

Nota de Ensino

Matemática Universitária N. 8, Dezembro de 1988, 103 - 106.

Responsável: Geraldo de Souza Ávila

Bolas, Urnas, e as Loterias de Números

Flávio Wagner Rodrigues
Instituto de Matemática - USP
Caixa Postal 20.570, Agência Iguatemi
01498 - São Paulo, SP

Muitos jogadores reclamam do fato dos sorteios da Loto produzirem com frequência dezenas consecutivas tais como 35 e 36 ou 79 e 80. Alguns chegam a escrever aos jornais convencidos de que isto seria uma indicação da existência de falhas acidentais ou até mesmo intencionais no mecanismo do sorteio. Para verificar se essa reclamação é procedente, o que é necessário é resolver o seguinte problema: qual é a probabilidade de que num sorteio da Loto saiam pelo menos duas dezenas consecutivas? (a dezena 00 representa o nº 100 e portanto 00 e 01 não serão consideradas como consecutivas). O objetivo desta nota é mostrar como problemas desse tipo podem ser resolvidos de um modo simples, utilizando-se um modelo de distribuição casual de bolas em urnas. O interesse natural dos estudantes por problemas de loterias pode ser assim aproveitado para introduzi-los ao estudo desses modelos, que são úteis em várias aplicações da Teoria das Probabilidades.

1. **O Modelo:** Considere o experimento que consiste na distribuição de n bolas idênticas em k urnas distintas. De quantas maneiras isso pode ser feito?

No que se segue iremos mostrar que esse número coincide com o número de combinações completas de k objetos tomados n a n , valendo portanto

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}. \quad (.1)$$

Para verificar esse fato basta observar que uma distribuição das n bolas pelas k urnas ficará completamente caracterizada se indicarmos, para cada bola, o número da urna na qual ela deve ser colocada. Isto equivale a escolhermos um agrupamento (com repetição, pois uma urna pode receber mais de uma bola) de tamanho n , no conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$. Note que, como o modelo supõe bolas idênticas, a ordem dos elementos nos agrupamentos não deve ser levada em conta.

Como ilustração, considere o exemplo da distribuição de duas bolas idênticas em duas urnas:

Nº de bolas em cada urna	Combinações completas de 2 elementos 2 a 2
(2,0)	(1,1)
(0,2)	(2,2)
(1,1)	(1,2)

Note que o elemento (2,0) indica que duas bolas são colocadas na urna um e nenhuma na urna dois. O elemento correspondente no lado direito, (1,1), indica que apenas a urna 1 deve receber bolas. De maneira análoga, descreveríamos as outras duas linhas da tabela.

2. As Loterias de Números: A Loto, que já vem funcionando há bastante tempo, realiza duas extrações semanais nas quais 5 números distintos são escolhidos ao acaso no conjunto dos 100 primeiros números naturais. O número total de resultados possíveis de um sorteio da Loto é igual a $\binom{100}{5}$. A Loto II, mais conhecida como Sena, realiza uma única extração semanal, na qual são escolhidos 6 números distintos no conjunto dos 50 primeiros números naturais. Analogamente, o número total de resultados possíveis de uma extração é igual a $\binom{50}{6}$.

Para estabelecermos uma relação entre esses jogos e o modelo descrito no item 1 vamos imaginar os números sorteados colocados em ordem crescente e convencionar que quando falarmos do j -ésimo número estaremos nos referindo a essa ordem e não à ordem em que os números saíram no sorteio. Vamos observar agora que na Loto (o raciocínio para a Sena é totalmente análogo) uma vez sorteados os 5 números, os 95 números que não foram

sorteados ficam naturalmente subdivididos em 6 subconjuntos, o primeiro deles formado pelos números menores que o 1º número sorteado, o 2º pelos números compreendidos entre o 1º e o 2º números sorteados, e assim por diante até o 6º que será formado pelos números maiores do que o maior sorteado.

Esta observação nos permite estabelecer uma correspondência entre o conjunto dos resultados possíveis da Loto e o conjunto das distribuições de 95 bolas em 6 urnas. Vamos ilustrar essa correspondência com dois exemplos, deixando ao leitor interessado a tarefa de mostrar que ela define uma bijeção entre os dois conjuntos.

Exemplos:

Resultados da Loto	Distribuições de 95 bolas em 6 urnas
(08, 15, 22, 64, 88)	(07, 06, 06, 41, 23, 12)
(12, 20, 21, 75, 76)	(11, 07, 00, 53, 00, 24)

Vamos agora utilizar essas idéias para resolver o problema proposto no início deste trabalho.

No contexto do modelo, a existência de pelo menos duas dezenas consecutivas corresponde a termos pelo menos uma das quatro urnas centrais vazia. Vamos calcular a probabilidade do evento complementar, isto é, a probabilidade de que cada uma das quatro urnas centrais contenha pelo menos uma bola. Para isso, vamos colocar uma bola em cada uma dessas quatro urnas (garantindo assim que elas não ficarão vazias) e em seguida distribuir ao acaso as 91 bolas restantes pelas 6 urnas. De acordo com (1) existem $\binom{96}{5}$ maneiras de fazer essa distribuição e portanto a probabilidade de que existam pelo menos duas dezenas consecutivas será dada por:

$$1 - \binom{96}{5} / \binom{100}{5} = 0,188125.$$

Conclui-se portanto que a probabilidade não é tão pequena como parecem acreditar as pessoas que reclamam da frequência com que esse evento ocorre. Em média, um em cada 5 ou 6 testes deverá apresentar dezenas consecutivas. Até o momento em que este trabalho estava sendo concluído tinham sido realizados 531

testes da Loto, dos quais 106 apresentaram dezenas consecutivas. A frequência observada foi portanto igual a 19,962%. Como a distribuição binomial com parâmetros $n = 531$ e $p = 0,188125$ tem um valor esperado aproximadamente igual a 100 e desvio padrão aproximadamente igual a 9, vemos que o valor observado 106 está perfeitamente dentro do que se poderia esperar teoricamente.

O leitor interessado em aprender um pouco mais sobre modelos de bolas e urnas poderá começar lendo o capítulo 2 do livro do Feller [1]. Um tratamento completo de modelos de urnas e suas aplicações pode ser encontrado no livro de Johnson & Kotz [2].

[1] W. FELLER

Introdução à Teoria das Probabilidades e suas aplicações.
vol. I Parte I
Editora Edgar Blucher, São Paulo.

[2] N. L. JOHNSON & KOTZ, S.

Urn Models and Their Application
John Wiley & Sons - New York, 1977.

Nota: Agradecemos ao Prof. Jair L. F. Santos da Faculdade de Saúde Pública da USP que nos forneceu uma listagem dos testes onde ocorreram dezenas consecutivas.