

Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana

Djairo G. de Figueiredo

Instituto de Matemática – UNICAMP
Caixa Postal 6065
13.081 – Campinas, SP

Ao Elon

O presente trabalho está dividido nas seguintes seções:

1. Introdução.
2. Maximizando a área, minimizando o perímetro de triângulos.
3. Maximizando a área, minimizando o perímetro de polígonos.
4. A desigualdade isoperimétrica.
5. O Princípio de Fermat e as leis da Ótica Geométrica.
6. O Cálculo Diferencial e os problemas de máximo e mínimo.
7. A braquistócrona.
8. Epílogo e Prelúdio.

1. Introdução.

Alguns anos atrás encontrei num sebo do Recife o livro “Elementos de Geometria” de autoria de F. I. C.. Em letras miúdas, abaixo dessas iniciais, lia-se “Frère Ignace Chaput”, provavelmente um jesuíta. A visão daquele volume desgastado, mais pelo tempo do que pelo uso, fez bater forte meu coração! Pertencço àquela geração de alunos brasileiros do curso secundário (1º e 2º graus atuais) que esteve precisamente na transição entre os textos de F. T. D. e F. I. C. e os livros escritos pelos autores brasileiros. Como em todo processo de transição, muito se

ganhou e também muito se perdeu. Sem dúvida, o início de uma literatura matemática brasileira foi um sinal de nosso desenvolvimento matemático, que começava a tomar momento, e que, como não poderia deixar de ser, começava pela matemática elementar. Por outro lado, a ausência, naquela época, de uma forte escola de matemáticos no país implicou no aparecimento de textos um tanto superficiais, com algumas raras exceções (tenho boas lembranças dos livros dos Quatro Autores). O meu interesse no livro de F. I. C. vai além do "hobby" de colecionador. A meu ver, a apresentação rápida dos fundamentos e a passagem imediata para "verdadeiros" teoremas é o que interessa ao aluno do curso secundário. Os teoremas, que parecem evidentes quando se olha a figura, deixam o aluno iniciante confuso do que é realmente uma demonstração. A insistência de se apresentar a geometria axiomáticamente, desde seus postulados, com o pretexto de ensinar ao aluno o método dedutivo, parece-me que mais afugenta do que atrai o estudante. Não sou do grupo "Abaixo Euclides", que surgiu na década de 1960, no auge da Matemática Moderna, e que preconizava mais abstração e mais formalização. Pelo contrário, creio que é mais motivador apresentar proposições e teoremas menos triviais e demonstrá-los se apoiando, não em cinco postulados, mas num elenco maior de fatos que sejam razoavelmente evidentes. Assim também é possível ensinar o método dedutivo. Nesse estágio da aprendizagem, quem é que está interessado na independência dos axiomas? O livro de F. I. C. vai longe, apresentando e demonstrando um mundo de "verdadeiros teoremas", sem contar suas longas listas de exercícios.

Mas, afinal de contas, qual é minha queixa? Gostaria de ver mais geometria ensinada no curso secundário, inclusive com demonstração de teoremas, com construções geométricas usando régua e compasso e justificadas pelos teoremas da geometria. Quantos estudantes sabem, com régua e compasso, traçar um pentágono regular? Quantos saberão justificar a construção, usando a Geometria Euclidiana? Os livros adotados no curso secundário ensinam essas coisas? Termino essa catilinária citando dois matemáticos modernos.

"Although geometry pervades all of mathematics and is present at every stage of its development, too often we do fail to point this out to our students". (Norman Steenrod, 1967)

"It is my belief that we have so far failed, and failed badly, to exploit the educational potential of geometry in the basic high school course. We have failed our own self interest in the training of future mathematicians and we have failed to transmit to our children the general cultural values inherent in geometry". (Paul J. Kelly, 1967)

Os problemas apresentados neste trabalho são elementares e têm uma formulação inteligível pelos alunos do 2º grau de nossos colégios. Fizemos uma coletânea de questões geométricas provenientes da própria Geometria, da Ótica e da Mecânica. Uma discussão (quase) completa pode ser feita tão somente com resultados da Geometria Euclidiana. E, de fato, nossas discussões seguem quase sempre raciocínios geométricos, procurando mostrar a beleza e a elegância da Geometria Euclidiana. Entretanto, não pusemos limites quanto aos métodos utilizados. Em alguns lugares fazemos uso da Geometria Analítica, do Cálculo Vetorial e do Cálculo Diferencial. Não vemos mérito em evitar essas técnicas, quando elas fornecem soluções simples e elegantes.

Optamos por não definir todos os conceitos aqui utilizados, e também por não enunciar precisamente os resultados usados. De outro modo, seria um tal de ir para trás, que tornaria a nossa apresentação pesada em pré-requisitos e obscura em seus objetivos. Além do mais, dentro das dimensões de um artigo, a tentativa de ser completo nos parece ilusória e inatingível. Assim, preferimos usar para certos conceitos o seu significado intuitivo. Os pré-requisitos principais são a Geometria Euclidiana plana elementar e a Geometria Analítica, matérias do 1º e 2º graus. Os comentários e as observações usam algum conhecimento de Cálculo Diferencial, mas poderão ser omitidos pelo leitor que não possua essa ferramenta. Nossa atitude em comentar assuntos mais avançados é proposital e tem o caráter pedagógico de mostrar que a Matemática tem uma evolução e que as várias teorias se interrelacionam. Esse é um aspecto da Matemática que a torna particularmente bela!

O autor agradece ao Professor Carlos Isnard pela cuidadosa leitura do manuscrito original, apontando-nos algumas imprecisões e fazendo valiosas sugestões que foram incorporadas na versão final, que ora apresentamos.

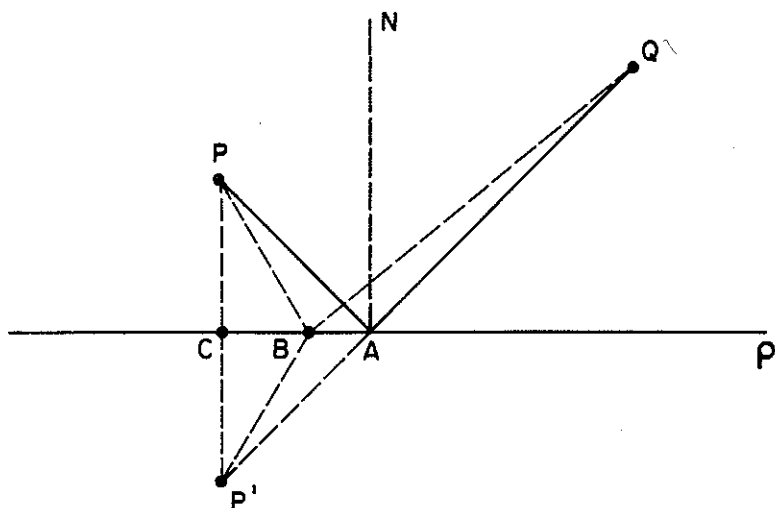


Figura 1

2. Maximizando a área, minimizando o perímetro de triângulos.

PROBLEMA 1. Entre todos os triângulos de mesma área, qual é o de menor perímetro?

PROBLEMA 2. Entre todos os triângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?

A resolução desses problemas se fundamenta no seguinte resultado, que referimos como

PROPOSIÇÃO 1. Dados dois pontos P e Q do mesmo lado de uma reta ρ num plano, a curva de menor comprimento ligando P a Q e tocando ρ é formada pelos segmentos de reta \overline{PA} e \overline{AQ} , onde $A \in \rho$ é tal que os ângulos $\sphericalangle PAN$ e $\sphericalangle NAQ$ são iguais. Designamos por \overline{AN} a semi-reta ortogonal a ρ , que tem origem A e que está do mesmo lado dos pontos P e Q . Veja Figura 1

Demonstração da Proposição 1. O argumento todo se baseia no fato que a curva de menor comprimento ligando dois pontos é o segmento de reta com extremidades nesses pontos. Usando isso vemos:

(i) A curva γ de comprimento mínimo toca ρ em apenas um ponto.

De fato, suponha, por contradição, que γ toca ρ em dois pontos A e \bar{A} . Seja M um ponto de γ fora de ρ , e tal que ao percorrer a curva de A para M , passa-se por \bar{A} . Então a curva $\bar{\gamma}$ obtida a partir de γ pela substituição do trecho AM pelo segmento de reta \overline{AM} tem um comprimento menor que o comprimento de γ .

(ii) A curva γ deve ser formada por dois segmentos de reta. De fato, seja A o ponto onde γ toca ρ , então necessariamente o trecho PA da curva é um segmento de reta.

