

O 16º Problema de Hilbert

César Camacho

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110
22460 Rio de Janeiro

Dedicado a Elon Lima por ocasião dos seus 60 anos

Em 1900, em Paris, durante o 2º Congresso Internacional de Matemáticos, D. Hilbert propôs uma coleção de 23 problemas que viriam influenciar fortemente o desenvolvimento da Matemática deste século. Muitos destes problemas foram resolvidos, outros resistem ainda. Dentre os últimos encontra-se a segunda parte do 16º problema de Hilbert, o qual pede:

Determinar o número máximo de ciclos limites que pode admitir um campo de vetores em \mathbf{R}^2

$$V = P(x, y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

onde P e Q são polinômios de grau n .

A noção de ciclo limite de um campo de vetores foi introduzida por H. Poincaré em 1881 na sua célebre "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle"⁽¹⁾. Uma curva integral de V pelo ponto (x_0, y_0) é uma curva $\gamma: (a, b) \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ tal que a) $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ e b) A curva γ é tangente ao campo V , i.e. se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ então $P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) = 0$ para todo $t \in (a, b)$. A curva integral é maximal quando a

⁽¹⁾J. Math. 7 (1881), 375-422.

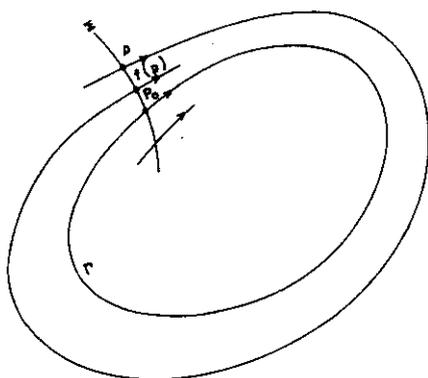


Figura 1

aplicação γ não pode ser estendida a um intervalo maior com as propriedades a) e b). O teorema de existência e unicidade das equações diferenciais ordinárias garante que por qualquer ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passa uma única solução maximal de V . A imagem de γ é chamada trajetória de V . As trajetórias podem ser de três tipos: pontos, chamados singularidades, que coincidem com os zeros comuns a P e Q ; curvas simples fechadas, também chamadas ciclos ou trajetórias periódicas, e imagens injetivas de reta real.

Dado um ciclo Γ e um ponto $p_0 \in \Gamma$ consideremos um segmento Σ centrado em p_0 e transversal ao campo V . É possível demonstrar que para todo $p \in \Sigma$ suficientemente próximo a p_0 a trajetória positiva de V por p volta a cortar Σ uma primeira vez num ponto $f(p) \in \Sigma$. A aplicação f assim definida é chamada primeiro retorno associada a Γ e Σ .

Um *ciclo limite* de V é uma trajetória periódica Γ cuja aplicação de primeiro retorno numa seção transversal Σ *não é a identidade*. Como P e Q são funções analíticas f é analítica e consequentemente os ciclos limites são isolados entre os ciclos de V .

EXEMPLO: A equação de Van der Pol:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad \mu > 0.$$

que aparece naturalmente na teoria de circuitos elétricos, pode ser

considerada, pela mudança de variáveis,

$$y = \frac{dx}{dt} + \int_0^x \mu(1-x^2) dx$$

como um campo de vetores

$$V(x, y) = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} = \left(y - \mu x + \mu \frac{x^3}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$$

polinomial. Este campo possui uma singularidade em $0 \in \mathbf{R}^2$ e um único ciclo limite. (Para uma demonstração ver [8]).

A primeira tentativa de resolver o 16º problema de Hilbert é devida a I.G. Petrovsky e E.M. Landis que em 1955, [10], anunciaram que quando P e Q são polinômios de grau 2, então existem no máximo 3 ciclos limites. A conclusão deles se baseou numa análise de V considerado como um campo de vetores complexo em \mathbf{C}^2 cujas trajetórias passam a ser superfícies de Riemann abertas ou pontos. A noção de ciclo limite pode ser generalizada para a noção de ciclo limite complexo. Este é uma curva simples numa trajetória complexa sobre a qual o primeiro retorno das trajetórias complexas é uma transformação f de uma variável complexa que não é periódica, i.e. $f^n \neq$ identidade para todo $n \neq 0$. Em 1969 Y. Il'yashenko [5] mostrou que arbitrariamente próximos a um campo hamiltoniano de grau n , i.e. um campo de forma:

$$V_G = -G_y \frac{\partial}{\partial x} + G_x \frac{\partial}{\partial y}$$

onde G é um polinômio de grau $n+1$, existem campos de vetores de grau n que exibem um número arbitrariamente grande de ciclos limites complexos derrubando um dos argumentos principais na demonstração de [10]. Assim, embora a generalização complexa do problema de Hilbert não faça sentido, a complexificação de V fornece informação importante sobre o problema real. Finalmente, em 1980 Shi Song Ling [12] mostrou com um exemplo que existem campos de vetores de grau 2 com quatro ciclos limites.

