Artigos

Matemática Universitária Nº 9/10, dezembro de 1989

O Sistema Solar é Estável?

Jürgen Moser

Eidgenössische Technische Hochschule
Zurique - Suiça

Este artigo está baseado na primeira das três Conferências Pauli, feitas na Eidgenössische Technische Hochschule, de Zurique, em janeiro de 1975. Foi publicado pela primeira vez em alemão, na Neue Zürcher Zeitung, de 14 de maio de 1975, depois em inglês na Revista The Mathematical Intelligencer, vol. 1, nº 2 (1978). A presente tradução, pelo Professor João Bosco Pitombeira, foi feita desta última publicação, de onde também reproduzimos as figuras.

1. O Problema da Estabilidade.

O problema da estabilidade na Mecânica Clássica, ou seja, o problema da estabilidade do sistema solar, vem fascinando astrônomos e matemáticos há séculos. Ele trata simplesmente de se saber se o sistema planetário manterá sua configuração atual no futuro longínquo, ou se, ao contrário, após muitos séculos, talvez um ou alguns dos planetas possam desgarrar-se do sistema solar, ou se colisões produzirão mudanças catastróficas. Desde Newton, ou seja, desde aproximadamente 300 anos, são conhecidas as leis que governam os movimentos planetários. Em uma primeira aproximação , os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol localizado em um dos focos da elipse. No entanto, isto é apenas uma aproximação grosseira do movimento real dos planetas. As forças de atração entre eles causam perturbações, de maneira que as formas destas órbitas elípticas se modificam constantemente, embora muito lentamente. A descrição destas mudanças, as chamadas *perturbações seculares*, é o problema tratado na teoria clássica das perturbações. Por outro lado, é concebível que as forças relativamente fracas entre os planetas poderiam, após um tempo suficientemente longo, alterar de tal maneira as órbitas de hoje que um planeta poderia ser lançado fora do sistema solar ou que ocorresse uma colisão entre planetas. Por exemplo, pode-se imaginar que a excentricidade da órbita de um planeta possa aumentar continuamente até que seu periélio se aproxime tanto do sol que isso acarrete uma calamidade para o planeta. Embora um tal acontecimento não coincida com nossas observações nos últimos milênios, trata-se de algo completamente diferente *demonstrar* matemáticamente, a partir das equações do movimento, que isso não pode acontecer.

Em verdade, a literatura já contém uma quantidade considerável de demonstrações de estabilidade. Uns 100 anos após a publicação dos *Principia* de Newton, Lagrange apresentou sua famosa demonstração da estabilidade do sistema solar. Outras demonstrações desse tipo foram dadas por Laplace e Poisson, e pode-se muito bem perguntar por que o problema está sendo mais uma vez formulado, 200 anos mais tarde. Em geral, uma demonstração é suficiente, e a apresentação de várias demonstrações diferentes tende a fazer com que o ouvinte cético suspeite de que algo não está correto. Em verdade, trata-se aqui de aproximações de vários graus de exatidão nas quais as forças perturbadoras são levadas em conta somente na primeira ou segunda potência das massas planetárias. Na prática, isso significa que as mudanças nas órbitas elípticas exigirão um tempo considerável antes de se tornarem observáveis. Sommerfeld menciona sucintamente, em seu livro com F. Klein, a "demonstração fingida" de Laplace (Scheinbeweis) da estabilidade do sistema planetário. Resta saber quão justificáveis são estas aproximações. Quando restringimos nossa atenção a poucas décadas ou séculos, estas demonstrações de estabilidade certamente dão resultados corretos, mas delas não se podem tirar conclusões naturais sobre o movimento daqui a muitos milhões de anos. Anteriormente, estava-se em geral menos interessado em previsões a longo prazo e mais interessado no cálculo das posições dos planetas, as chamadas "efemérides" – um problema que já interessava aos babilônios. A teoria da perturbação é em verdade uma conseqüência da necessidade de determinar-se as órbitas com exatidão cada vez maior. Este problema pode ser resolvido atualmente, mas de maneira bem desalentadora para o teórico. Com computadores modernos, podemos agora calcular diretamente resultados até mais exatos do que os fornecidos pela teoria das perturbações. Hoje, as efemérides do *Nautical Almanac* em Washington são calculadas desta maneira.