(iii) O ponto A é obtido como a intersecção da reta ρ com o segmento $\overline{P'Q}$ onde P' é o simétrico de P com relação a ρ , [isto é, o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular a ρ e os comprimentos dos segmentos \overline{PC} e $\overline{CP'}$ são iguais]. De fato, se o ponto de contacto de γ com ρ fosse um outro ponto B teríamos uma curva de maior comprimento que aquela tocando em A . Para ver isso, observe que os triângulos PCB e $P'CB$ são congruentes, bem como os triângulos PCA e $P'CA$. Logo, designando por $\gamma(AB)$ o comprimento do segmento \overline{AB} , temos

$$\gamma(PA) = \gamma(P'A) \quad \text{e} \quad \gamma(PB) = \gamma(P'B)$$

e como $\gamma(P'A) + \gamma(AQ) \leq \gamma(P'B) + \gamma(BQ)$, obtemos que

$$\gamma(PA) + \gamma(AQ) \leq \gamma(PB) + \gamma(BQ).$$

Finalmente, a igualdade dos ângulos $\sphericalangle PAN$ e $\sphericalangle NAQ$ é estabelecida pelo seguinte argumento: os triângulos PCA e $P'CA$ são congruentes, logo os ângulos $\sphericalangle APC$ e $\sphericalangle AP'C$ são iguais. Por outro lado, do teorema das paralelas cortada por uma transversal, temos que

(i) os ângulos $\sphericalangle APC$ e $\sphericalangle PAN$ são iguais como ângulos alternos internos, e

(ii) os ângulos $\sphericalangle AP'C$ e $\sphericalangle NAQ$ são iguais como ângulos correspondentes. ■

Resolução do Problema 1. Afirmamos que se trata do triângulo equilátero. De fato, suponha por absurdo que haja dois lados AB e BC de comprimentos diferentes. Seja ρ a reta pelo ponto B paralela ao lado AC e seja D a intersecção da reta ρ com a reta ν perpendicular a ρ passando pelo ponto médio de AC . Veja figura 2. Logo, pela Proposição 1, o triângulo ADC tem perímetro menor

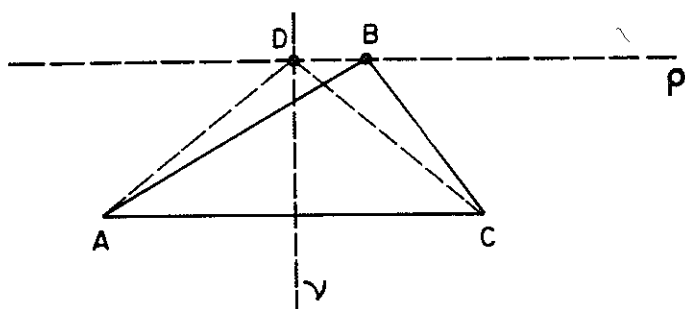


Figura 2

que o do triângulo ABC . E por outro lado, ambos os triângulos têm a mesma área, por terem mesma base e mesma altura.

ATENÇÃO! Analisemos criticamente o raciocínio. O que na realidade foi demonstrado é que dado um triângulo não equilátero sempre existe um outro (agora isósceles) que tem menor perímetro e mesma área. Na resolução acima admitimos implicitamente que o problema tem solução. Mais precisamente: entre todos os triângulos de mesma área, existe um que tem o menor perímetro. Isso é razoável assumir, é de fato verdade, e para uma resolução absolutamente rigorosa necessitaria de prova. Entretanto, optamos por assumir essa existência. Essa atitude será tomada também em outros problemas no decorrer deste trabalho.

Resolução do Problema 2. Afirmamos que se trata do triângulo equilátero. De fato, suponha que haja dois lados AB e BC de comprimentos diferentes. Usamos as construções da resolução do Problema 1. Agora fazemos uso do seguinte fato: existe um ponto D' sobre a reta ν e acima de D tal que

$$\gamma(AD') + \gamma(D'C) = \gamma(AB) + \gamma(BC).$$

Logo, a área do triângulo $AD'C$ é maior que a área do triângulo ADC , a qual é igual à área do triângulo ABC . E ademais, os triângulos $AD'C$ e ABC têm o mesmo perímetro.

Observação. O “fato” usado na resolução do problema 2 se segue de um outro mais básico, que é o seguinte: Dado um ponto P

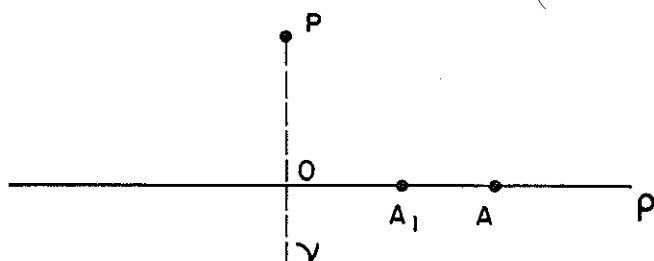


Figura 3

fora de uma reta ρ , seja O o ponto de intersecção de ρ com a reta ν perpendicular a ρ passando por P . Os pontos de ρ podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais de modo que O corresponde ao zero e o ponto A_1 , tal que $\gamma(OA_1) = 1$, corresponde ao número real 1. Veja Fig.3.

Assim um ponto arbitrário A corresponde a um real x . Então, o comprimento $\gamma(PA)$ é uma função contínua de x . Além disso, $\gamma(PA)$ assume seu mínimo quando $A = O$, e é monótona crescente tendendo a $+\infty$ quando A se afasta de O . Isso se segue trivialmente da expressão $\gamma(PA) = \sqrt{\gamma(PO)^2 + x^2}$.

O Lema 1 abaixo, que será usado posteriormente no texto, de certo modo complementa a informação fornecida pela Proposição 1. Numa linguagem intuitiva, ele essencialmente estabelece o seguinte. Referindo-se à Figura 2.1, imagine o ponto B como móvel; então, $\gamma(PB) + \gamma(BQ)$ aumenta quando o ponto B se afasta de A . (Lembre que A é o ponto obtido na Proposição 1). Ou seja, a função que a cada ponto B associa $\gamma(PB) + \gamma(BQ)$ é monótona em cada uma das semi-retas em que o ponto de mínimo A divide a reta ρ .

Lema 1. Seja A a solução do problema de minimização estudado na Proposição 1. Sejam B e B_1 pontos da reta ρ , tais que B_1 se situa (estritamente) entre A e B . Então

$$\gamma(PB) + \gamma(BQ) > \gamma(PB_1) + \gamma(B_1Q).$$

Demonstração. Como na Proposição 1, seja P' o simétrico de P com relação a ρ . Então, a desigualdade a provar é equivalente a

$$\gamma(P'B) + \gamma(BQ) > \gamma(P'B_1) + \gamma(B_1Q).$$

Observe que B_1 é um ponto do interior do triângulo $P'BQ$. Logo, o nosso problema se reduz à seguinte asserção.

Sublema:

“Seja D um ponto do triângulo ABC , com $D \neq B$. Então, $\gamma(AB) + \gamma(BC) > \gamma(AD) + \gamma(DC)$ ”.

Para demonstrar essa asserção, seja E a intersecção da reta passando por A e D com o segmento \overline{BC} . (Suponha que D não pertence ao lado AC , pois de outro modo a asserção é trivial.) Agora, usamos sucessivamente o fato que, num triângulo, qualquer de seus lados é menor que a soma dos outros dois. Assim

$$\gamma(DE) + \gamma(EC) > \gamma(DC),$$

o que implica

$$(i) \quad \gamma(AE) + \gamma(EC) > \gamma(AD) + \gamma(DC).$$

Por outro lado, temos

$$\gamma(AB) + \gamma(BE) > \gamma(AE),$$

e daí

$$(ii) \quad \gamma(AB) + \gamma(BC) > \gamma(AE) + \gamma(EC).$$

Portanto, a desigualdade a provar se segue de (i) e (ii). ■

PROBLEMA 3. A normal à elipse num ponto P biseta o ângulo formado por \overline{PA} e \overline{PB} , onde A e B são os focos da elipse.

Resolução. (i) Definição da elipse na linguagem da Geometria Euclidiana. Dados dois pontos A e B num plano Π , a elipse de focos A e B e eixo maior dado igual a $2a$, [$2a > \gamma(AB)$], é lugar geométrico dos pontos P do plano Π tais que

$$\gamma(PA) + \gamma(PB) = 2a.$$

(ii) **PROPOSIÇÃO 2:** A elipse é uma curva estritamente convexa.

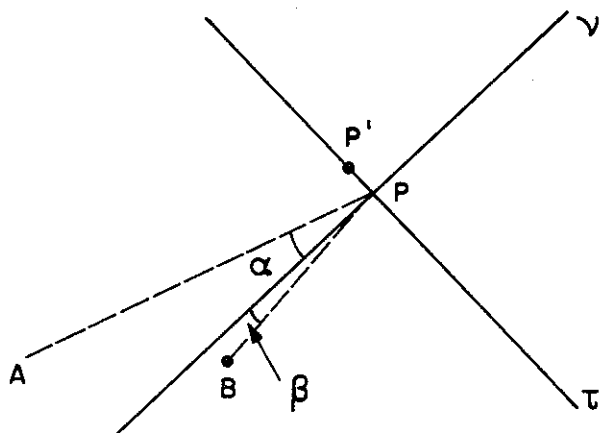


Figura 4

Veja demonstração abaixo. Daí se segue que a tangente à elipse num ponto P toca a elipse somente em P e os demais pontos da elipse estão no semiplano aberto determinado por τ e contendo os focos A e B .

(iii) Suponha, por contradição, que a normal ν a elipse no ponto P não bissete o ângulo formado por \overline{PA} e \overline{PB} . Veja Figura 4, onde $\alpha \neq \beta$.

Usando a Proposição 1 vemos que existe sobre a reta τ um ponto P' tal que

$$\gamma(P'A) + \gamma(P'B) < \gamma(PA) + \gamma(PB) = 2a.$$

Logo haverá um ponto P'' da elipse no semiplano determinado por τ , e que não contém os focos. Isso contradiz o que estabelecemos em (ii) acima. ■

Demonstração da Proposição 2. Mostraremos que o conjunto

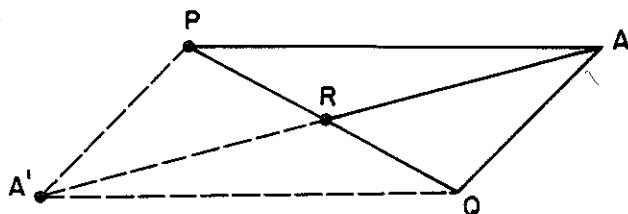


Figura 5

Γ dos pontos P do plano tais que

$$\gamma(PA) + \gamma(PB) \leq 2a \quad (1)$$

é um conjunto convexo, isto é, se P e Q pertencem a Γ , então o ponto médio R do segmento \overline{PQ} também pertence a Γ . E, além disso, mostraremos que se P e Q estão sobre a elipse, então R é tal que

$$\gamma(RA) + \gamma(RB) < 2a. \quad (2)$$

A demonstração se baseia por sua vez na Proposição 3 abaixo, a qual nos diz que

$$\gamma(RA) < \frac{1}{2}[\gamma(PA) + \gamma(QA)] \quad (3)$$

e

$$\gamma(RB) < \frac{1}{2}[\gamma(PB) + \gamma(QB)]$$

de onde se segue imediatamente (1) e (2). ■

PROPOSIÇÃO 3. Considere um triângulo APQ e seja R o ponto médio do lado PQ . Então (3) se verifica.

