Isto mostra (i).

Suponha que A é suave em p . Então, pelo teorema da Função Implícita a direção tangente a A em p é determinada por $(c, -b, 0)$ desde que b ou c não sejam ambos nulos. Essa direção coincide com a direção de visão se e sómente se $c = 0$, o que nos diz que u determina uma direção assintótica de M em p . Assim sendo, o perfil em $q = \Pi_u(p)$ é suave a menos que $c = 0$. Isto mostra (ii).

Observe que caso A não seja suave em p então o mesmo ocorre com o perfil em $q = \Pi_u(p)$ uma vez que projeções não eliminam singularidades.

Suponha agora que $c \neq 0$, isto é, o perfil é suave em q . Sua direção tangente em q é a projeção da correspondente direção em p , ou seja, $\Pi_u(c, -b, 0) = (c, 0, 0)$. Esta direção está no plano $z = 0$ o que mostra (iv).

Por outro lado, $(c, -b, 0)$ é paralelo ao plano de visão $y = 0$ se e sómente se $b = 0$ e nesse caso temos que u determina uma direção principal de M em p . Isto mostra (iii).

Exemplos :

Nos exemplos abaixo M é um gráfico, $p = (0, 0, 0)$,
 $T_p M = \{z = 0\}$, $u = (0, 1, 0)$ e portanto $\Gamma_u = \{y = 0\}$ e
 $q = \Pi_u(p) = (0, 0) \in \Gamma_u$.

- II.1) $z = xy + y^3$. Próximo a p temos Σ_u parametrizado por
 $t \mapsto (-3t^2, t, -2t^3)$. A tangente a Σ_u em p é determinada
por u e o perfil é parametrizado por $t \mapsto (-3t^2, 0, -2t^3)$ que
possui uma cúspide ordinária em q .
- II.2) $z = xy + y^4$. próximo a p temos Σ_u parametrizado por
 $t \mapsto (-4t^3, t, -3t^4)$ e o perfil parametrizado por
 $t \mapsto (-4t^3, 0, -3t^4)$ que apresenta uma cúspide degenerada em q .
- II.3) $z = y^3 + x^2y$. Nesse caso p é um ponto planar de M e
temos Σ_u dado por $t \mapsto (-3t^2, 3t^3, -54t^9)$. O perfil é dado
por $t \mapsto (-3t^2, 0, -54t^9)$ que possui uma cúspide bastante
degenerada em q .
- II.4) $z = x^2 + xy^2 + y^3$. Nesse caso p é ponto parabólico e u
determina a direção assintótica de M em p . Σ_u consiste de
duas curvas suaves se cruzando em p , a saber, $t \mapsto (t, 0, t^2)$
e $t \mapsto (3t, -2t, 9t^2 + 4t^3)$. O perfil consiste de duas curvas se
tangenciando em q , $t \mapsto (t, 0, t^2)$ e $t \mapsto (3t, 0, 9t^2 + 4t^3)$.

III. Reconstrução de Superfícies

Nosso objetivo será o de reconstruir o máximo possível de uma superfície M , como em II, a partir de seus perfis. Em \mathbb{R}^3 existe uma família a dois parâmetros de direções de visão que, se pensadas como vetores unitários são os pontos da esfera S^2 . Pretendemos obter os planos tangentes a M que será então a envoltória dessa família de planos. Agora, para tal basta conhecer os perfis de M correspondentes a direções $u \in S^2$ que estão num círculo máximo. Para ver isso seja $p \in M$ e em $T_p M$ considere os vetores unitários. Estes formam um círculo máximo em S^2 e como quaisquer dois círculos máximos em S^2 se interceptam concluímos que, fixados o círculo de direções de visão e $p \in M$, existe $u \in T_p M$ unitário,

que é uma direção de visão e portanto o ponto p contribuirá com o ponto $\Pi_u(p) \in \Gamma_u$ que está no perfil de M na direção u .

O procedimento para determinar o plano tangente a M em p é o seguinte : uma direção nesse plano é claramente a da reta por $q = \Pi_u(p)$ de direção u . Outra direção é a da reta tangente ao perfil em q .

