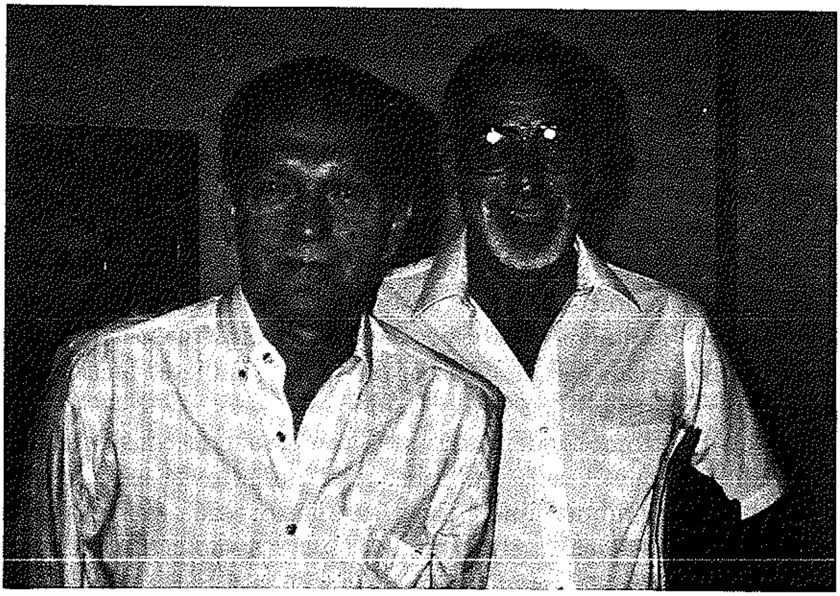
Spanier Comenta a Influência da Tese de Lima na Topologia Algébrica

Fazer parte da comemoração do sexagésimo aniversário de Elon Lages Lima é uma honra especial para mim. Agradeço aos organizadores pelo convite. Creio que todos nós conhecemos o significativo impacto na Matemática brasileira que Lima causou e continua causando, tanto como matemático quanto como professor e divulgador. Nem todos vocês, no entanto, devem estar a par da contribuição que sua tese trouxe à Topologia Algébrica. Como já tive o privilégio de ter Lima como estudante de doutorado, é sobre isto que quero falar hoje.

Quando Elon era estudante na Universidade de Chicago nos anos cinqüenta, eu estava envolvido em uma longa colaboração com J.H.C. Whitehead. Estávamos particularmente interessados na teoria da homotopia estável. Havíamos introduzido a categoria S, cujos objetos são os espaços topológicos X, usualmente CW-complexos finitos, cujos morfismos de X a Y, denotados por $\{X,Y\}$, são classes de homotopia estável de aplicações $f\colon S^kX \to S^kY$ (suspensão não-reduzida), para algum $k \geq 0$. Dadas $f\colon S^kX \to S^kY$ e $g\colon S^pX \to S^pY$ diz-se que são equivalentes em $\{X,Y\}$ se, para um n suficientemente grande, vale que $S^{n-k}f\colon S^nX \to S^nY$ é homotópica a $S^{n-p}g\colon S^n \to S^nY$.

Sabíamos que se X é um CW-complexo de dimensão $\leq 2n$ e Y é um espaço n-conexo, então $S\colon [X,Y] \to [SX,SY]$ é uma bijeção. Disso se segue que se X é um CW-complexo de dimensão finita, então $[X,Y] \approx [S^nX, S^nY]$ para n suficientemente grande.

A categoria S é semelhante à categoria de homotopia usual mas tem propriedades adicionais interessantes, por exemplo,



Elon Lages Lima e seu orientador Edwin Spanier.

$\{X,Y\}$ é sempre um grupo abeliano e a composição define a aplicação bilinear $\{Y,Z\} \times \{X,Y\} \to \{X,Z\}$ que leva (g,f) em $g \circ f$. A partir de sua definição é claro que existe um isomorfismo $S\colon \{X,Y\} \approx \{SX,SY\}$. Um fato importante é que para um CW-complexo finito X e n suficientemente grande existe um n-dual X^* de X tal que se Y^* é um n-dual de Y então existe um isomorfismo de dualidade $D_n\colon \{X,Y\} \approx \{Y^*,X^*\}$. Isto tornou precisa uma aparente dualidade na teoria de homotopia. D_n é involutiva e intercambia homologia e cohomologia.