Demonstração da Proposição 3. Seja A' o ponto tal que $A'PAQ$ é um paralelogramo. Veja Figura 5.

Usamos agora o fato que

$$2\gamma(AQ)^2 + 2\gamma(AP)^2 = \gamma(PQ)^2 + \gamma(AA')^2. \quad (4)$$

Por outro lado

$$\left| \gamma(AP) - \gamma(AQ) \right| < \gamma(PQ) \quad (5)$$

Um cálculo simples usando (4), a expressão (5) elevada ao quadrado e o fato que $\gamma(AA') = 2\gamma(RA)$, conduz à desigualdade (3). ■

Observação. A expressão (4) é conhecida como a identidade do paralelogramo, que o leitor já encontrou (ou vai encontrar!) em outras partes da Matemática. Com as ferramentas e o tipo de conhecimento que estamos usando neste trabalho, será possível ao leitor demonstrá-la. Sugestão: dê um jeito de usar o teorema de Pitágoras.

3. Maximizando a área, minimizando o perímetro de polígonos.

Nesta secção estendemos os problemas 1 e 2 para o caso de polígonos.

PROBLEMA 4. Entre todos os polígonos de n lados e de mesma área, qual deles tem o menor perímetro?

PROBLEMA 5. Entre todos os polígonos de n lados e de mesmo perímetro, qual deles tem a maior área?

A resposta a ambos os problemas é a mesma: o n -polígono (i.e. polígono de n lados) regular, que é aquele que tem todos os lados de mesmo comprimento e todos os ângulos interiores iguais.

Resolução do Problema 4. (i) Suponha, por contradição, que o n -polígono φ , que tem o menor perímetro, possui dois lados \overline{AB} e \overline{BC} de comprimentos diferentes. Seja ρ a reta paralela a \overline{AC} , veja Figura 6.

Pela Proposição 1 existe B' sobre ρ tal que

$$\gamma(AB') + \gamma(B'C) < \gamma(AB) + \gamma(BC)$$

Logo, o polígono obtido substituindo-se os lados \overline{AB} e \overline{BC} por $\overline{AB'}$ e $\overline{B'C}$ tem a mesma área do polígono original φ , mas um perímetro menor. Logo, o polígono φ deve ser equilátero.

(ii) Agora provemos que φ é equiângulo. Considere três lados consecutivos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CD} , que já sabemos têm todos o mesmo comprimento. E suponhamos que os ângulos $\sphericalangle ABC$ e $\sphericalangle BCD$ são diferentes. Para fixar as idéias suponha que o primeiro ângulo (de medida a) é maior que o segundo (de medida \bar{a}). Veja a figura 7

Agora, escolhamos o ponto F sobre \overline{CD} de modo que o ângulo $\sphericalangle CBF$ (de medida b) seja tal que $2b < a - \bar{a}$. Tome E o ponto

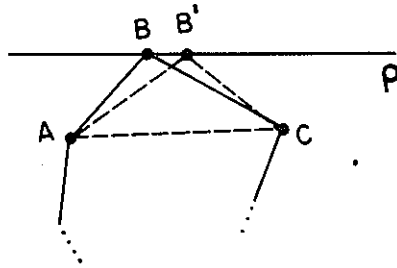


Figura 6

sobre o prolongamento de AB de modo que \overline{EC} seja paralelo a \overline{BF} .

Seja c a medida do ângulo $\sphericalangle EBF$ e \bar{c} a medida do ângulo $\sphericalangle BFC$. Temos então

$$a + c - b = \pi \quad \text{e} \quad \bar{a} + \bar{c} + b = \pi.$$

Logo

$$\bar{c} - c = a - \bar{a} - 2b$$

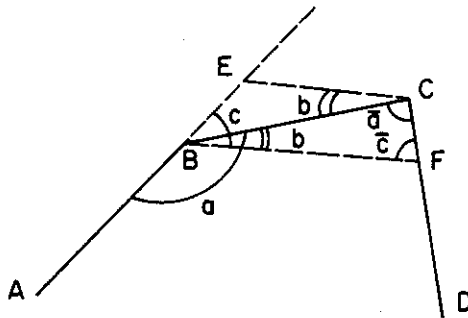


Figura 7

o que implica $\bar{c} > c$. Segue-se então da Proposição 1 (veja demonstração abaixo) que

$$\gamma(BE) + \gamma(EF) < \gamma(BC) + \gamma(CF). \quad (1)$$

Logo, substituindo a parte $ABCD$ do polígono φ por $Aefd$, obtemos um outro polígono de mesma área e perímetro menor que o de φ , o que é absurdo. ■

Demonstração da desigualdade (1) acima. Vamos reformular a questão a fim de não repousar na figura 3.2, uma vez que o ângulo \bar{c} pode ser até obtuso! Assim a questão é a seguinte.

“Seja $BECF$ um quadrilátero onde os lados \overline{BF} e \overline{EC} são paralelos e os ângulos $c = \angle EBF$ e $\bar{c} = \angle CFB$ são tais que $c < \bar{c}$. Então vale a desigualdade (1)”.

Para demonstrar esse fato, seja X a intersecção de reta ν perpendicular a \overline{BF} , passando por seu ponto médio, com a reta passando pelos pontos EC . Então, há duas possibilidades: (i) E e C estão do mesmo lado de X , e aí o resultado se segue do Lema 1; ou (ii) E e C estão em diferentes lados de X . Neste caso se designarmos por C' o simétrico de C com relação à reta ν , então a desigualdade (1) é equivalente a

$$\gamma(BE) + \gamma(E, F) < \gamma(BC') + \gamma(C'F),$$

a qual é precisamente o caso (i) anterior, pois agora C' e B estão do mesmo lado de X .

Resolução do Problema 5. Vamos utilizar o resultado do Problema 4. Seja φ o n -polígono de maior área entre todos os n -polígonos que têm o mesmo perímetro L . Designemos por S a área de φ . Se φ não for regular, existe um n -polígono (regular) $\bar{\varphi}$ de área S e perímetro $\bar{L} < L$. Agora, vamos construir a partir de $\bar{\varphi}$ um n -polígono φ' de perímetro L e área $S' > S$, o que é absurdo! Tome dois lados consecutivos de $\bar{\varphi}$, \overline{AB} e \overline{BC} , veja Figura 8.

Agora, escolha um ponto B' sobre a reta ν perpendicular a AC de modo que

$$\left[\gamma(AB') + \gamma(B'C) \right] - \left[\gamma(AB) + \gamma(BC) \right] = L - \bar{L}.$$

O polígono φ' é então obtido de $\bar{\varphi}$ substituindo-se os lados \overline{AB} e \overline{BC} por $\overline{AB'}$ e $\overline{B'C}$. ■

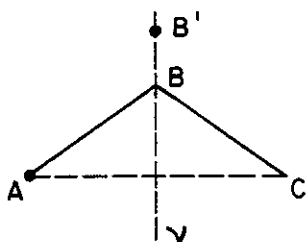


Figura 8.

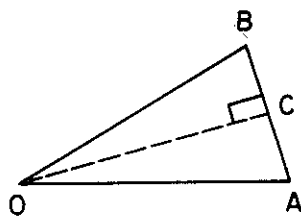


Figura 9.

4. A desigualdade isoperimétrica.

Nesta secção usamos um pouco de Trigonometria para resolver o

PROBLEMA 6. Dados dois polígonos regulares de mesmo perímetro L , aquele que tem maior área é o que possui um maior número de lados.

Resolução do Problema 6. (i) Vamos inicialmente expressar a área $A(n)$ de um n -polígono regular em termos do perímetro L dado. O n -polígono é a união de n triângulos como o da Figura 9, onde O corresponde ao centro do polígono, \overline{AB} é um lado e \overline{OC} é o apótema. Usamos as notações $\ell_n = \gamma(\overline{AB})$ e $a_n = \gamma(\overline{OC})$. Temos, então

$$L = n\ell_n \quad (1)$$

$$A(n) = \frac{n}{2}\ell_n a_n \quad (2)$$

Como o ângulo $\sphericalangle COA$ tem π/n radianos, e o apótema é perpendicular ao lado, obtemos

$$\frac{\ell_n}{2} = a_n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \quad (3)$$

Assim de (1), (2) e (3) se segue

$$A(n) = \frac{L^2}{4n} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

que reescrevemos na forma

$$A(n) = \frac{L^2}{4\pi} \frac{\pi}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}. \quad (4)$$

(ii) Para ver o modo como $A(n)$ varia em termos de n , basta então estudar a função

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x} \quad (5)$$

e ver seu comportamento quando $x \in (0, \pi/2)$, pois isso nos dará informações sobre $A(n)$ para $n > 2$, usando-se $x = \pi/n$. Temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 0. \quad (6)$$

Além disso f é contínua no intervalo $(0, \pi/2)$ e a derivada $f'(x) < 0$. Logo, f é estritamente decrescente. Isso nos mostra que $A(n)$ é estritamente crescente quando n cresce. Logo se $n < m$ e $A(n)$ e $A(m)$ designam, respectivamente, as áreas do n -polígono regular e do m -polígono regular de mesmo perímetro, temos $A(n) < A(m)$. ■

Observação 4.1. A demonstração acima, nos diz algo mais. De (4) e (6) obtemos

$$A(n) < \frac{L^2}{4\pi}. \quad (7)$$

Segue-se de (7) e do Problema 5 que

• Designando por A e L respectivamente a área e o perímetro de um polígono (regular ou não), temos

$$4\pi A < L^2,$$

que é a chamada *desigualdade isoperimétrica* para polígonos. A seguinte forma mais geral da desigualdade isoperimétrica pode ser vista em [4] ou [3].