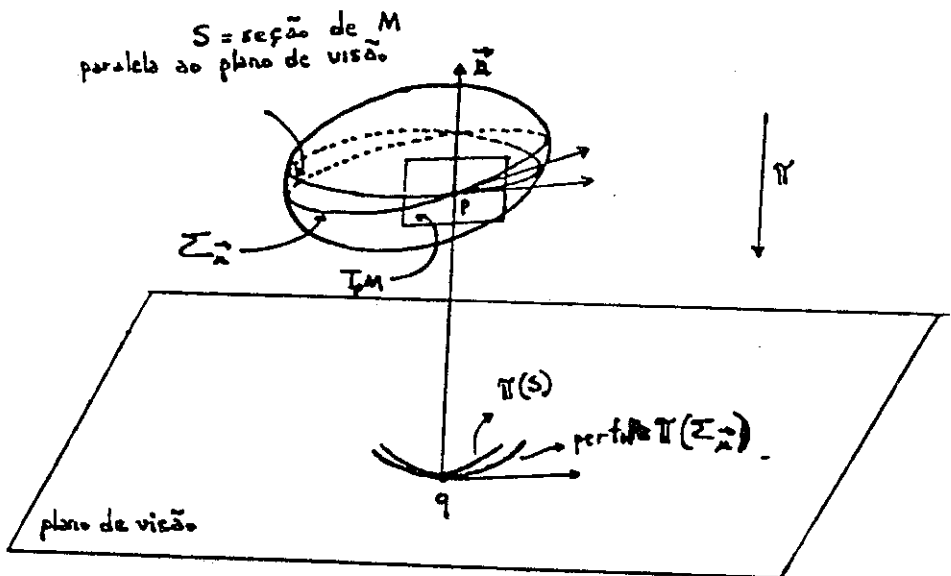


Figura 3

Caso o perfil seja singular em q interpretamos a reta tangente como limite de retas tangentes ao perfil em pontos próximos a q nos quais o mesmo seja suave. Se o perfil possui um cruzamento em q então os ramos do perfil contribuem, cada um, com um plano tangente a M em pontos distintos.

Passamos agora à reconstrução de M a partir de perfis correspondentes a direções de visão num círculo máximo de S^2 (o processo que utilizamos funciona exceto em pontos de M nos quais $T_p M$ seja paralelo ao plano determinado pelas direções de visão e na região parabólica de M). Os cálculos abaixo são de natureza local pois supomos que temos parametrizações dos perfis em torno de cada um de seus pontos.

Considere a família de direções de visão

$$u_\theta = (0, \cos \theta, \sin \theta)$$

e a correspondente família de planos de visão

$$\Gamma_\theta : y \cos \theta + z \sin \theta = 0$$

Cada um desses planos contém um perfil de M . Usamos coordenadas ortonormais (x, w) em Γ_θ sendo que o eixo x é comum a todos os planos e o eixo w está na direção $(0, \sin \theta, -\cos \theta)$. Um ponto (x, w) em Γ_θ corresponde ao ponto

$$x(1, 0, 0) + w(0, \sin \theta, -\cos \theta) = (x, w \sin \theta, -w \cos \theta)$$

de \mathbb{R}^3 .

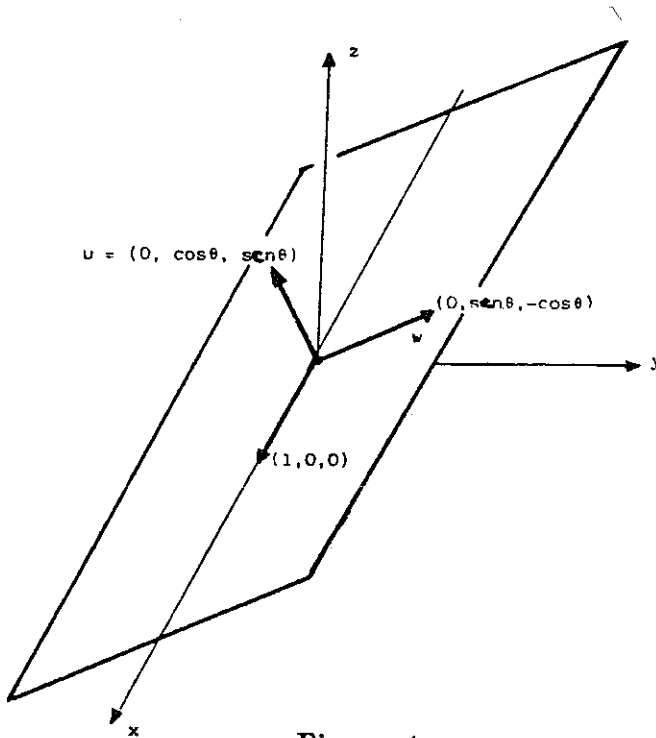


Figura 4

Na prática, são as quantidades x e w que são medidas através de uma imagem. Suponha que os perfis sejam dados por $w = w(x, \theta)$, função suave de x e θ num aberto do plano (x, θ) . Isto nos diz que para esses valores de x e θ os perfis são suaves e não são tangentes ao eixo w . Esta suposição equivale a dizer que, começando com um dado ponto de um perfil, escolhemos um eixo de rotação que não é paralelo à normal ao perfil nesse ponto. É claro, que, caso a direção de visão permaneça sempre no plano tangente a M em p , nenhuma informação nova é obtida variando-se a direção de visão.

Considere x e θ fixos, isto é, um ponto fixado no perfil de M em Γ_θ . O plano tangente a M determinado por x e θ passa pelo ponto

$$(x, w) \in \Gamma_\theta \text{ que corresponde a}$$

$$(x, w \sin \theta, -w \cos \theta) \text{ de } \mathbb{R}^3$$

e contém as direções

$(0, \cos \theta, \sin \theta)$ direção de visão

$(1, w_x \sin \theta, -w_x \cos \theta)$ tangente ao perfil

A equação do plano é portanto

(1) $w_x X - \sin \theta Y + \cos \theta Z = x w_x - w$
 (aqui estamos usando coordenadas (X, Y, Z) em \mathbb{R}^3 a fim de evitar o uso repetido de x).