Mas isso é somente o começo do problema matemático. Uma técnica usual e bem sucedida em Matemática consiste em extrair as propriedades essenciais de um problema e idealizá-lo. Não tratamos de planetas do sistema solar, que são em verdade massas distribuidas no espaço, e desprezamos muitos tipos de forças, como por exemplo o vento solar e os efeitos relativísticos. Em lugar disso, consideramos um problema idealizado e estudamos n massas pontuais, que se movem no espaço tri-dimensional de acordo com as leis de Newton. Na maior parte dos casos supomos além disso que $n-1$ destas massas pontuais fictícias têm *massas muito pequenas* comparadas com a restante, que desempenha o papel de Sol. Além disso, não procuramos a determinação do movimento durante um certo tempo limitado, mas durante *toda a eternidade.* Temos agora um problema puramente matemático, cuja solução tem um significado bem limitado no mundo real, mas que acarreta, devido à exigência de acharmos uma solução válida para todo o futuro, sutilezas surpreendentes. Mesmo este problema idealizado foi formulado pelo menos há 100 anos atrás e é conhecido de maneira algo vaga como o problema dos n corpos. No século passado este problema teve grande interesse, e como mostraremos, Dirichlet – que é hoje mais conhecido por seus trabalhos monumentais em teoria dos números – e Weierstrass, o estudioso da teoria das funções, da mesma maneira que Poincaré, um matemático universal, desempenharam papéis essenciais no tratamento deste problema. Trata-se portanto de descrever o comportamento das perturbações seculares em intervalos de tempo muito grandes, e mesmo durante toda a eternidade. Será que mudanças nas formas e nas posições das órbitas podem alterar completamente a configuração do sistema planetário? Lagrange provou, em páginas relacionadas com sua demonstração de estabilidade, que estas perturbações estão sujeitas a *oscilações periódicas* e assim não crescem sem limites. Os períodos destas oscilações são relativamente grandes, exigindo de 5×10^4 a 2×10^6 anos. Mas devemos além disso mencionar que estamos lidando aqui com uma aproximação, e que em certo sentido esta afirmativa pode ser considerada como um refinamento da antiga descrição das órbitas planetárias por epiciclos.

No entanto, o que acontecerá em intervalos de tempo de *vários milhões de anos?* Trata-se de um problema de ressonância em que os oitos planetas desempenham o papel de osciladores. Sabemos que ressonância ocorre quando lidamos com um sistema com uma freqüência que coincide com uma das freqüências próprias do sistema ou com um seu múltiplo inteiro. O fenômeno mais simples de ressonância é o de aumentar as oscilações de um balanço. Com forças relativamente pequenas, que são aplicadas periodicamente com a freqüência do balanço, pode-se aumentar a amplitude das oscilações tanto quanto queiramos, e pode-se mesmo fazer com que o balanço dê uma volta completa. No caso do sistema solar, tais fenômenos desempenham também um papel importante. Com efeito, como não há praticamente atrito, qualquer oscilação, uma vez imprimida, nunca é amortecida. Esta é a razão por que os efeitos de ressonância são tão sutis em sistemas sem amortecimento, em contraste com todos os experimentos físicos do dia-a-dia – ou de balanços. No nosso sistema solar há muitas ressonâncias. Por exemplo, sabe-se que Júpiter e Saturno têm freqüências na razão de mais ou menos 5/2, de maneira que durante 5 revoluções de Júpiter, Saturno completa exatamente 2 revoluções e as forças após este período continuam a agir na mesma direção. Isso tem realmente um efeito na órbita de Júpiter, uma perturbação cujo período é, em primeira aproximação, de mais ou menos 900 anos.

Em verdade, deve-se esperar tais ressonâncias para todas as razões de freqüência racionais, e mesmo nos casos em que uma combinação linear com coeficientes inteiros das freqüências se anula (freqüências comensuráveis). Naturalmente isto é absurdo, pois em verdade os números racionais são densos, e de um ponto de vista físico, não se pode distinguir entre freqüências racionais e irracionais. Por outro lado, o tratamento matemático exige uma tal distinção, e chegamos a uma situação paradoxal. As equações do movimento no problema dos n corpos são muito fáceis de serem escritas, mas impossíveis de serem compreendidas intuitivamente.

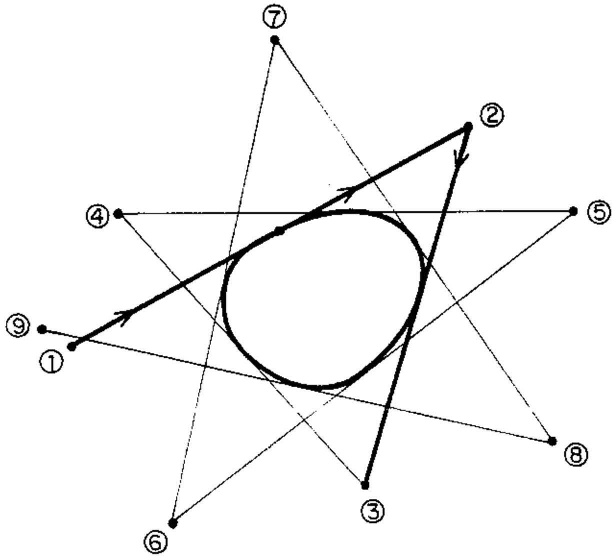


Figura 1.