• A área A englobada por qualquer curva simples plana fechada retificável C , de comprimento L , satisfaz a desigualdade

$$4\pi A \leq L^2; \quad (8)$$

além disso, a igualdade ocorre, se e só se C for um círculo.

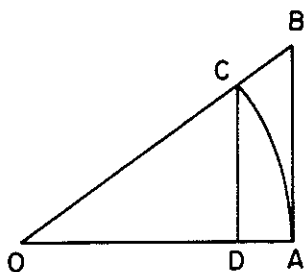


Figura 10.

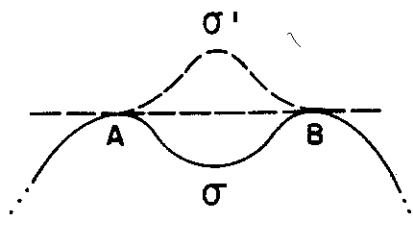


Figura 11

Observação 4.2. Na demonstração anterior, usamos o Cálculo Diferencial para se obter rapidamente uma idéia do gráfico de uma função, o que de outro modo poderia ser enfadonho. Não vejo mérito em evitá-lo! Pelo contrário, o eventual leitor, que não tenha essa importante ferramenta a seu dispor, deve urgentemente procurar adquiri-la. Vamos detalhar um pouquinho mais alguns passos da demonstração acima. Usamos o fato que $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$. Também

$$f'(x) = \frac{tgx - x \sec^2 x}{tg^2 x}$$

Agora $tgx < x \sec^2 x$ é equivalente a $\sin 2x < 2x$, o que pode ser visto utilizando o “círculo trigonométrico”, ou Cálculo Diferencial novamente.

Uma demonstração geométrica de $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$.

Considere um círculo de raio 1 e centro em O . Veja Figura 10 Assim $\gamma(OA) = \gamma(OC) = 1$ e designemos $\gamma(CD) = a$ e $\gamma(AB) = b$. Vemos que, se a medida do ângulo $\sphericalangle AOC$ for x radianos, então $a = \sin x$. Vemos então que

$$a < x < b.$$

Por outro lado, como $\gamma(OD) = \sqrt{1 - a^2}$, (teorema de Pitágoras), obtemos da semelhança dos triângulos ODC e OAB que

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{1}$$

Logo de (1) e (2) temos

$$0 < 1 - \frac{a}{x} < 1 - \frac{a}{b} = 1 - \sqrt{1 - a^2} \quad (9)$$

Quando $x \rightarrow 0$, segue-se que $a \rightarrow 0$. Logo o último membro das desigualdades em (3) tende a 0 quando $x \rightarrow 0$. Logo $1 - a/x \rightarrow 0$. ■

O problema de Dido, uma amenidade. Dido, filha de um rei fenício, refugiou-se no norte da África, depois que seu marido foi assassinado. Foi-lhe prometida a extensão de terra que pudesse cercar com o couro de um boi. Diz a lenda que ela preparou com o couro uma longa e fina correia, e cercou com a mesma um terreno circular. Essa é a legendária estória da fundação de Cartago! O problema de Dido (uma homenagem póstuma!) é o seguinte:

“Entre todas as curvas planas fechadas (retificáveis) de um dado comprimento L , encontrar aquela que engloba maior área”.

A desigualdade isoperimétrica (8) acima, e a afirmação que a segue nos diz que essa curva é o círculo. Assim o problema de Dido é apenas parte do enunciado da desigualdade isoperimétrica.

É interessante observar que podemos resolver o problema de Dido sem fazer recurso à desigualdade isoperimétrica. A demonstração a seguir é devida a Jakob Steiner (1796-1863).

Faz-se a suposição inicial de que o problema tenha uma solução γ , e aí se mostra que ela deve ser o círculo. A demonstração é dividida em três etapas.

(i) γ é uma curva convexa. De fato, suponha, por contradição, que γ possua uma reintrância σ entre A e B , (veja Figura 11). Mais precisamente, existem dois pontos A e B em γ de modo que o segmento aberto \overline{AB} está fora da região delimitada por γ . Seja σ' a reflexão do trecho σ da curva com relação ao segmento \overline{AB} . A curva $\bar{\gamma}$ obtida a partir de γ substituindo-se o trecho σ por σ' tem o mesmo comprimento que γ e engloba maior área.

(ii) Agora mostramos que o problema de Dido é equivalente ao seguinte:

Problema de Dido com parede: Seja ρ uma reta do plano e seja X a união de ρ com um dos semiplanos determinados por ρ . Consideremos as curvas em X de um dado comprimento e cujos pontos inicial e final estão sobre ρ . Mostrar que entre essas curvas aquelas que juntamente com ρ englobam a maior área são os semi-círculos com base sobre ρ . Sejam A e B pontos sobre γ que a

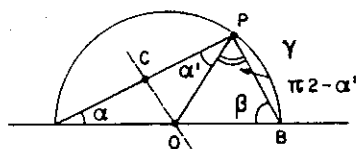


Figura 12.

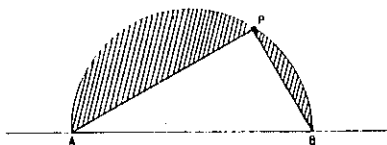


Figura 13

dividem em dois arcos γ_1 e γ_2 de igual comprimento. As regiões R_1 e R_2 delimitadas pela reta ρ , que passa por A e B , e pelos arcos γ_1 e γ_2 respectivamente devem ter a mesma área. Pois, de outro modo, se R_1 tivesse maior área que R_2 , obteríamos uma curva $\bar{\gamma}$ de mesmo comprimento que γ e englobando maior área. Bastaria tomar $\bar{\gamma} = \gamma_1 \cup \gamma'_1$ onde γ'_1 é a reflexão de γ_1 com relação a ρ .

As curvas γ_1 e γ_2 são soluções do Problema de Dido com parede, pois se não fossem existiria uma curva γ_3 de igual comprimento unindo pontos C e D de ρ e delimitando com ρ uma área maior. Seja γ'_3 a imagem refletida de γ_3 com relação a ρ . A curva fechada $\gamma_3 \cup \gamma'_3$ teria o mesmo comprimento que γ e delimitaria uma maior área, o que não é possível.

Antes de prosseguir a demonstração, demonstremos a

PROPOSIÇÃO 4. Considere a figura formada por uma curva convexa γ_1 e pelo segmento \overline{AB} , veja Figura 12. Suponha que a seguinte propriedade se verifica: dado qualquer ponto P sobre γ_1 , o ângulo APB é reto. Então γ_1 é um semicírculo.

Demonstração. Seja O o ponto médio do segmento \overline{AB} . Devemos então provar que $\gamma(OP) = \gamma(OA)$. Para isso basta mostrar que $\alpha = \alpha'$. Trace uma reta paralela a \overline{PB} passando por O . Então a interseção C dessa reta com \overline{AP} é o ponto médio do segmento \overline{AP} . Logo os triângulos ACO e PCO são congruentes. Daí $\alpha = \alpha'$. ■

Voltemos agora à última etapa de resolução do Problema de Dido.

(iii) Seja γ_1 a curva convexa que, entre as curvas convexas de comprimento L , delimita juntamente com a reta ρ a maior área. Veja a Figura 4.5. Provemos usando a Proposição 4 que γ_1 é um semicírculo. A idéia é usar o “método das rótulas”. Na Figura 4.5, consideremos as regiões hachuradas como placas rígidas e coloquemos rótulas em A , B e P .

A idéia agora é deixar A fixa e deslocar B sobre a reta ρ . A curva γ_1 se deformará por rotação em volta de P , mas mantendo os trechos AP e PB inalteráveis; logo o comprimento de γ_1 é mantido. A variação da área englobada por ρ e pela curva ficará por conta do triângulo APB . A maior área será obtida quando APB for um triângulo retângulo. Logo, se para um dado ponto P o triângulo não for retângulo, será possível deslocar B e obter uma área maior. Observe que se o ângulo $\sphericalangle APB$ fosse maior que 90° , deslocaríamos o ponto B para a esquerda, aproximando-o de A . Neste caso, a área do triângulo deformada seria maior e a curva γ_1 deformada seria ainda convexa. Entretanto se o ângulo $\sphericalangle APB$ fosse menor que 90° , teríamos que deslocar B para a direita. Neste caso, a curva γ_1 deformada não seria convexa. Aí usaríamos o argumento da parte (i) para obter uma curva convexa de mesmo comprimento que γ_1 e delimitando juntamente com ρ uma área maior. Em qualquer dos casos chegaríamos a um absurdo. ■

Observação 4.1. Por que, na parte (i), a hipótese de não convexidade de γ nos permite encontrar uma “reintrância”? E se a curva γ fosse como na Figura 14?

Bom, vemos que nesse caso deveríamos escolher a “reintrância” dentro de uma reintrância! Como formalizar isso, a fim de não dependermos da figura? A idéia é a seguinte. Para cada reta ρ no plano, tomamos as retas a ela paralelas ρ_e e ρ_d com a propriedade que elas tocam γ e γ fica situada entre as duas. Veja Figura 15. Então, γ é convexa se e só se para toda reta ρ , as intersecções $\gamma \cap \rho_e$ e $\gamma \cap \rho_d$ são intervalos (fechados). Se γ não for convexa, então existe ρ tal que ρ_e (digamos) é tal que $\rho_e \cup \gamma$ não é um intervalo. Seja \overline{PQ} o menor intervalo fechado contendo $\rho_e \cap \gamma$. No argumento da parte (i) poderíamos simplesmente refletir a parte de γ entre P e Q com relação a ρ_e , e obter o resultado desejado. Ou poderíamos encontrar sobre ρ_e pontos A e B com a propriedade expressa na parte (i).

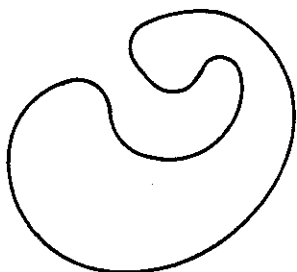


Figura 14.