Observação

No caso geral, isto é, quando os perfis são dados por $x = x(t, \theta)$, $w = w(t, \theta)$ para algum parâmetro t , a equação do plano fica

$$(2) \quad w_t X - x_t \sin \theta Y + x_t \cos \theta Z = x w_t - x_t w$$

A superfície M é a envoltória da família de planos dada por (1) (veja [8] para conceito e cálculo de envoltórias) e obtemos pontos (X, Y, Z) onde $X = x$, $Y = w \sin \theta + w_\theta \cos \theta$,
 $Z = -w \cos \theta + w_\theta \sin \theta$.

Considere a aplicação $f : (x, \theta) \mapsto (X, Y, Z)$, ou seja,

$$(3) \quad f(x, \theta) = (x, w \sin \theta, -w \cos \theta) + w_\theta (0, \cos \theta, \sin \theta)$$

Note que $w_\theta = \frac{\partial w}{\partial \theta}$ é a profundidade (distância com sinal) de um ponto do perfil ao ponto correspondente de M . f é uma parametrização local de M caso sua derivada tenha posto 2 e a condição para tal é $w + w_{\theta\theta} \neq 0$, o que se vê imediatamente de

$$(4) \quad \begin{cases} f_x &= (1, w_x \sin \theta, -w_x \cos \theta) + w_{x\theta} (0, \cos \theta, \sin \theta) \\ f_\theta &= (w + w_{\theta\theta}) (0, \cos \theta, \sin \theta) \end{cases}$$

Na seção IV exploraremos (4) a fim de deduzir fórmulas para as curvaturas gaussianas e média de M .

Observação:

Caso os perfis sejam dados por $x = x(t, \theta)$, $w = w(t, \theta)$, a envoltória da família de planos (2) é

$$(5) \quad f(t, \theta) = (x, w \sin \theta, -w \cos \theta) + (w_\theta - x_\theta \frac{w_t}{x_t}) (0, \cos \theta, \sin \theta)$$

e aqui $w_\theta - x_\theta \frac{w_t}{x_t}$ mede a profundidade de um ponto do perfil ao ponto correspondente de M , desde que $x_t \neq 0$.

Pela proposição 1 pontos elípticos dão origem a perfis suaves e (3) ou (5) são suficientes para parametrizar M numa vizinhança de tais pontos.

Passamos agora a considerar pontos hiperbólicos ou parabólicos, que podem apresentar singularidades nos perfis. Começamos com alguns exemplos que mostram de imediato que (3) não mais se aplica porém (5) sobrevive aos pontos hiperbólicos. Em seguida demonstramos que (5) fornece parametrizações locais de M na região hiperbólica. Nos exemplos abaixo M é dada por um gráfico $z = h(x, y)$ e estaremos interessados em (x, y) próximo a $(0, 0)$ e direções de visão $(0, \cos \theta, \sin \theta)$ próxima a $(0, 1, 0)$ ou seja $\theta = 0$. A normal à superfície em p é dada por $(h_x, h_y, -1)$ e a condição $p \in \Sigma_\theta$ lê-se

$$(h_x, h_y, -1) \cdot (0, \cos \theta, \sin \theta) = 0$$

ou

$$(6) \quad \begin{cases} z - h(x, y) = 0 \\ h_y(x, y) - \tan \theta = 0 \end{cases}$$

Um cálculo simples mostra que

$$(7) \quad \Pi_\theta(p) =$$

$$(x, y \sin^2 \theta - z \sin \theta \cos \theta, -y \sin \theta \cos \theta + z \cos^2 \theta) \in \Gamma_\theta$$

cujas coordenadas em Γ_θ são

$$(8) \quad \begin{cases} x = x \\ w = y \sin \theta - z \cos \theta \end{cases}$$

Também supomos os perfis parametrizados por $x = x(t, \theta)$, $w = w(t, \theta)$.

Exemplos :

III.1) $z = 1 + xy + y^3$ (o 1 que aparece aqui e em outros exemplos visa manter M afastada do eixo x , que é o eixo comum a todos os planos de visão. Isso evita o aparecimento de singularidades "extras" das quais falaremos adiante). Nesse caso (6) e (8) se

reduzem a

$$(6) \quad \begin{cases} x = \tan \theta - 3y^2 \\ z = 1 + y \tan \theta - 2y^3 \end{cases}$$

e fazendo $y = t$

$$(8) \quad \begin{cases} x = \tan \theta - 3t^2 \\ w = -\cos \theta + 2t^3 \cos \theta \end{cases}$$

A família de perfis (8) possui uma cúspide em $t = 0$ qualquer que seja θ próximo a 0.