Assim talvez seja útil descrever um problema geométrico muito simples que contenha algumas das dificuldades do problema dos n corpos e que possa servir como modelo grosseiro dos movimentos planetários (Figura 1).

Consideremos uma oval no plano e definamos o "movimento órbita" no exterior da oval como segue. Traçamos, a partir de um ponto 1 no exterior da oval, uma das duas tangentes à oval, e a prolongamos até o ponto 2, cuja distância ao ponto de tangência é igual à distância de 1 a este mesmo ponto de tangência. De 2, traçamos uma tangente à oval e marcamos, de maneira análoga, o ponto 3. Prosseguindo desta maneira, obtemos a "órbita" do ponto 1. Esta seqüência de pontos permanece em uma região limitada do plano? Isso seria o análogo ao problema da estabilidade. Embora este problema pareça muito elementar, é em verdade muito difícil. Pode-se mostrar que, para curvas suficien-

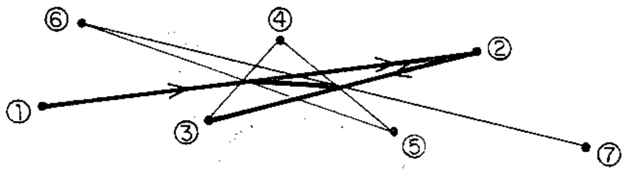


Figura 2.

temente suaves (que têm cinco derivadas) e com curvatura positiva as órbitas são sempre limitadas, isto é, temos estabilidade.

É notável que neste problema simples a suavidade da curva seja relevante. O que acontece se aceitarmos vértices nesta curva? Os casos mais simples são os dos polígonos. Em verdade, a aplicação não é contínua neste caso, mas o problema de estabilidade continua a fazer sentido. No caso de polígonos quaisquer, no entanto, o problema de saber se as órbitas são ou não limitadas permanece aberto. Mas há dois casos especiais que podem ser tratados completamente:

1) Quando a oval é degenerada, transformando-se em um segmento de reta, qualquer órbita tende para o infinito, ao longo de duas retas (Fig. 2).

2) Quando a oval é um triângulo, então todas as órbitas são fechadas mas têm períodos diferentes. Pontos pertencentes a órbitas com o mesmo período formam hexágonos e triângulos que constituem uma tecelagem interessante do plano. Pontos sobre os hexágonos têm períodos $3, 9, 15, 21, \ldots$, em geral ($3(2j-1)$, $j = 1, 2, \ldots$). Os pontos sobre os triângulos têm períodos $12, 24, 36, \ldots$, em geral $12j$, $j = 2, 3, \ldots$ (Fig. 3).

O problema pode também ser facilmente tratado no caso do quadrado, mas permanece aberto mesmo para um quadrilátero qualquer.

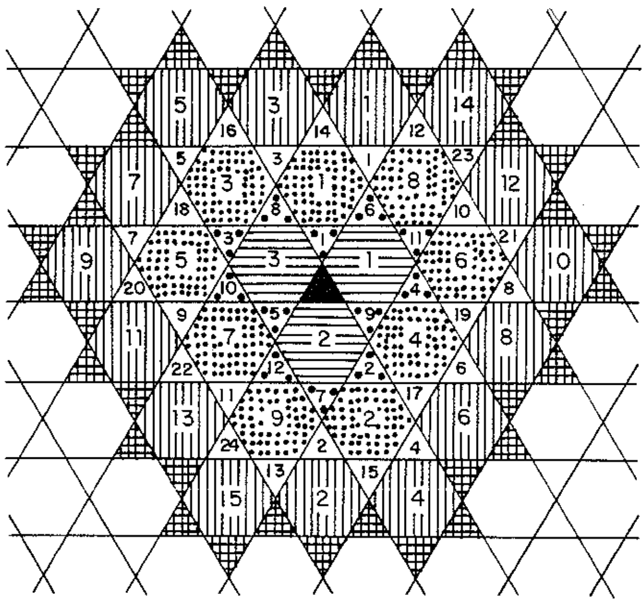


Figura 3.