Em sua tese, Elon considerou duas questões sugeridas por este trabalho. Uma era a de estender o teorema da dualidade de CW-complexos finitos para espaços mais gerais. A outra era de estender à categoria S resultados conhecidos para a categoria de homotopia, com o fim de encontrar objetos com um grupo de homotopia estável não-trivial e, se eles fossem encontrados, usá-los para obter uma decomposição de objetos à maneira de Postinikov, na categoria estável.

Elon conseguiu responder ambas as questões através do uso de *espectros*, uma generalização de espaço necessária para estender a S-categoria de tal forma que ela venha a ter objetos bastantes e suficientes para vários fins. É esta noção de espectro que se tem mostrado tão útil na Topologia atual.

A idéia básica é substituir um espaço por uma seqüência de espaços com aplicações que os entrelaçam. Este procedimento lembra vagamente a construção dos números reais a partir dos números racionais. Neste processo, estendemos os números racionais considerando classes de equivalência de seqüências de Cauchy de números racionais. Este processo de completar os racionais para obter os reais é análogo ao processo de completar a categoria dos espaços para obter a categoria dos espectros.

Vejamos como poderíamos ser levados a tais considerações. Suponhamos que X seja um subconjunto aberto de um poliedro compacto P. Subdividindo P em simplexos cada vez menores, obtemos uma seqüência crescente P_1 P_2 ... de poliedros compactos tais que $\cup P_i = X$ e $P_i \subset$ *interior* (P_{i+1}) para cada i. Se C é um espaço compacto e $f: C \to X$ é uma aplicação contínua qualquer, então existe algum i tal que $f(C) \subset P_i$. Portanto, toda aplicação contínua $f: C \to X$ se fatora através de P_i, para algum i, assim como as homotopias $C \times I \to X$ são igualmente fatoráveis através de P_i para algum i. Segue-se que o limite direto da seqüência de conjuntos de classes de homotopia

$$[C, P_1] \to [C, P_2] \to \dots$$

se aplica de forma biunívoca sobre o conjunto das classes de homotopia $[C, X]$. Portanto, a seqüência $P_1 \subset P_2 \subset \dots$ de poliedros compactos e as aplicações de inclusão entre eles "representa" X pelo menos na medida em que consideramos aplicações de espaços compactos neles.

Em sua tese, Elon definiu o *espectro direto* $\mathcal{U} = (U_i, \phi_i)$ como sendo uma seqüência de espaços $U_0, U_1, \dots$ junto com as aplicações $\phi_i: U_i \to U_{i+1}$. Com o objetivo de dualizar, ele usou S-aplicações de preferência a aplicações. O espectro é *celular* se todas as entradas U_i são CW-complexos finitos. Analogamente, um *espectro inverso (celular)* é uma seqüência de espaços (CW-complexos finitos) $X_0, X_1 \dots$ junto com S-aplicações $\psi_i: X_{i+1} \to X_i$ para cada i. Um espectro direto celular $\mathcal{U} = (U_i, \phi_i)$ e um espectro celular inverso $\mathcal{X} = (X_i, \psi_i)$ são p-duais se para cada i, U_i e X_i são p-duais tais que o isomorfismo de dualidade $D_p: \{U_i, U_{i+1}\} \approx \{X_{i+1}, X_i\}$ leva ϕ_i em ψ_i.

Elon provou que todo espectro celular de dimensão finita (i.e., todas as entradas são CW complexos finitos de dimensão $\leq n$ para algum n) tem um p-dual para todo p suficientemente grande e que essa dualidade estende a dualidade usual da S-teoria. Se X é um conjunto compacto de S^p, então X é representado por um espectro inverso de dimensão finita e $S^p - X$ é representado por seu dual que é um espectro direto de dimensão finita. Usando isto e os resultados da dualidade para espectros, ele mostrou que se X, Y são subconjuntos fechados de S^p, temos então um isomorfismo de dualidade $\{X, S^p - Y\} \approx \{Y, S^p - X\}$. A primeira parte de sua tese (E.L. Lima, *The Spanier-Whitehead duality in new homotopy categories*, Summa Brasiliensis Mathematicae 4, (1959), pp. 91-148) é dedicada a essas questões e a esta extensão da dualidade.