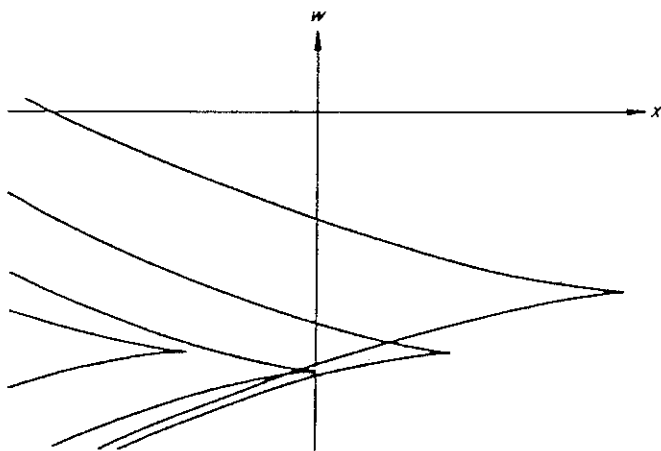


Figura 5

Observe que $\frac{w_x}{x_t} = -t \cos \theta$ (em $t = 0$ esse número mede a inclinação da tangente cuspidal) e a fórmula de reconstrução (5) fica

$$f(t, \theta) = (\tan \theta - 3t^2, t, 1 + t \tan \theta - 2t^3)$$

que é uma parametrização local de M em torno de $(0,0,1)$, apesar dos perfis singulares.

III.2) $z = 1 + \frac{xy+y^4}{1+y}$. Nesse caso (6) fica

$$\begin{aligned} x &= (1+y)^2 \tan \theta - 4y^3 - 3y^4 \\ y &= y \\ z &= 1 + (y+y^2) \tan \theta - 3y^4 \end{aligned}$$

e os perfis (8) (fazendo $y = t$)

$$\begin{aligned}x &= (1+t)^2 \tan \theta - 4t^3 - 3t^4 \\w &= -\cos \theta - t^2 \sin \theta + 3t^4 \cos \theta\end{aligned}$$

æ Essa família de perfis apresenta uma transição do tipo “cauda de andorinha” para θ próximo a 0 (veja [1])

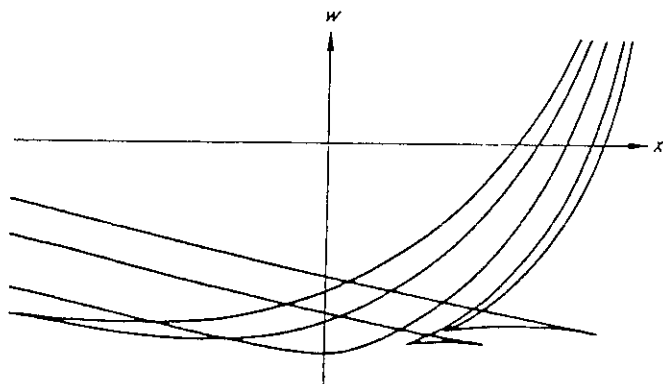


Figura 6

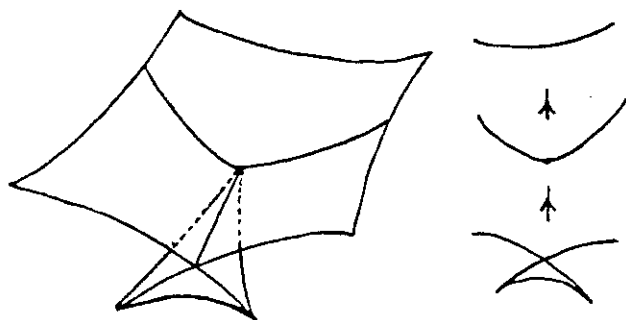


Figura 7

Quanto à fórmula de reconstrução (5) temos que $\frac{w_t}{x_t}$ se reduz a $-\frac{t}{1+t} \cos \theta$ e obtemos uma parametrização local de M em torno de $(0, 0, 1)$.

III.3) $z = 1 + x^2 + x^2y - y^3$. Aqui (6) fica

$$\begin{aligned}x &= \pm(3y^2 + \tan \theta)^{\frac{1}{2}} \\y &= y \\z &= 1 + (1 + y) \tan \theta + 3y^2 + 2y^3\end{aligned}$$

onde y satisfaz $3y^2 + \tan \theta \geq 0$. Os perfis (8) são (fazendo $y = t$)

$$\begin{aligned}x &= \pm(3t^2 + \tan \theta)^{\frac{1}{2}} \\w &= -\cos \theta - \sin \theta - 3t^2 \cos \theta - 2t^3 \cos \theta\end{aligned}$$

Essa família de perfis apresenta uma transição do tipo “bicos” para θ próximo a 0 (caso tivéssemos $+y^3$ ao invés de $-y^3$ na expressão de z obteríamos uma transição do tipo “lábios”).