2. O Problema e seu Prêmio.

Voltemos ao movimento planetário, à formulação matemática do problema e a sua solução. Tenta-se descrever as coordenadas das perturbações seculares analíticamente usando *Séries de Fourier* generalizadas. São séries cujos termos são da forma

$$A_j \cos(j_1\omega_1 + \ldots + j_m\omega_m)t + B_j \sin(j_1\omega_1 + \ldots + j_m\omega_m)t$$

com certas freqüências $\omega_1, \ldots, \omega_m$ e freqüências combinadas $j_1\omega_1 + \ldots + j_m\omega_m$. Este ponto de vista não está muito distanciado da teoria dos epiciclos, mas é matematicamente mais preciso. Tais funções são hoje conhecidas como funções quase-periódicas. Em verdade, vários matemáticos, como Weierstrass, conseguiram obter tais desenvolvimentos em séries formalmente, supondo que $\omega_1, \ldots, \omega_m$ fossem incomensuráveis (ou seja, que suas razões fossem irracionais). Mas estas séries podiam não convergir e portanto sua utilidade era posta em dúvida. Por outro lado, quando convergem elas descrevem as pequenas oscilações nas variações da elipse. Mudanças descritas desta maneira permanecem sempre dentro de limites dados.

O problema matemático pode ser descrito como segue: "Dado um sistema arbitrário de n massas pontuais que se atraem mutuamente segundo as leis de Newton, e supondo que dois quaisquer dos pontos dados nunca colidem, determinar coordenadas de cada um dos pontos em um instante qualquer, escritas como somas de séries uniformemente convergentes cujos termos são constituídos por funções conhecidas". Esta é a tradução do problema de um prêmio que o Rei Oscar II da Suécia instituiu em 1885, ou seja, há 90 anos atrás. O prêmio foi concedido a Henri Poincaré, embora ele não tenha realmente resolvido o problema. Seu grande trabalho mostrou em verdade que tais desenvolvimentos em séries, ao contrário de todas as expectativas, divergem, e portanto não existem. Mais surpreendente ainda é saber que um jovem e excelente matemático de aproximadamente 25 anos conseguiu resolver este problema e provar a existência de tais soluções de maneira completamente rigorosa, pelo menos no caso do problema dos 3 corpos! Este matemático, V. I. Arnold, tinha sido estudante de Kolmogorov, que poucos anos antes tinha lançado a pedra fundamental da demonstração. Mais precisamente, o passo decisivo estava naturalmente baseado no trabalho de muitos outros matemáticos, e essencialmente as idéias recuam aos resultados de Poincaré.

Na década dos 40 Siegel resolveu o primeiro problema deste tipo. Sua formulação do problema era, no entanto, mais idealizada e não era realmente aplicável a problemas mecânicos. Em 1954 Kolmogorov indicou que, para certos sistemas mecânicos, em um certo sentido a *maioria* das soluções são quase-periódicas. Ele indicou um possível método de solução , mas a demonstração foi fornecida pela primeira vez por Arnold 8 anos mais tarde, e, em um caso especial, pelo autor deste artigo. De acordo com o uso moderno, esta teoria tornou-se conhecida pela sigla KAM. (Kolmogorov, Arnold, Moser). O resultado principal desta teoria garantiu a existência de tais soluções quase-periódicas para certas classes de equações diferenciais que incluem o problema dos n corpos. Os desenvolvimentos em séries que interessam são convergentes para certas escolhas das freqüências, mas não têm sentido para outras freqüências. Este último resultado já tinha sido estabelecido por Poincaré. As órbitas que admitem uma tal representação são precisamente aquelas em que não ocorrem ressonâncias. No entanto, como tais órbitas sem ressonâncias podem estar arbitrariamente próximas das outras, é inteiramente possível que uma perturbação arbitrariamente pequena nos valores iniciais transforme uma órbita quase-periódica estável em uma instável. Pode-se contudo mostrar que as órbitas instáveis são muito mais raras, ou, como seria dito mais tecnicamente, têm medida relativamente pequena no espaço de fase. Isso significa que somos levados a considerar um novo *conceito de estabilidade* em que a restrição se aplica somente à maioria de certas órbitas. Saber se as órbitas mais raras instáveis e excepcionais realmente existem ainda é um problema aberto. Devemos dizer logo – e isso será mostrado no que se segue – que este conceito enfraquecido de estabilidade tem muita significação e é satisfatório para as aplicações físicas.