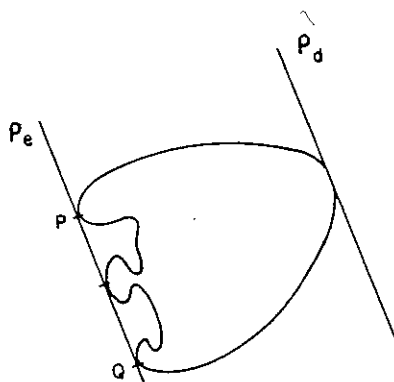


Figura 15

5. O Princípio de Fermat e as Leis da Ótica Geométrica.

O Princípio de Fermat estabelece que

- o caminho seguido pela luz para ir de um ponto A a um ponto B em um certo meio é aquele percorrido em tempo mínimo
- Se o meio for homogêneo, a velocidade da luz é constante e, como da Cinemática, temos

$$\text{espaço} = \text{velocidade} \times \text{tempo},$$

segue-se que tempo mínimo corresponde a comprimento mínimo. Assim vamos poder recorrer a métodos da Geometria Euclidiana para estudar as leis da Ótica.

Lei da Reflexão da Luz. O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Lei de Snell da Refração da Luz. Suponha que a luz passa de um meio M_1 , onde a velocidade da luz é v_1 , para um outro meio M_2 (separado de M_1 por um plano H) onde a velocidade da luz é v_2 . Seja i o ângulo de incidência em H e r o ângulo de refração, veja Figura 16. Então

$$\frac{\text{sen } i}{v_1} = \frac{\text{sen } r}{v_2}$$

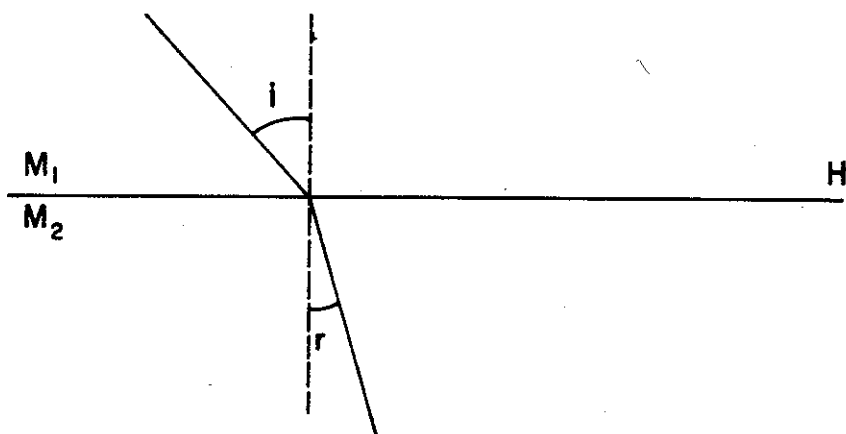


Figura 16

Demonstração da Lei da Reflexão. Vamos fazer nosso raciocínio se referindo à Figura 2.1. Suponha que ρ é a seção de um espelho plano perpendicular ao plano da figura. A luz vai de P para Q se refletindo em ρ . Temos a hipótese de que o meio onde o fenômeno acontece é homogêneo, donde a velocidade da luz é constante aí. Usamos o Princípio de Fermat, que nas presentes circunstâncias implica em que se deve encontrar o caminho de menor comprimento ligando P a Q e tocando ρ . Essa questão está resolvida pela Proposição 1. O ângulo i de incidência é por definição o ângulo $\sphericalangle PAN$ e o de reflexão r é $\sphericalangle NAQ$, os quais são iguais precisamente pela Proposição 1. ■

Demonstração da Lei da Refração da Luz. Vamos fazer a hipótese de que os raios incidente e refratado estejam num mesmo plano ortogonal ao plano H . Assim podemos estudar o fenômeno no plano da figura; designemos por ρ a reta interseção de H com o plano da figura. Tomemos um ponto A sobre o raio incidente e um ponto B sobre o raio refratado de modo que ambos distem de ρ de um mesmo valor h . Coloquemos sobre ρ um sistema de coordenada x de modo que a origem coincida com o pé da perpendicular baixada de A sobre ρ . Veja a figura 17.

Nosso problema é então o seguinte: dados A e B encontrar o caminho ligando esses dois pontos de modo que a luz o percorra

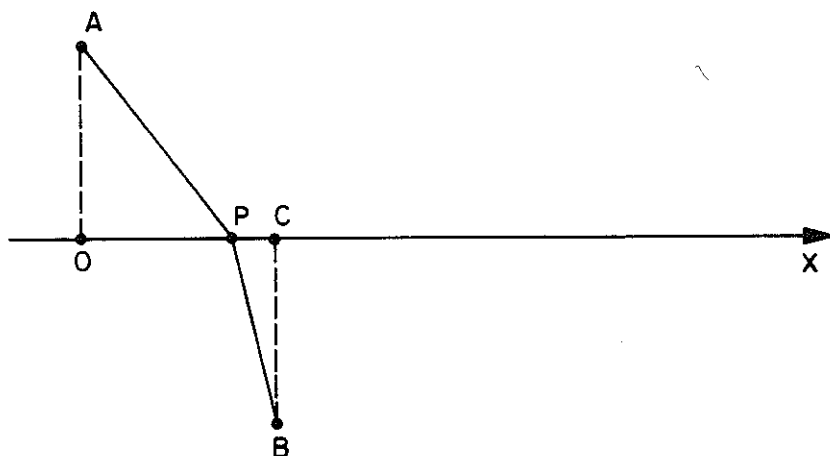


Figura 17

em tempo mínimo; estamos usando o Princípio de Fermat. Em vista do fato que num meio homogêneo o caminho seguido pela luz é uma reta, o nosso problema se reduz a encontrar um ponto P sobre ρ de modo que a luz percorra a poligonal APB em tempo mínimo. Designemos por x a abscissa do ponto P (a priori, pode ser qualquer número real, positivo, negativo ou zero). O tempo para ir de A até P é

$$t_1 = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_1}$$

e o tempo para ir de P a B é

$$t_2 = \frac{\sqrt{h^2 + (\ell - x)^2}}{v_2}$$

onde ℓ é a distância de O a C , i.e., $\gamma(OC)$. O que queremos é minimizar a função

$$T(x) = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h^2 + (\ell - x)^2}}{v_2}$$

Como essa função é tal que $T(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$, e como a função é diferenciável se segue que o mínimo

ocorre em um ponto onde a derivada $T'(x) = 0$. Fazendo as contas, obtemos

$$\frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{\ell - x}{\sqrt{h^2 + (\ell - x)^2}} = 0. \quad (1)$$

Analisando-se os sinais dos dois termos em (1) vemos que uma eventual solução x deve ser tal que $0 < x < \ell$. E mais ainda, designando por $f(x)$ a função definida pelo primeiro membro de (1), vemos que $f(0) < 0$ e $f(\ell) > 0$. E como f é uma função contínua existe pelo menos um ponto onde ela se anula, usando o Teorema do Valor Intermediário. Consequentemente (1) tem pelo menos uma solução. Para ver que (1) tem apenas uma solução, basta mostrar que f é uma função estritamente crescente. Para tal um cálculo direto mostrando que $f'(x) > 0$, fornece a conclusão. Logo esse único valor de x onde $f(x)$ se anula é o ponto de mínimo de T . Como

$$\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \text{sen } i \quad \text{e} \quad \frac{\ell - x}{\sqrt{h^2 + (\ell - x)^2}} = \text{sen } r,$$

a expressão (1) torna-se precisamente a lei de Snell. ■

A Reflexão em Espelhos Esféricos. A reflexão da luz num espelho esférico \mathcal{E} é regida também pelo Princípio de Fermat. Assim, supondo que o meio fora de \mathcal{E} é homogêneo, o caminho seguido pela luz para ir do ponto P ao ponto Q tocando na superfície \mathcal{E} é aquele de comprimento mínimo. Consequentemente, devemos encontrar o ponto A em \mathcal{E} de modo a minimizar $\gamma(PA) + \gamma(AQ)$. Veja Figura 18.

PROPOSIÇÃO 5. Dados o círculo \mathcal{E} e dois pontos P e Q fora dele (de modo que o segmento \overline{PQ} não interseccione \mathcal{E}), o ponto A em \mathcal{E} com a propriedade que

$$\gamma(PA) + \gamma(AQ) = \min\{\gamma(PB) + \gamma(BQ) : B \in \mathcal{E}\}$$

é tal que a reta OA bisseta o ângulo $\sphericalangle PAQ$.

Demonstração. Como em situações anteriores admitimos que o ponto A com a propriedade minimizante acima existe. E mostremos a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão. Tracemos a tangente ρ ao círculo \mathcal{E} pelo ponto A . Suponha, por contradição,

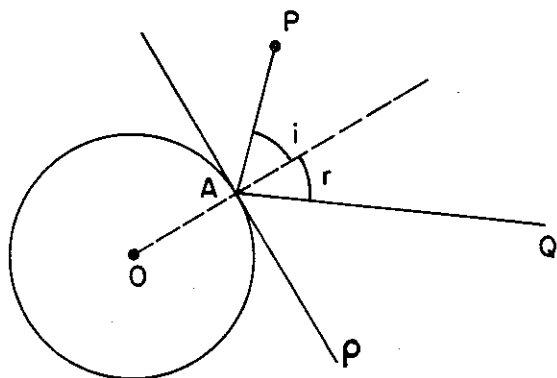


Figura 18

que os ângulos i e r são diferentes. Para fixar as idéias suponha $i > r$. Tomamos agora uma reta ρ' passando por A e tal que sua normal ν' em A divide o ângulo PAQ em dois ângulos i' e r' com $i > i' > r'$. Então, a reta ρ' corta o círculo \mathcal{E} em dois pontos A e A' . Veja Figura 19.