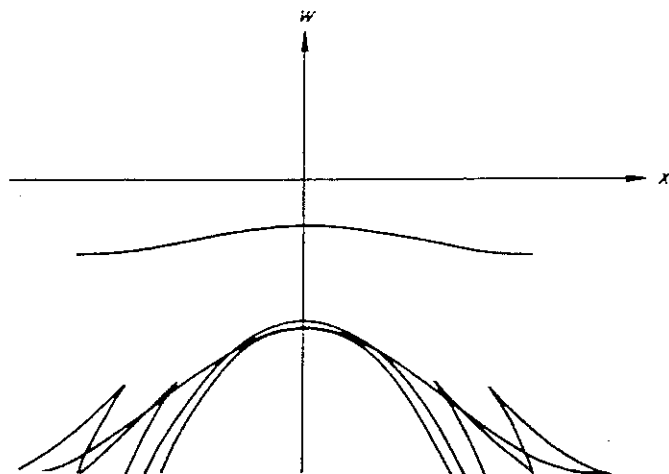


Figura 8

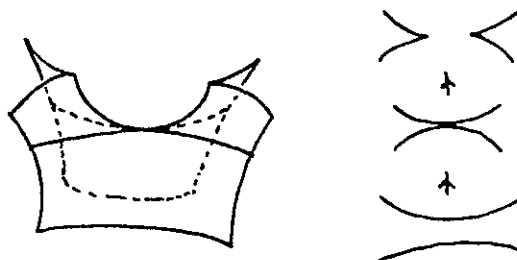


Figura 9

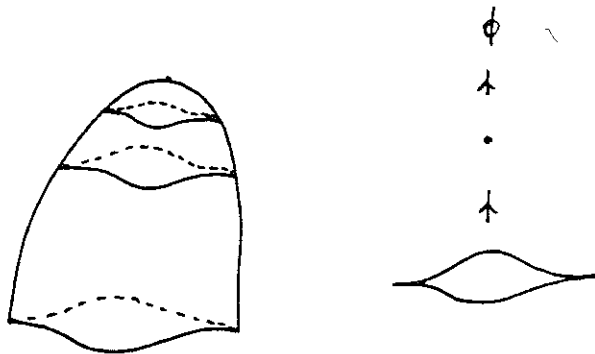


Figura 10

Nesse exemplo (ponto parabólico) já encontramos dificuldades com os perfis uma vez que a presença dos sinais + e - na coordenada x (dois ramos) mostra que, mesmo localmente, o perfil para $\theta = 0$ não é uma curva parametrizável. A fórmula de reconstrução (5) não é uma parametrização local de M em torno de $(0, 0, 1)$ (f deixa de ser uma imersão apenas para $(t, \theta) = (0, 0)$).

Poderíamos dizer muito mais na linha dos exemplos acima mas citaremos apenas os seguintes fatos (veja [1], cp.12 e [2] §7):

III.4) se $p \in M$ é ponto hiperbólico e a reta por p na direção u_θ tem contato de ordem 3 com M em p então $\Pi_\theta(p) \in \Gamma_\theta$ é uma cúspide ordinária do perfil.

III.5) se $p \in M$ é ponto hiperbólico e a reta acima tem contato de ordem 4 com M em p então, ao se variar a direção de visão, os perfis apresentam uma transição do tipo "cauda de andorinha".

III.6) se $p \in M$ é ponto parabólico e a reta acima tem contato de ordem 3 com M em p então, ao se variar a direção de visão, os perfis apresentam transições do tipo "bicos" ou "lábios".

Certamente existem singularidades mais degeneradas que podem ser observadas nos perfis (borboleta, ganso, gaviota) porém estas são visíveis apenas através de *direções isoladas*.

Mostraremos agora que a fórmula de reconstrução (5) fornece parametrizações locais de M na região hiperbólica.

Considere M dada por $z = h(x, y)$ onde, sem perda de generalidade, estamos interessados numa vizinhança de $p_0 = (0, y_0, z_0)$,

$z_0 = h(0, y_0)$. O eixo x , comum a todos os planos de visão, desempenha um papel especial e, em geral, não podemos escolher $y_0 = 0$ ou $z_0 = 0$. Isto se deve a que, ao consideramos os perfis isoladamente, é indiferente se eles se interceptam ou não porém, mais adiante vamos empilhá-los para formar uma superfície P de perfis e nesse caso interseções entre perfis introduziriam singularidades "extras" em P . Assim sendo, evitamos tal situação afastando M do eixo x . As equações que determinam \sum_θ são

$$(6) \quad \begin{cases} z - h(x, y) = 0 \\ h_y(x, y) - \tan \theta = 0 \end{cases}$$

As equações (6), definem em \mathbb{R}^4 (coordenadas (x, y, z, θ)) uma superfície suave \tilde{P} parametrizada por x e y . \tilde{P} consiste dos conjuntos críticos \sum_θ empilhados na direção θ .

A projeção de \tilde{P} em \mathbb{R}^3 através da aplicação

$$(9) \quad (x, y, z, \theta) \mapsto (x, y \sin^2 \theta - z \sin \theta \cos \theta, -y \sin \theta \cos \theta + z \cos^2 \theta)$$

é a superfície de perfis P , que consiste na união dos perfis nos planos Γ_θ . Em geral, P apresenta singularidades.

A projeção de \tilde{P} em \mathbb{R}^2 através da aplicação

$$(10) \quad (x, y, z, \theta) \mapsto (x, w) = (x, y \sin \theta - z \cos \theta)$$

tem por imagem, para θ fixo, o perfil de M em Γ_θ .