3. Novas Aplicações.

Mas o que é que constituiu realmente um progresso? Se a determinação das órbitas pode ser feita de maneira muito boa usando computadores, uma tal demonstração parece ser *supérflua* ou pelo menos *historicamente atrasada.* Podemos dar a seguinte resposta a estas objeções:

1. A estabilidade de sistemas não amortecidos, *sem limite de tempo*, não pode, em princípio, ser decidida por meio de cálculos e *está portanto fora do alcance de computadores.*
2. Contudo, o mais importante é que um tal resultado, por si próprio do maior interesse do ponto de vista matemático, é também de importância essencial em pesquisas teóricas de *Mecânica Estatística.* O desenvolvimento da Mecânica Estatística conduziu à expectativa de que a maioria dos sistemas mecânicos, pelo menos quando são constituídos por um número suficientemente grande de partículas, são ergódicos, isto é, após um tempo suficientemente longo seu comportamento é inteiramente independente das condições iniciais. Isto constitui, contudo, um contraste marcante com a estabilidade. Em verdade, os físicos, utilizando este ponto de vista, tentaram no século passado mostrar que quase todos os siste-

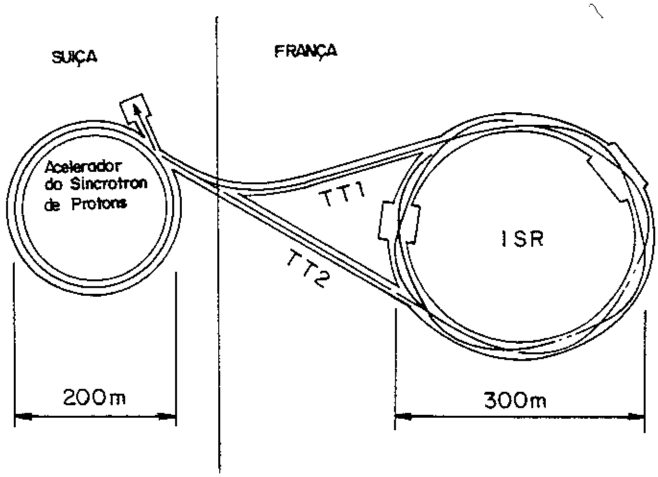
mas mecânicos têm este comportamento instável, desde que se aguarde bastante tempo. Que isso *não* acontece no caso de muitos sistemas realistas ficou agora demonstrado de uma vez por todas devido aos trabalhos da última década.

3. Finalmente, há uma terceira razão que parece mais ou menos uma coincidência: os teoremas matemáticos da KAM tratam não somente do sistema planetário, mas também de sistemas hamiltonianos gerais (portanto, de sistemas que descrevem processos de movimento não amortecido) e podem portanto ser aplicados a muitos *outros problemas.* Essa é precisamente a vantagem de uma formulação matemática geral. Uma destas aplicações é o problema de estabilidade de aceleradores de prótons, muitos dos quais estão sendo construídos desde a década de 50, e cada vez maiores. A finalidade destas máquinas é acelerar elétrons ou prótons a velocidades extremamente altas e então lançá-los contra um alvo a fim de observar os resultados da desintegração resultante, ou seja, novas partículas elementares. Quanto maior a energia da partícula, mais interessantes serão as observações . A fim de atingir estas altas velocidades, os protons são mais e mais acelerados em um canal circular até que atinjam uma velocidade próxima à velocidade da luz. Estes canais, no caso do sincrotron de protons no CERN de Geneva, têm uma circunferência de mais de 600 metros; o ar é retirado deles a fim de obter vácuo quase perfeito para evitar colisões com as moléculas de gás. Cria-se um campo magnético por meio de uma série de imãs, e este campo mantém partículas em uma trajetória quase circular. Isso conduz a um problema de estabilidade, pois o campo magnético deve ser construído de tal maneira que os protons não se desviem muito de uma trajetória circular ideal, perdendo energia nas paredes da câmara. No processo, as partículas percorrem a câmara de vácuo milhões de vezes.

O problema da estabilidade é parte essencial na construção destes aceleradores. Embora no princípio fosse suficiente realizar experimentos com computadores, tornou-se logo claro que após as primeiras iterações os erros computacionais inevitáveis caiam fora de controle, e se tornava impossível seguir ou predizer melhor as trajetórias. Eram necessários *resultados teóricos* que mostrassem que se poderia garantir a estabilidade de um tal sistema em um intervalo de tempo muito grande, e esse é precisamente o significado da teoria que estamos discutindo. O último estágio neste desenvolvimento é representado pelos chamados anéis de armazenamento, um dos quais está funcionando no CERN desde 1971 (Fig. 4). Falando grosseiramente, trata-se de acelerar protons em dois canais circulares em direções opostas e então lançar um contra o outro. Desta maneira a energia disponível não é somente duplicada, como se esperaria, mas sim, devido a efeitos relativísticos, é elevada ao quadrado. A fim de conseguir o movimento de protons em direções opostas, liga-se um destes canais de armazenamento (ISR - intersecting storage rings), ao sincrotron de protons e introduzem-se pacotes de protons no anel de armazenamento, alternadamente em cada uma das duas direções opostas. Eles são então armazenados no anel, um processo que pode durar de 3 a 11 horas, até que seja efetuada a colisão.