Na segunda parte, ele estudou a S-dualidade diretamente (E.L. Lima, *Stable Postinikov invariants and their duals*, Summa Brasiliensis Mathematicae 4, (1960), pp. 193-251) na S-categoria original. Também na extensão para os espectros considerada na primeira parte da tese, não parecem existir objetos que possuam exatamente um grupo estável não-trivial de homotopia. Para obter tais objetos é usada uma definição ligeiramente diferente do espectro que se adapta melhor à S-teoria.

Um *espectro direto* $\mathcal{X} = \{X_i, \phi_i\}_i = 0, 1, \ldots$ é uma seqüência $S_0, X_1, \ldots$ de CW complexos finitos junto com S-aplicações $\phi_i: S X_i \to X_{i+1}$ que possivelmente satisfazem alguma hipótese adicional de convergência. Aqui os complexos são todos com pontos básicos e as suspensões são reduzidas (mas esta não é uma diferença essencial). Se X é um espaço e $\mathcal{Y} = \{Y_i\}$ é um espectro direto, há um grupo abeliano de S-aplicações $\{Y, \mathcal{Y}\} = \varinjlim_j \{S^j X, Y_j\}$, o limite tomado com respeito às aplicações

$$\{S^j X,\, Y_j\} \xrightarrow{S} \{S^{j+1} X,\, SY_j\} \to \{S^{j+1} X,\, Y_{j+1}\}.$$

Por exemplo, os grupos de homotopia do espectro X, denotados por $\Sigma_p(\mathcal{X})$, são definidos por $\Sigma_p(X) = \{S^p, \mathcal{X}\}$. Se $\mathcal{X} = \{X_i\}$, $\mathcal{Y} = \{Y_i\}$ são espectros diretos, o grupo de S-aplicações $\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$ é definido por $\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\} = \varprojlim \{X_i, S^i \mathcal{Y}\}$ (onde $S^i \mathcal{Y} = \{Y_i, Y_{i+1}, \ldots\}$

para $i \geq 0$) com respeito a

$$\{X_{i+1}, X^{i+1}\mathcal{Y}\} \underset{\approx}{\rightarrow} \{SX_i, S^{i+1}\mathcal{Y}\} \overset{S}{\leftarrow} \{X_i, S^i\mathcal{Y}\}.$$

Desta forma, há uma categoria de espectros diretos e S-aplicações entre eles. Elon mostrou que a teoria de obstrução pode ser realizada nesta categoria, que existem objetos com um grupo de homotopia não-trivial, que existem decomposições de espectros do tipo Postinikov e que, em geral, os teoremas usuais da teoria de homotopia são transferíveis à nova categoria. Analogamente, Elon formulou uma categoria de espectros inversos que é dual à categoria dos espectros diretos.

A idéia de Lima de ampliar a S-categoria por meio de espectros é uma idéia natural e provou ser útil imediatamente. Um ano depois da tese de Lima eu usei os espectros para refazer o teorema da dualidade usando um espectro que consistia dos espaços funcionais de alicações de um espaço fixo S nas esferas S^i. (E. Spanier, *Function spaces and duality*, Annals of Mathematics (2) 70, (1959) pp. 338-378). Logo depois, George Whitehead usou os espectros para mostrar que as teorias de cohomologia generalizada poderiam ser representadas por espectros convenientes (G. Whitehead, *Generalized homology theories*, Transactions of the American Mathematical Society, 102, (1962), pp. 227-283). Em cada caso os espectros envolvidos eram espectros diretos (talvez satisfazendo alguma hipótese adicional sobre as aplicações que ligam os espectros). Whitehead também mostrou como definir teorias homológicas associadas a um espectro, provendo, por conseguinte, uma base segura para teorias generalizadas de homologia e cohomologia.

Desse ponto em diante, pessoas que trabalham com a teoria de homotopia estável como Boardman e Adams, usaram espectros desde o princípio para obter categorias nas quais todas as construções naturais necessárias à teoria homotópica pudessem ser transferidas. Adams, por exemplo, provou a existência da seqüência espectral de Adams em teoria de homotopia estável usando espectros.

Desde sua introdução, os espectros vêm tendo um papel importante na teoria generalizada de homologia e cohomologia e no estudo da estrutura algébrica da teoria de homotopia estável. Eles se tornaram objetos tão familiares que muitas vezes acontece que ocorram sem ser definidos, estando subentendido que o leitor conhece a definição. É claro que as técnicas introduzidas por Lima em sua tese tiveram um impacto duradouro na Topologia e continuarão a representar um papel importante em desenvolvimentos futuros.