Desde que nenhum vetor tangente a \tilde{P} seja anulado pela derivada de (9) ou (10) a imagem correspondente (P ou o perfil) é suave. Um cálculo elementar mostra a seguinte

Proposição 2 Suponha $y_0 \neq 0$ ou $z_0 \neq 0$. Então, para valores de θ próximos a 0, $(x, y, z, \theta) \in \tilde{P}$ é projetado por (9) ou (10) num ponto singular de p ou do perfil em Γ_θ se e sómente se $h_{yy}(x, y) = 0$. Assim sendo, existe uma curva \sum em \tilde{P} , dada por (6) e $h_{yy} = 0$, cuja projeção é o conjunto singular de P , para pequenos valores de θ . A condição para que $\tilde{p}_0 = (0, y_0, z_0, 0)$ esteja em \sum é

$$(11) \quad h_y(0, y_0) = h_{yy}(0, y_0) = 0$$

e vamos supor que isso ocorre no que segue. Esta condição nos

diz que o perfil para $\theta = 0$ tem uma cúspide (não necessariamente ordinária) no ponto $(x, w) = (0, -z_0)$.

Segue do teorema da Função Implícita a seguinte

Proposição 3

- (i) Se $h_{xy}(0, y_0) \neq 0$ então y e θ são coordenadas locais para \tilde{P} em torno de \tilde{p}_0 ; além disso, se também $h_{yyy}(0, y_0) \neq 0$ então θ é coordenada local para Σ em torno de \tilde{p}_0 .
 - (ii) se $h_{yyy}(0, y_0) \neq 0$ então x é coordenada local para Σ em torno de \tilde{p}_0 .
 - (iii) se $h_{xyy}(0, y_0) \neq 0$ então y é coordenada local para Σ em torno de \tilde{p}_0 .
 - (iv) Se vale ou (i) ou (ii) ou (iii) então a imagem de Σ por (9) (curva de cúspides de P) é uma curva suave em $(0, y_0, z_0)$ se e sómente se $h_{yyy}(0, y_0) \neq 0$.
 - (v) Suponha que a curva (iv) de cúspides de P seja suave em $(0, y_0, z_0)$. Então essa curva é transversal aos planos de visão (para pequenos valores de θ) se e sómente se $z_0 \neq 0$ e $h_{xy}(0, y_0) \neq 0$.
- (iv) e (v) nos dizem que, a medida que variamos os planos de visão, cada perfil apresenta uma cúspide ordinária.

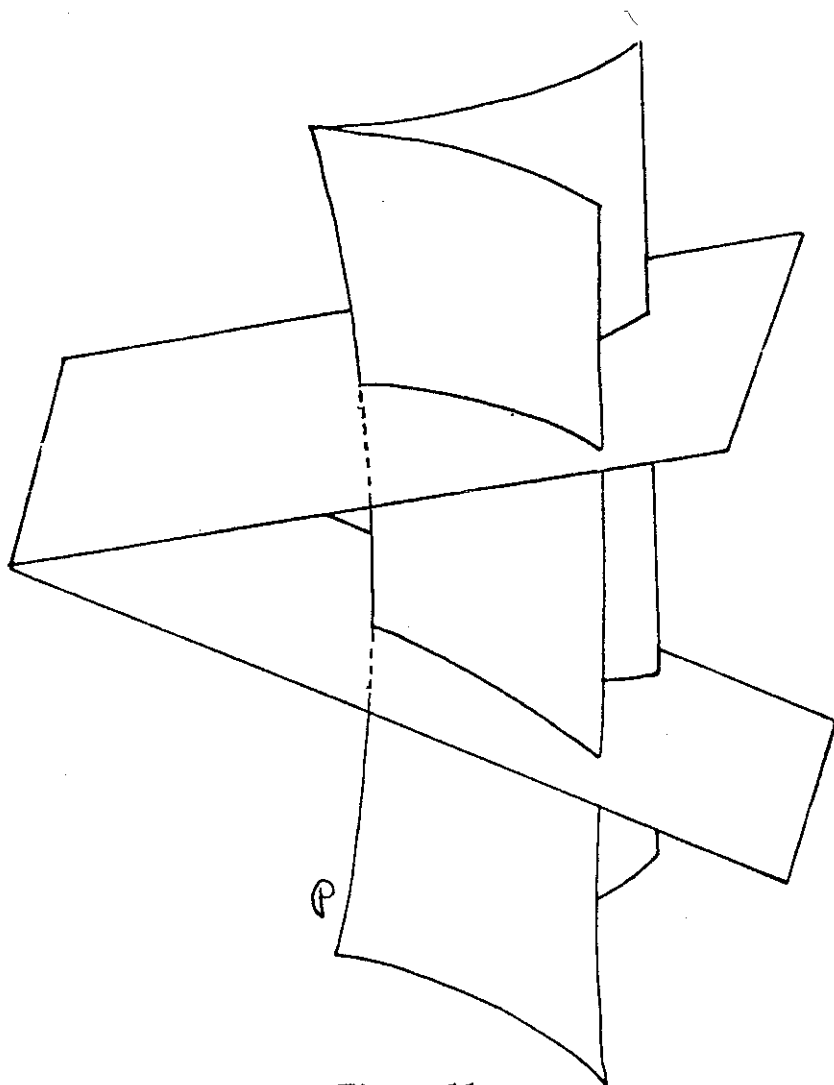


Figura 11

Escreva M na forma

$$(12) \quad z = h(x, y) = z_0 + ax + bx^2 + cx(y - y_0) + R(x, y - y_0)$$

onde R se anula até segunda ordem em $(0, y_0)$. Note que, por (11), não aparecem termos em y e y^2 . Logo, $(0, 1, 0)$ é uma direção