Resulta, então, do Lema 1 que existe um ponto B em ρ' entre A' e A tal que

$$\gamma(PB) + \gamma(BQ) < \gamma(PA) + \gamma(AQ). \quad (2)$$

Qualquer ponto C da intersecção do triângulo BPQ com a circunferência \mathcal{E} é tal que

$$\gamma(PC) + \gamma(CQ) < \gamma(PB) + \gamma(BQ), \quad (3)$$

o que se segue do Sublema provado dentro da demonstração do Lema 1. Finalmente, a conjunção das desigualdades (2) e (3) conduz a uma contradição à minimalidade de A . ■

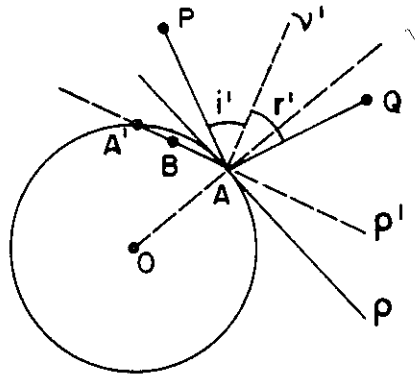


Figura 19

Segue-se da Proposição 1 que existe um ponto B em ρ' entre A' e A tal que $\gamma(PB) + \gamma(BQ) < \gamma(PA) + \gamma(AQ)$. Seja C a intersecção de \mathcal{E} com \overline{PB} . Então é fácil ver que

$$\gamma(PC) + \gamma(CQ) < \gamma(PB) + \gamma(BQ),$$

o que juntamente com a desigualdade anterior contradiz a minimalidade de A . ■

Observação 5.1. A existência de um ponto A com a propriedade minimizante acima, existência essa admitida na demonstração anterior, pode ser demonstrada rapidamente fazendo recurso a um resultado da Análise: toda função real contínua num conjunto compacto do plano assume o seu mínimo. Veja, p. ex. [5]. No nosso caso, o compacto é o círculo \mathcal{E} e a função é $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$ definida para $(x, y) \in \mathcal{E}$

$$f(x, y) = \sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2} + \sqrt{(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2}$$

onde estamos usando um sistema de coordenadas no plano e (x_P, y_P) , (x_Q, y_Q) e (x, y) são respectivamente as coordenadas dos pontos dados P e Q e de um ponto genérico sobre \mathcal{E} .

PROBLEMA 7. Dados três pontos A, B e C não colineares num plano encontrar um quarto ponto P tal que $\gamma(PA) + \gamma(PB) + \gamma(PC)$ seja um mínimo.

Resolução. Como nos outros problemas admitimos que existe um ponto P do plano que resolve esse problema. Essa existência pode ser demonstrada, veja Observação 5.2 abaixo. A seguir, usamos a notação

$$\sigma(Q) = \gamma(QA) + \gamma(QB) + \gamma(QC)$$

onde Q é um ponto genérico do plano determinado pelos pontos A , B e C . Designemos por P o ponto que resolve o Problema 7, isto é,

$$\sigma(P) = \min \sigma(Q).$$

(i) Usando o Sublema provado dentro da demonstração do Lema 1, vê-se que P não pode ser um ponto do exterior do triângulo ABC . De fato, basta analisar as duas possibilidades para a posição de P nessa eventualidade: (a) um dos vértices (digamos A ; o mesmo raciocínio se for outro vértice), e (b) os pontos A , B , C e P formam um quadrilátero convexo.

(ii) O ponto P não pode estar sobre os lados, a não ser que seja um vértice. De fato, suponha que P está dentro do segmento \overline{AB} . Observe que, neste caso, $\sigma(P) = \gamma(AB) + \gamma(PC)$. Trace o círculo centrado em C e raio igual a $\gamma(PC)$. O segmento \overline{AB} deve tangenciar esse círculo, pois, de outro modo, teríamos pontos P' sobre \overline{AB} tais que

$$\gamma(AB) + \gamma(P'C) < \gamma(AB) + \gamma(PC),$$

contradizendo a minimalidade de P . Logo \overline{PC} é perpendicular a \overline{AB} . Trace agora o círculo \mathcal{E} com centro A e raio $\gamma(PA)$. Segue-se da Proposição 5 que existe um ponto P' dentro do triângulo ABC e sobre \mathcal{E} tal que $\gamma(P'B) + \gamma(P'C) < \gamma(PB) + \gamma(PC)$, e daí se vê que a existência de um tal P' contradiz a minimalidade de P .

(iii) As partes (i) e (ii) acima estabelecem que P deva estar no interior do triângulo ou ser um de seus vértices. A nossa meta agora será provar as asserções seguintes:

- (α) Se P for um ponto interior do triângulo ABC então os ângulos $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BPC$ e $\sphericalangle CPA$ são iguais e cada um deles mede 120° . Decorre, então, que neste caso os ângulos internos do triângulo ABC são todos três inferiores a 120° .
- (β) Se os ângulos interiores do triângulo ABC medem todos três menos de 120° , então P é um ponto interior do triângulo ABC .

120°, a intersecção seria fora do triângulo]. Os ângulos $\sphericalangle BPC$ e $\sphericalangle CPA$ medem 120° cada, o que força P estar dentro do triângulo ABC .

Prova de (γ) . Neste caso, P não pode estar no interior do triângulo, em vista de (α) . Logo de acordo com (iii), P deve ser um vértice. É fácil ver que de fato $P = B$, pois $\sigma(P) = \gamma(AB) + \gamma(BC)$, uma vez que AC é o maior dos três lados do triângulo ABC .

Observação 5.2: A existência de solução do problema 7. A existência de uma solução para o problema 7 pode ser feita analiticamente em duas linhas! Introduzindo-se um sistema de coordenadas no plano e designando por $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C)$ as coordenadas dos 3 pontos dados e por (x, y) as coordenadas de um ponto genérico, a questão é mostrar que a função

$$f(x, y) = f_A(x, y) + f_B(x, y) + f_C(x, y)$$

onde $f_A(x, y) = [(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2]^{1/2}$, assume seu ínfimo quando (x, y) varia no plano. Isso decorre imediatamente do fato que $f(x, y) \rightarrow \infty$ quando $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, o qual implica que podemos restringir a função f a um disco $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ de raio R (suficientemente grande) para efeitos de minimização. E a seguir aplicamos o resultado da Análise enunciado na Observação 5.1 acima.

Observação 5.3: O ângulo de 120° e o Problema 7. De nossas considerações geométricas ficou claro que o ângulo de 120° desempenha um papel crucial no problema 7. Agora vamos fazer uma incursão analítica no problema e ver que 120° aparece também! Vamos supor que P não é um dos pontos A, B ou C . Pela Observação 5.2, o ponto P minimiza a função f . Logo o gradiente de f no ponto f deve ser O . (Veja Seção 6, a seguir) Escrevemos então as duas equações provenientes da nulidade das derivadas parciais de f .

$$\frac{x - x_A}{f_A(x, y)} + \frac{x - x_B}{f_B(x, y)} + \frac{x - x_C}{f_C(x, y)} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{y - y_A}{f_A(x, y)} + \frac{y - y_B}{f_B(x, y)} + \frac{y - y_C}{f_C(x, y)} = 0. \quad (5)$$

Agora introduzimos os vetores no plano

$$v_A = (x - x_A, y - y_A), v_B = (x - x_B, y - y_B), \\ v_C(x - x_C, y - y_C).$$

As expressões f_A , f_B , f_C são respectivamente as normas $\|v_a\|$, $\|v_B\|$, $\|v_C\|$ desses vetores. As equações acima nos dizem que

$$v_A^0 + v_B^0 + v_C^0 = 0$$

onde v_A^0 designa o vetor unitário na direção de v_A , análogas notações para os outros vetores. A expressão (4) diz que a soma de três vetores de norma 1 é zero. Isso implica que esses vetores se dispõem sobre os vértices de um triângulo equilátero inscrito num círculo de raio 1 centrado na origem.

6. O Cálculo diferencial e os problemas de máximo e mínimo.

Na demonstração da lei de Snell o Cálculo Diferencial foi utilizado através do seguinte resultado:

- Seja $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ uma função diferenciável. Então, se x_0 é um ponto onde g assume um máximo local ou mínimo local, então $g'(x_0) = 0$.
- Observe que a condição de anulamento da derivada é apenas uma condição necessária. Ela é, em geral, usada do seguinte modo: determina-se as soluções da equação $g'(x) = 0$, e aí se usa o fato que entre elas estão os eventuais máximos e mínimos. As soluções de $g'(x) = 0$ são chamados os *pontos críticos* de g . Para decidir se um ponto crítico x_0 é máximo ou mínimo há que recorrer a outro tipo de informação. Por exemplo, no Cálculo Diferencial apela-se para a derivada segunda g'' da função g . Aí se prova que se $g''(x_0) > 0$ então x_0 é mínimo, se $g''(x_0) < 0$ então x_0 é máximo; quando $g''(x_0) = 0$ pode ocorrer máximo, mínimo, ou nem um nem outro. No caso da lei de Snell, poderíamos ter usado esse critério, mas dentro da mecânica do nosso raciocínio nos pareceu mais interessante estudar a função f . Questão de gosto!

Para funções de várias variáveis $g: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ as questões de máximo, mínimo e ponto crítico são pertinentes. O análogo da derivada de função de uma variável é o gradiente, designado por

∇g ou $\text{grad } g$, o qual é uma função vetorial $\nabla g: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ definida por

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_N} \right).$$

É claro que o gradiente está definido se a função tiver suas derivadas parciais. Os pontos críticos de g são as soluções $x \in \mathbf{R}^N$ da equação (que na verdade é um sistema de equações) $\nabla g(x) = 0$. Como antes, os eventuais máximos e mínimos estão entre os pontos críticos. Isso foi utilizado na Observação 5.3. Também há critérios para decidir de que tipo de ponto crítico se trata, via derivadas segundas. Cf. [1], [5].

Em muitas situações procura-se maximizar ou minimizar uma função g pondo em competição não todos os pontos de \mathbf{R}^N , mas apenas pontos que estão sobre um certo conjunto, como, por exemplo, uma superfície.