A construção desta máquina apresenta dificuldades técnicas inacreditáveis, que fariam empalidecer até mesmo fabricantes de relógios suiços. Há aqui uma comparação óbvia que é de importância para nosso problema de estabilidade.

Durante o processo de armazenamento, os pacotes de protons devem orbitar de 10^{10} a 10^{11} vezes em torno da órbita circular e durante todo este tempo devem permanecer em um túnel de 16 por 5,2 centímetros. Quando transformamos um circuito dos protons no anel de armazenamento com um ano no problema astronômico, então o número acima representa um tempo que ultrapassa a idade da Terra. Ou seja, usando-se esta analogia, pode-se seguir os protons durante mais tempo do que o tempo de existência do sistema solar em sua forma presente. Além disso, o físico experimental ou o técnico podem alterar à vontade as condições ou os parâmetros. Discutimos este exemplo aqui porque ele exige estabilidade durante intervalos de tempo que excedem qualquer coisa imaginada em astronomia 100 anos atrás, e portanto em um certo sentido, ele justifica o problema idealizado de estabilidade para tempos infinitos, se realmente tal justificativa for necessária. Quando se aplicam os resultados da teoria KAM a esta situação, verifica-se que a maioria dos protons acelerados se conserva dentro do círculo dos anéis de armazenamento, mas órbitas excepcionais relativamente raras conduzem a uma perda lenta e muito leve nos feixes



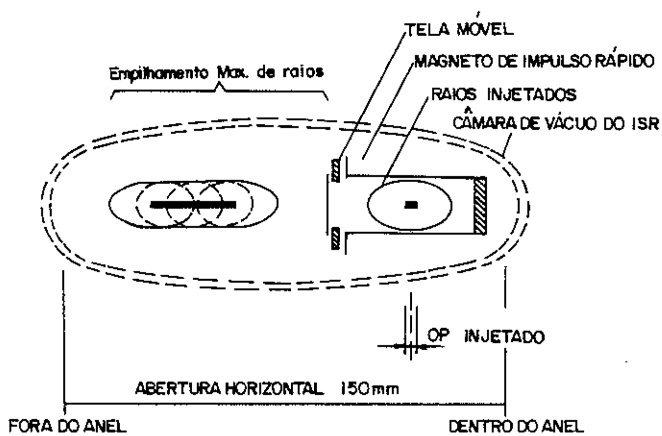


Figura 4.

de protons. De qualquer maneira, tais perdas são inevitáveis e são também observadas. Se estas órbitas excepcionais podem ser responsabilizadas pelas perdas é uma questão que deve ainda ser encarada como problema em aberto, devido ao fato de que muitas forças e efeitos adicionais que afetam as partículas e podem desviá-las foram desprezados. Tais aplicações podem fornecer um estímulo forte à pesquisa matemática. Deve-se certamente perguntar como é que este problema de estabilidade bem antigo foi repentinamente resolvido, quando estava perdendo interesse para os astrônomos. Pode-se levantar a hipótese de que o desenvolvimento dos aceleradores de protons influenciou o renascimento deste problema.

4. A Estabilidade de Órbitas Periódicas.

Desejamos descrever outro fenômeno de ressonância, que ocorre em Astronomia e em Física de altas energias. É o problema da estabilidade das *órbitas periódicas*, ou seja, das soluções que após um certo tempo readquirem suas configurações iniciais. Pedem-se condições que garantam que todas as órbitas cujas condições iniciais estão próximas da órbita periódica permaneçam sempre próximas da órbita periódica. Tais órbitas são chamadas de estáveis. Somente tais órbitas estáveis são normalmente observadas. O melhor exemplo é a órbita circular em um anel de armazenamento descrita acima. Pequenas perturbações não deveriam acarretar grandes desvios. A fim de determinar se estas órbitas circulares são estáveis, devem-se usar as chamadas freqüências de betatron ω_r, ω_z e a freqüência orbital ω_i que pertence às oscilações do sistema linearizado. A teoria mostra que em geral ocorrerá ressonância não-linear ou instabilidade quando as freqüências satisfazem uma relação

$$n\omega_r + m\omega_x = p\omega_0$$

com números inteiros n, m, p para os quais $|n| + |m| \leq 4$; por outro lado, relações deste tipo com $|n| + |m| > 4$ não acarretam problemas. Verifica-se experimentalmente que de fato no primeiro caso se observa uma perda no feixe, mas no segundo esta perda é desprezível. Falando informalmente, ressonâncias de ordens menores ou iguais a 4 são em geral perigosas, enquanto que as de ordens maiores do que 4 são inofensivas.