assintótica de M em $p_0 = (0, y_0, z_0)$ e p_0 é hiperbólico caso $c \neq 0$, parabólico caso $c = 0$ onde $c = h_{xy}(0, y_0)$.

Suponha p_0 hiperbólico de modo que, por (i) da proposição 3, \tilde{P} é parametrizada por y e θ . A imagem por (10) nos dá perfis

$$(13) \quad (x(y, \theta), w(y, \theta)) = \\ (x(y, \theta), y \sin \theta - h(x(y, \theta), y) \cos \theta)$$

e daí

$$\begin{aligned} w_y &= \sin \theta - h_x x_y \cos \theta - h_y \cos \theta \\ &= \cos \theta (\tan \theta - h_y) - h_x x_y \cos \theta \\ &= -h_x x_y \cos \theta \text{ por (6)} \end{aligned}$$

Logo, desde que $x_y \neq 0$ a inclinação das tangentes aos perfis é dada por

$$(14) \quad m(y, \theta) = \frac{w_y}{x_y} = -h_x \cos \theta$$

Esta fórmula permanece válida (passando ao limite) nos pontos singulares dos perfis, isto é, $m(y, \theta)$ é uma função suave, desde que finita, mesmo nos pontos singulares.

Escreva (5) na forma

$$f(y, \theta) = (x, w \sin \theta, -w \cos \theta) + (w_\theta - m x_\theta)(0, \cos \theta, \sin \theta)$$

Calculando w_θ de (13) e usando (14) obtemos

$$f(y, \theta) = (x(y, \theta), y, h(x(y, \theta), y))$$

e portanto f é parametrização de M em torno de $(0, y_0, z_0)$ desde que

$$(y, \theta) \mapsto (x(y, \theta), y)$$

seja um difeomorfismo local em $(y, \theta) = (y_0, 0)$. Isto ocorre pois a derivada dessa aplicação é

$$\begin{pmatrix} x_y & x_\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_y & \frac{\sec^2 \theta}{h_{xy}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ por (6)}$$

e em $(y_0, 0)$ ficamos com

$$\begin{pmatrix} x_y(y_0, 0) & \frac{1}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

IV. Fórmulas para K e H a partir dos perfis

Nessa seção obtemos fórmulas para as curvaturas gaussiana e média de M a partir de seções da superfície e dos perfis.

Começamos considerando superfícies de revolução que exemplificam bem os tipos de fórmulas que buscamos. Uma tal superfície é obtida girando-se uma curva plana suave em torno de um eixo. Podemos supor que a curva (geratriz) está no plano $y = 0$ e que o eixo x é o eixo de rotação. É claro que o perfil de M na direção $(0, 1, 0)$ é a própria geratriz. Seja $p \in M$ um ponto no plano $y = 0$ em torno do qual a geratriz se escreve como um gráfico $w = w(x)$. Segue da proposição 1(iii) que as direções principais de M em p são a direção tangente à geratriz em p e a direção de visão $(0, 1, 0)$. Logo, se $k_c(p)$ denota a curvatura da geratriz em p (caso curva plana) e $k_0(p)$ é a curvatura do círculo obtido girando-se p em torno do eixo x temos que

$$K(p) = k_c(p)k_0(p) \text{ e } H(p) = \frac{1}{2}(k_c(p) + k_0(p))$$

são as curvaturas gaussiana e média de M em p .

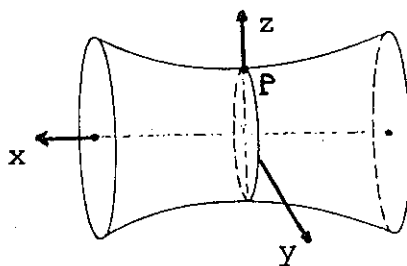


Figura 12

Note que H e K foram obtidas através da curvatura do perfil e da curvatura seccional de M na direção de visão.