Problema 2 revisitado. A fórmula de Heron para a área de um triângulo é dada por $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ onde a, b, c são os lados do triângulo e $a + b + c = 2p$. Portanto o problema se resume a obter o máximo da função $g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$

$$g(a, b, c) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

com as condições

$$a, b, c > 0 \text{ e } a + b + c = 2p,$$

onde $2p$ é o perímetro dado. A idéia é então investigar os pontos críticos de g restrita à superfície (no caso presente é um plano!)

$$\varphi(a, b, c) = a + b + c - 2p = 0.$$

Paremos um momento para comentar sobre esse tipo de problema.

Multiplicadores de Lagrange. O problema é encontrar condições necessárias para um ponto $x_0 \in \mathbf{R}^N$ ser um ponto crítico de função diferenciável $g: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ restrita a uma superfície S dada por

$$\varphi(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^N$$

onde $\varphi: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função diferenciável, com $\nabla\varphi(x) \neq 0$. Esta condição quer dizer que a superfície S é regular, isto é, tem uma normal em cada ponto. É intuitivo se ver que se $x_0 \in S$ for um ponto de mínimo ou de máximo para g restrita a S , temos necessariamente que $\nabla g(x_0)$ é paralelo a $\nabla\varphi(x_0)$. Isso poder ser demonstrado rigorosamente, veja [5]. Logo, existe um número λ tal que

$$\nabla g(x_0) = \lambda \nabla\varphi(x_0).$$

Esse λ é chamado um *multiplicador de Lagrange*. Temos então um método prático de produzir pontos que podem ser máximos ou mínimos condicionados: encontre as soluções (x_0, λ) , $x_0 \in \mathbf{R}^N$, $\lambda \in \mathbf{R}$ do sistema

$$\begin{cases} \nabla g(x) - \lambda \nabla\varphi(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

Em outras palavras, formamos a função $\Phi: \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$\Phi(x, \lambda) = g(x) - \lambda\varphi(x)$$

e procuramos seus pontos críticos. Esse problema tem a vantagem de não ter vínculos. Os pontos críticos são as soluções do sistema (1).

Volta à resolução do Problema 2. Formemos a função

$$\Phi(a, b, c, \lambda) = p(p-a)(p-b)(p-c) - \lambda(a+b+c-2p).$$

Observe que retiramos a raiz quadrada, pois maximizar g ou g^2 é a mesma coisa. Neste caso, o sistema (1) se torna

$$-p(p-b)(p-c) - \lambda = 0 \quad (1)$$

$$-p(p-a)(p-c) - \lambda = 0 \quad (2)$$

$$-p(p-a)(p-b) - \lambda = 0 \quad (3)$$

$$a+b+c-2p=0 \quad (4)$$

De (2) e (3) obtemos ou $p=c$ ou $a=b$. A alternativa $p=c$ deve ser descartada, pois nesse caso se seguiria de (5) $a+b=p$, e a solução não daria um triângulo. Logo $a=b$. Usando (2) e (3) obtemos $b=c$. E (5) nos dá $a=2p/3$. Assim temos um triângulo equilátero. ■

7. A Braquistócrona.

Em 1696, Johann Bernoulli publicou um artigo "Problème nouveau ad cuius solutionem Mathematici invitatur" na *Acta Eruditorum*, uma revista científica que teve Leibniz como um de seus fundadores. Nesse artigo o seguinte problema foi proposto. [Trata-se de um problema de Mecânica sobre o movimento de uma partícula sob a ação da gravidade]. "Considere A e B dois pontos sobre um plano vertical, mas não sobre a mesma perpendicular, e A estando a uma cota mais alta que B . Dentre as curvas ligando A a B , qual delas tem a propriedade que uma partícula deslizando sobre ela, sem atrito e sob a ação da gravidade, vai de A a B no menor tempo possível?" Essa curva se chama braquistócrona, uma palavra com etimologia grega: brachistos (= mais curto), chronos (= tempo).

Esse problema foi em seguida resolvido por Newton, Leibniz, Jakob Bernoulli e pelo próprio Johann. A solução de Jakob foi também publicada na *Acta Eruditorum* (1697) num trabalho com um título não menos pitoresco "Solutio problematum fraterno- rum".

Aqui vamos apresentar a solução de Johann, pois ela está mais no espírito deste artigo. Ela se baseia na lei de Snell da refração.

Para estudar a dinâmica do problema, vamos usar um sistema de coordenadas (x, y) , com o eixo dos y na direção vertical e orientado para baixo, e a origem $(0,0)$ do sistema coincidindo com o ponto A . Veja a Figura 22.

No início do fenômeno a partícula se acha em repouso no ponto A , (portanto, a energia cinética E_c da partícula no início é zero) e começa aí seu movimento de descida sob a ação da gravidade.

Tomando o eixo dos x como o referencial para cálculo da energia potencial, vemos que no instante inicial a energia potencial E_p da partícula é zero. Portanto pela Lei da Conservação da Energia, a energia total $E = E_p + E_c$ dever ser constante. Como, inicialmente, ela é zero, segue-se que em qualquer instante posterior deve ser também zero. Logo, designando por v a velocidade da partícula quando ela passa pelo ponto P de coordenada (x, y) , temos

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

onde m é a massa da partícula. Assim, $v = \sqrt{2gy}$, o que mostra

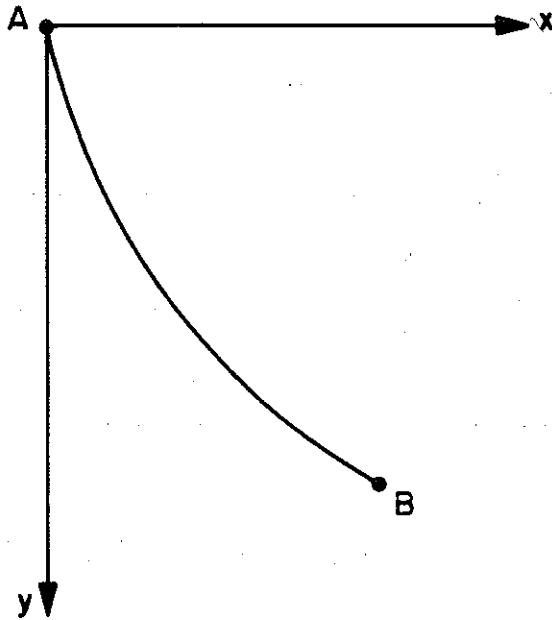


Figura 22

que a velocidade só depende de y e é, de fato, uma função crescente de y .

Façamos agora uma pausa a fim de estabelecer uma analogia desse fenômeno com o fenômeno de propagação da luz em um meio de densidade variável. Suponhamos que o meio atravessado pela luz é constituído por uma série de camadas paralelas F_1, F_2, F_3, \dots de densidade decrescente. Consequentemente, as velocidades de propagação da luz nessas camadas são $v_1 < v_2 < v_3 < \dots$. Veja Figura 23

Pela lei de Snell da refração da luz, temos

$$\frac{\text{sen } i_1}{v_1} = \frac{\text{sen } i_2}{v_2} = \frac{\text{sen } i_3}{v_3} = \dots$$

Agora, o caso em que a velocidade é uma função contínua pode ser obtido como o limite do caso discreto acima fazendo-se as espessuras das faixas tenderem a zero. Assim obtemos

$$\frac{\text{sen } i}{v} = \text{const} \quad (1)$$

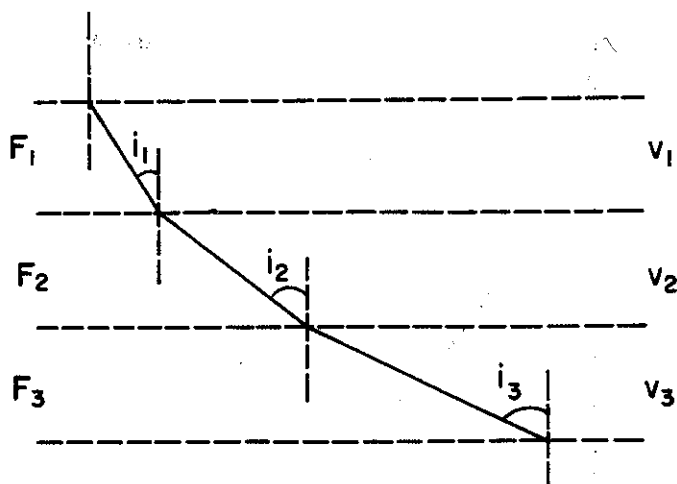


Figura 23

que é uma equação satisfeita em cada ponto da trajetória do raio de luz. O ângulo i se torna o ângulo da tangente à trajetória com o eixo y .

A analogia entre os dois fenômenos nos leva a reduzir o problema mecânico a um problema de propagação da luz num meio (o semiplano $y > 0$ da Figura 7.1) onde a velocidade da luz é dada por

$$v = \sqrt{2gy} \quad (2)$$

A trajetória do raio de luz será uma curva que representamos por $y(x)$ utilizando o sistema de coordenadas da Fig. 7.1. Logo

$$y'(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$$

de onde se segue, usando os conhecimentos da Trigonometria, que

$$\operatorname{sen} i = \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \quad (3)$$

Assim, utilizando (2) e (3) em (1), obtemos que a função $y(x)$ deve satisfazer a equação diferencial:

$$y[1 + (y')^2] = c \quad (4)$$

onde c é uma constante.

Estamos em presença de um problema da teoria das Equações Diferenciais; veja por exemplo [7]. O problema é obter uma solução $y(x)$ da equação (4) que além do mais passe pelos pontos A e B . Assim, se as coordenadas de B são (a, b) , a solução procurada deve satisfazer às condições

$$y(0) = 0 \text{ e } y(a) = b. \quad (5)$$

Para encontrar solução de (4) introduzimos uma variável θ definida por

$$y' = \cot \frac{\theta}{2} \quad (6)$$

Substituindo em (4) obtemos

$$y = 2c \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = c(1 - \cos \theta) \quad (7)$$

Como $dy = y' dx$, obtemos de (6) e (7)

$$dx = c \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \theta d\theta \quad (8)$$

de onde se segue

$$x = c(\theta - \operatorname{sen} \theta) + k \quad (9)$$

onde k é uma constante proveniente da integração de (8). Usando a primeira condição em (5) temos de (7) que $y = 0$ implica $\theta = 0$, e $x = 0$ implica $k = 0$. Portanto, a equação da curva $y(x)$ é dada em forma paramétrica por

$$x = c(\theta - \operatorname{sen} \theta) \quad y = c(1 - \cos \theta) \quad (10)$$

Agora a utilização da segunda condição de (5) nas equações (10) nos dá o valor de c , bem como o valor do parâmetro θ no ponto B .