Um fenômeno análogo ocorre em Astronomia. Como é bem conhecido, além dos planetas, há *muitos milhares de asteróides* que orbitam o Sol; suas órbitas se encontram principalmente entre as de Marte e Júpiter. Suas massas são minúsculas, e portanto não exercem influência sobre os planetas. Por outro lado, os asteróides são substancialmente perturbados por Júpter. Isso é evidenciado

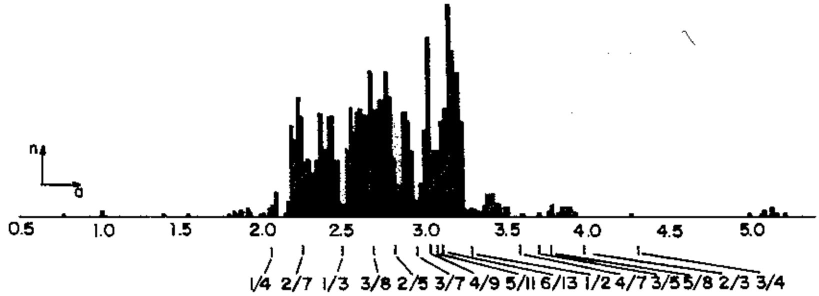


Figura 5.

por uma observação feita por Kirkwood. Ele observou que as freqüências dos asteróides não estão uniformemente distribuidas em um intervalo, mas que há certas falhas, as chamadas falhas de Kirkwood (Figura 5). Pode-se considerar a situação análoga à dos anéis de Saturno, que realmente apresentam um fenômeno semelhante. Se o movimento médio dos asteróides for representado por ω_a e o de Júpter por ω_j, então as falhas mais pronunciadas são dadas pela fórmula

$$\frac{\omega_j}{\omega_a} = \frac{n}{m}, \quad |n-m| = 1, 2, 3, 4$$

e isso indica que se trata de um movimento de ressonâncias de ordem < 4. Resta caracterizar as órbitas periódicas cuja estabilidade corresponde às condições acima. Supomos que Júpiter descreva uma órbita circular exata e que os asteróides se movem em uma órbita quase circular no mesmo plano, de tal maneira que a configuração, ou seja, o triângulo formado pelo Sol, Júpiter e o asteróide retoma sua posição original após um certo período de tempo. Tais órbitas periódicas já tinham sido deduzidas por Poincaré. As órbitas para as quais a ressonância dada acima não ocorre são estáveis, de maneira que a explicação é óbvia: as falhas correspondem a órbitas instáveis. Embora estas sejam aproximações grosseiras da situação real, conseguem no entanto refletir bem o fenômeno das falhas. A explicação matemática deste fenômeno é dada rigorosamente pela teoria KAM, embora a idéia essencial possa ser encontrada já nos trabalhos de Birkhoff, que continuou o trabalho de Poincaré.

5. Observações Históricas.

O seguinte esboço histórico ilumina o problema da estabilidade e seu desenvolvimento dramático. Estas observações foram estimuladas pela circunstância feliz de que as cartas de Weierstrass a Sonya Kowalevsky foram publicadas há pouco tempo. Estas cartas contêm muito material interessante sobre nosso assunto, material este que é muito pouco conhecido, mesmo por matemáticos. Weierstrass desempenhou um papel central na vida matemática da segunda metade do século 19, e matemáticos de todo o mundo ocorriam a Berlim para assistir as suas aulas. Seu interesse principal e o trabalho de sua vida foram a teoria das funções, mas ele também se interessava seriamente por Astronomia e deu, em 1880/1881, um seminário sobre teoria das perturbações em Astronomia. Suas idéias sobre este assunto, e principalmente sobre o problema da estabilidade, foram descritas em várias cartas a Sonya Kowalesky. Devido ao fato de que Weierstrass publicava seus resultados muito relutantemente e somente após revisões amplas e exaustivas, estas comunicações informais são particularmente valiosas.