Passamos agora ao caso geral. Suponha que os perfis são parametrizados por $w = w(x, \theta)$ como em III e que (3) é uma parametrização local de M . Num ponto $f(x, \theta)$ em M temos direções coordenadas correspondendo a f_x e f_θ onde f_x está na direção tangente a Σ_θ e f_θ na direção de visão. Em geral f_x e f_θ não são ortogonais, porém são conjugados relativamente à segunda

forma fundamental de M . Isto significa que a matriz da segunda forma fundamental na base f_x, f_θ é diagonal e, tomando

$$n = \frac{1}{(1 + w_x^2)^{\frac{1}{2}}}(-w_x, \sin \theta, -\cos \theta)$$

como normal unitário a M em $f(x, \theta)$ temos que esta matriz se escreve

$$\begin{pmatrix} \frac{w_{xx}}{(1+w_x^2)^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{w+w_{\theta\theta}}{(1+w_x^2)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix}$$

Já a matriz da primeira forma fundamental é

$$\begin{pmatrix} 1 + w_x^2 + w_{x\theta}^2 & w_{x\theta}(w + w_{\theta\theta}) \\ w_{x\theta}(w + w_{\theta\theta}) & w + w_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

Com isso em mãos podemos calcular K e H , antes porém introduzimos três curvaturas que comporão as fórmulas para H e K .

k_c é a curvatura do perfil e é dada por

$$k_c = \frac{w_{xx}}{(1 + w_x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

k_x é a curvatura seccional de M na direção f_x

$$k_x = \frac{w_{xx}}{(1 + w_x^2)^{\frac{1}{2}}(1 + w_x^2 + w_{x\theta}^2)}$$

k_θ é a curvatura seccional de M na direção f_θ , que é a direção de visão u_θ se $w + w_{\theta\theta} > 0$ e $-u_\theta$ caso $w + w_{\theta\theta} < 0$. Temos

$$k_\theta = \frac{-1}{(1 + w_x^2)^{\frac{1}{2}}(w + w_{\theta\theta})}$$

Na prática, k_c é determinada a partir de um perfil e k_x e k_θ a partir de uma seqüência de perfis. Um cálculo elementar mostra a

Proposição 4. As curvaturas gaussianas K e média H de M em $f(x, \theta)$ são dadas por

$$K = k_c k_\theta = \frac{-w_{xxx}}{(1 + w_x^2)^2(w + w_{\theta\theta})}$$

$$H = \frac{1}{2}k_c\left(1 + \frac{k_\theta}{k_x}\right) = \frac{w_{xx}(w + w_{\theta\theta}) - 1 - w_{x\theta}^2}{2(w + w_{\theta\theta})}$$

Além disso, $w_{x\theta} = 0$ se e sómente se a direção de visão é uma direção principal de M em $f(x, \theta)$ e nesse caso f_x e f_θ são as direções principais, $k_c = k_x$ e $H = \frac{1}{2}(k_c + k_\theta)$.

O que ocorre caso o perfil seja singular? Num ponto de cúspide do perfil K , por exemplo, não pode ser expressa como $k_c k_\theta$ pois aí temos k_c infinita e k_θ nula. Não pretendemos detalhar esse caso uma vez que os cálculos envolvidos são longos mas apresentaremos alguns resultados.

Suponha os perfis dados por $x = x(t, \theta)$, $w = w(t, \theta)$ e que apresentem singularidades (pontos nos quais $x_t = w_t = 0$). Ponha $m(t, \theta) = \frac{w_t}{x_t}$. Então, no ponto $f(t, \theta)$ (5) temos

$$K = \frac{-m_t}{(1 + m^2)^2 D}$$

$$H = \frac{-(w + w_{\theta\theta})m_t + x_{\theta\theta}m m_t + x_t(1 + m_\theta^2) + x_t m^2}{2(1 + m^2)^{\frac{3}{2}} D}$$

onde $D = (w + w_{\theta\theta})x_t + x_\theta^2 m_t - x_{\theta\theta} x_t m - 2x_t x_\theta m_\theta$.

A vantagem das fórmulas acima é que podemos ver o que se passa num ponto singular onde $x_t = w_t = 0$ e m , m_t e m_θ são finitos. As fórmulas continuam válidas por continuidade de K e H e ficamos com

$$K = \frac{-1}{x_\theta^2(1 + m^2)^2} \quad 5m m_e \quad H = \frac{-(w + w_{\theta\theta}) + x_{\theta\theta} m}{2x_\theta^2(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Referências

- [1] V.I. Arnold
Catastrophe Theory
Springer Verlag 1984
- [2] T. Banchoff, T. Gaffney, C. McCrory
Cusps of Gauss Mappings
Research Notes in Mathematics 55, Pitman 1982

- [3] T.Banchoff, N.Kuiper
Geometrical Class and Degree for Surfaces in Three-Space
J. Diff. Geometry, 16(1981),559-576
- [4] J.Callahan, R.Weiss
A Model for Describing Surface Shape
Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition, San Francisco, June 1985, 240-245
- [5] M. Carmo
Differential Geometry of Curves and Surfaces
Prentice-Hall 1979
- [6] P.Giblin, M.G.Soaes
On the Geometry of a Surface and its Singular Profiles
Image and Vision Computing, vol 6 no 4 (1988), 225-234
- [7] P.Giblin, R.Weiss
Reconstruction of Surfaces from Profiles
Proc. First Int. Conf. on Computer Vision, IEEE Computer Society, London 1987, 136-144
- [8] G.Julia
Éléments de Géométrie Infinitésimale
Gauthier-Villars, Paris 1936
- [9] J.Koenderink
What tells us the contour about solid shape?
Perception Vol 13 (1984), 321-330