As equações (10) representam uma cicloide. Veja Figura 24. A cicloide é o lugar geométrico descrito por um ponto de um círculo quando este rola sem deslizar sobre uma reta. Na Figura 24 essa reta é o eixo x .

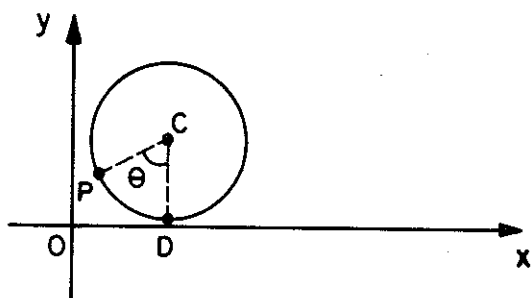


Figura 24

Quando θ é zero o ponto P está na origem. Assim $\gamma(OD) = \theta r$, onde θ é a medida do $\sphericalangle DCP$ em radianos e r é o raio do círculo. Logo as coordenadas de P são

$$x = \theta - r \operatorname{sen} \theta = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

que são as equações (10) com $r = c$. ■

Observação 7.1. O valor de θ no ponto B , como dissemos acima pode ser determinado a partir de (10). Assim, θ é a solução de

$$\frac{a}{b} = \frac{\theta - \operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta} \quad (11)$$

Mas será que (11) tem solução? Para responder a essa pergunta, basta estudar a função

$$f(\theta) = \frac{\theta - \operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}$$

a fim de se saber se a/b está em sua imagem. Um domínio razoável para f é o conjunto dos θ no intervalo $[0, 2\pi]$ que corresponde a um arco completo da cicloide. Utilizando-se as técnicas do Cálculo Diferencial podemos provar que $\lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) = 0$, $\lim_{\theta \rightarrow 2\pi} f(\theta) = +\infty$, e f é estritamente crescente. Logo quaisquer que sejam a e b dados,

existe um e somente um valor de θ que resolve (11). Concluimos pois que o problema de braquistócrona possui uma única solução, uma vez dados os pontos A e B . Nossa análise está mostrando que se a e b forem tais que a solução θ de (11) é maior do que π , a curva y passa por um mínimo antes do ponto B .

8. Epílogo e Prelúdio.

O nosso trabalho termina aqui, precisamente onde um mundo de matemática bonita começa! A maior parte dos problemas que estudamos vêm da Antiguidade. Os matemáticos gregos antigos se propuseram esses problemas e os resolveram usando as técnicas da Geometria Euclidiana, como nós o fizemos. É bem verdade que as questões de existência da solução do problema não eram por eles consideradas. Lembramos, porém, que os matemáticos até o século XIX, ao considerarem problemas semelhantes, também não tinham essa preocupação. Nas Observações feitas no decurso deste artigo, comentamos esses pontos mais delicados, dentro do rigor moderno, e fazendo apelo a um tipo de matemática introduzida após o século XVII.

O problema da braquistócrona foi tratado por nós, porque a bela resolução de Johann Bernoulli usa de modo engenhoso a analogia com a refração da luz, assunto discutido em uma seção anterior, o que dá uma continuidade suave ao nosso discurso! Além disso, a braquistócrona é um marco na evolução da Matemática. O problema, tratado pelos grandes matemáticos da época como dissemos, continuou a merecer a atenção das gerações seguintes. E o grande nome no século XVIII é Euler, um dos fundadores do Cálculo das Variações. Essa nova teoria, repousando no Cálculo Diferencial e Integral criado no século anterior, permitiu tratar de modo geral e simples uma série de problemas do tipo "braquistócrona". Assim, o problema da braquistócrona aparece como uma espécie de prelúdio de uma nova matemática. Uma nova matemática que não parou de crescer até hoje, tendo no rol de seus construtores grandes matemáticos em todas as gerações. Sua vinculação com a Física e a própria Geometria tem sido um fator estimulante em seu desenvolvimento.

Para concluir, vamos explicar de modo informal a transição entre a braquistócrona de Bernoulli e a infância do Cálculo das Variações. Na Figura 22 considere todas as curvas (diferenciáveis)

ligando A a B . A cada uma dessas curvas corresponde o tempo gasto pela partícula para ir de A até B , caso escolhesse essa curva para seu caminho. Assim se chamarmos Γ o conjunto de todas essas curvas, teremos uma função

$$T: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$$

que a cada curva $y(x)$ associa o tempo $T(y)$ explicado acima. O problema é encontrar $y_0 \in \Gamma$ tal que

$$T(y_0) = \text{Inf} \{T(y) : y \in \Gamma\}.$$

Ora, estamos em presença de um problema semelhante aos descritos na seção 6. A diferença é que lá as funções estudadas tinham por campo de definição o conjunto \mathbf{R} dos reais ou o espaço R^N . Aqui o campo de definição não é desse tipo, e sim é, ele próprio, um conjunto de funções. A questão então é:

“Como usar o cálculo diferencial para encontrar y_0 ?”

Hoje existem modos de tratar essa questão de modo elegante e conciso: há que colocar estruturas adequadas em Γ para que se possa estender para uma função como T a noção de derivada e aí usar as propriedades dessa nova noção. Entretanto, vamos prosseguir nossa conversa de modo mais terra a terra, fazendo apelo apenas ao Cálculo Diferencial e Integral, como Euler já o conhecia. A função $T(y)$ tem uma expressão, em termos de integral, como veremos a seguir. Usamos coordenadas paramétricas $x(t), y(t)$ para um ponto P da curva, onde t é o tempo decorrido pela partícula para chegar de A a P . Assim a velocidade v da partícula (que é medida sobre a curva) pode ser escrita como

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

[Estamos supondo que $dx/dt > 0$, pois a família Γ é de curvas ligando A a B , que são gráficos]. De (1) e da expressão (2) da seção 7 obtemos

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

e daí temos a expressão para $T(y)$

$$T(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (2)$$

onde a é abcissa do ponto B .

Portanto, o problema da braquistócrona é um caso particular do seguinte problema geral. Seja Γ o conjunto de todas as funções diferenciáveis $y(x)$ num intervalo $[x_1, x_2]$ dado e tais que $y(x_1) = y_1$ e $y(x_2) = y_2$ onde y_1 e y_2 são dados. Seja

$$F: (x_1, x_2) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

uma função contínua e diferenciável. Então

$$\Phi(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

(supondo que a integral está definida) expressa uma função $\Phi: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$. O problema é encontrar $y_0 \in \Gamma$ tal que

$$\Phi(y_0) = \text{Inf}\{\Phi(y) : y \in \Gamma\}.$$

Aqui, vem a idéia de Euler para usar o Cálculo Diferencial nesse problema. Seja Γ_0 o conjunto de todas as funções diferenciáveis definidas em $[x_1, x_2]$ e tais que $y(x_1) = y(x_2) = 0$. Para cada $\eta \in \Gamma_0$ considere a função $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(t) = \Phi(y_0 + t\eta).$$

Como $y_0 + t\eta \in \Gamma$ e como y_0 é um ponto de mínimo para Φ segue-se que $t = 0$ é um ponto de mínimo para f . Logo $f'(0) = 0$, que escrito em termos de integral nos dá

$$\int_{x_1}^{x_2} [F_y \eta + F_{y'} \eta'] dx = 0 \quad (3)$$

onde omitimos a dependência em x (i.e. $F_y = F_y(x, y_0(x), y_0'(x))$) e F_y e $F_{y'}$ designam as derivadas parciais. A expressão (3) é hoje conhecida como a equação de Euler-Lagrange. Supondo (é possível

provar que isso ocorre) que $F_{y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ é diferenciável podemos integrar por partes e obter a equação de Euler-Lagrange em sua forma diferencial

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0. \quad (4)$$

Aplicado ao caso da braquistócrona obtemos, após alguns cálculos, uma expressão que nada parece com a equação (4) da seção 7. Entretanto ela muito tem a ver com aquela equação (4). De fato, (4) da seção 7 é uma integral primeira. Isso quer dizer de modo preciso o seguinte: toda solução da equação de Euler-Lagrange de braquistócrona deve satisfazer à equação (4). Para ver isso basta demonstrar o seguinte fato geral: se F não depende de x , então $F - y' F_{y'} = c$ é uma integral primeira da equação de Euler-Lagrange da funcional Φ . Ao leitor interessado, recomendamos os livros sobre Cálculo das Variações e para uma primeira leitura o Capítulo 9 de [7]. Felicidades!

BIBLIOGRAFIA

1. G. S. S. Avila, "Cálculo Diferencial e Integral," em 3 volumes, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1978.
2. R. Courant, H. Robbins, "What is Mathematics?," Oxford University Press, 1977.
3. D. G. Figueiredo, "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais," Projeto Euclides, Editora Edgard Blücher Ltda, 1977.
4. M.P. do Carmo, "Differential Geometry of Curves and Surfaces," Prentice-Hall, Inc, 1976.
5. E. L. Lima, "Curso de Análise, volumes 1 e 2," Projeto Euclides, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1981.
6. E.E. Moise, F.L. Downs, "Geometria Moderna em 2 volumes," Editora Edgard Blücher Ltda, 1971.
7. G. F. Simmons, "Differential Equations with applications and historical notes," McGraw-Hill Book Co, 1972.
8. J. Stillwell, "Mathematics and Its History," Springer Verlag, 1989.