Sonya Kowalesky chegou a Berlim, vinda da Russia, com 20 anos, para estudar Matemática. Certamente não era comum aceitar estudantes mulheres em Berlim, e ela foi proibida de assistir às aulas, com o resultado de que Weierstrass lhe dava aulas particulares. Devido a isso, surgiu entre ambos uma estreita amizade que perdurou até o fim da vida de Kowalesky. Além disso, Kowalesky tornou-se uma matemática bem conhecida e famosa, e assumiu a posição de Professora Titular de Matemática em Estocolmo, embora infelizmente somente dois anos antes de sua morte prematura aos 41 anos de idade. Além de comunicações pessoais, as cartas de Weierstrass para Sonya Kowalesky contêm um grande número de idéias e propostas matemáticas para sua aluna, fornecendo uma percepção muito valiosa sobre a maneira de pensar de Weierstrass. Além disso, como por exemplo na carta de 15 de agosto de 1878, encontram-se também indicações bem específicas de que já naquela data ele conhecia o desenvolvimento em séries formais para as soluções quase-periódicas no problema dos n corpos, e estava se ocupando com o problema de sua convergência. Com isso, não podem restar dúvidas de que Weierstrass estava na pista do problema que finalmente foi agora resolvido.

Por que Weierstrass tinha tanta confiança de que suas representações em séries convergiam? Isso também é conhecido. Dirichlet, que foi o sucessor de Gauss em Göttingen, já tinha dito a seu aluno Kronecker, em 1858, que tinha descorberto um novo método completamente geral para atacar e resolver problemas de Mecânica. Dirichlet morreu no ano seguinte, sem deixar nada escrito sobre suas descobertas, mas Kronecker divulgou as observações de Dirichlet ao mundo matemático, que tentou recuperar sua idéia perdida. Hoje, relacionamos o nome de Dirichlet principalmente com a teoria dos números, que era realmente seu principal interesse, enquanto seus trabalhos em Física Matemática são menos conhecidos. Eles incluem os fundamentos da teoria das séries de Fourier, as configurações de equilíbrio de fluídos em rotação, trabalhos de Hidrodinâmica, critérios de estabilidade para o equilíbrio e outros. Como as publicações de Dirichlet eram conhecidas pelo rigor total de seus métodos e demonstrações, havia poucas dúvidas de que suas observações não devessem ser encaradas seriamente, e Weierstrass interessou-se particularmente em esclarecer o assunto e recuperar este tesouro. Quando, em 1885, devido à influência de Mittag-Leffler, foi instituido um prêmio para uma descoberta matemática importante, Weierstrass propôs exatamente este problema para o concurso, como já mencionamos. O comitê do prêmio consistia em Weierstrass, Hermite e Mittag-Leffler. Isso conduziu então ao famoso trabalho de Poincaré, de mais de 200 páginas, que deve grande influência sobre o desenvolvimento posterior do assunto. Mas Weierstrass, embora externando a maior admiração por este trabalho de Poincaré, ficou desapontado, pois Poincaré mostrou que os desenvolvimentos em séries na teoria das perturbações *divergem em geral* e assim as esperanças de Weierstrass pareciam ter caido por terra. A propósito, estes fenômenos de divergência pouco incomodaram Poincaré, que os venceu de maneira muito audaz. Os desenvolvimentos em séries assintóticas que se usam na teoria dos escoamentos e em outros assuntos aplicados provêm das idéias de Poincaré, como também o uso de séries divergentes em cálculos numéricos. Weierstrass, ao contrário, atacou sem tréguas o problema da convergência e descobriu que, embora as deduções de Poincaré estivessem corretas, não demonstravam a divergência das séries em estudo. A existência de teoremas para soluções quase-periódicas, que conhecemos agora, diz precisamente que tais séries realmente convergem para certas freqüências, e isso era precisamente onde Weierstrass queria chegar. Assim, 70 anos mais tarde, este problema de Weierstrass tem finalmente solução positiva. Naturalmente não é mais possível determinar se os novos resultados coincidem realmente com as tentativas de Dirichlet ou estão relacionadas com elas.

O que foi dito aqui não deveria fornecer a impressão falsa de que a Matemática se guia somente por tais aplicações práticas ou que a justificação de sua existência é a solução de tais problemas. É a interação de várias áreas de estudo que sempre conduz a novos conceitos. O sistema solar é estável?

Rigorosamente falando, a resposta continua desconhecida, e no entanto este problema conduziu a resultados muito profundos que são provavelmente mais importantes do que a resposta ao problema original.