É natural então se indagar se todo campo polinomial admite como máximo um número finito de ciclos limites reais. Uma resposta positiva a esta questão tinha sido fornecida por H. Dulac em

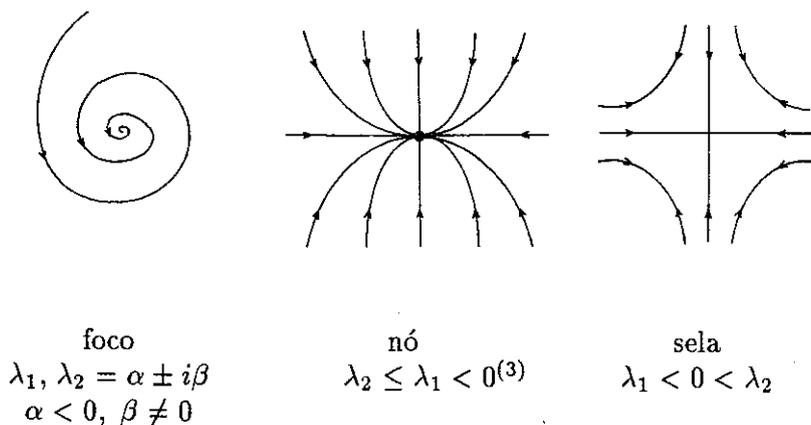


Figura 2

1923, [2]. Uma análise cuidadosa deste trabalho no entanto permitiu concluir que a demonstração proposta está incompleta. E o teorema de Dulac passou a ser chamado de "Problema de Dulac".

Em 1984, J. Il'yashenko resolveu uma versão genérica deste problema:

Teorema⁽²⁾, [6]. *Suponhamos que todas as singularidades de V são hiperbólicas, inclusive no infinito. Então só existe um número finito de ciclos limites de V .*

Uma singularidade $p \in \mathbf{R}^2$ do campo V (i.e. $V(p) = 0$) é chamada *hiperbólica* quando a derivada $DV(p)$ tem seus dois autovalores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}$ com parte real não nula. Três casos podem se apresentar (Fig. 2)

ou os correspondentes com setas invertidas.

Os pontos no infinito aos quais se refere o enunciado do teorema estão situados no equador $E = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ da esfera unitária $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e são pontos singulares do campo V^* em S^2 obtido a partir de V da maneira seguinte: Consideremos V definido no plano $\mathbf{R}_0^2 = \{z = 1\}$ de \mathbf{R}^3 pela forma diferencial η ,

$$\eta = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$$

⁽²⁾De fato este teorema é um pouco mais geral.

e seja $\pi: \mathbf{R}^3 \setminus \{z = 0\} \rightarrow \mathbf{R}_0^2$ definida por $\pi(x, y, z) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$.

A sua restrição $\pi|_{S^2 \setminus E}: S^2 \setminus E \rightarrow \mathbf{R}_0^2$ é chamada projeção central de Poincaré. Pela aplicação π , η induz a forma $\pi^*\eta$ em $\mathbf{R}^3 \setminus \{z = 0\}$.

$$\pi^*\eta = -Q\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) d\left(\frac{x}{z}\right) + P\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) d\left(\frac{y}{z}\right)$$

Se $p = \text{grau de } P$, $q = \text{grau de } Q$ e n é o maior dos dois, temos que

$$\begin{aligned} \pi^*\eta = & \underbrace{-z^{n-q+1}\tilde{Q}(x, y, z)}_A dx + \underbrace{z^{n-p+1}\tilde{P}(x, y, z)}_B dy \\ & + \underbrace{(xz^{n-q}\tilde{Q} - yz^{n-p}\tilde{P})}_{C} dz \end{aligned}$$

onde $\tilde{P}(x, y, z) = z^p P(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ e $\tilde{Q}(x, y, z) = z^q Q(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ são polinômios homogêneos de graus p e q respectivamente. Observe que $\pi^*\eta$ está bem definida em \mathbf{R}^3 . O campo de vetores em \mathbf{R}^3

$$V^* = (Bz - Cy)\frac{\partial}{\partial x} + (Cx - Az)\frac{\partial}{\partial y} + (Ay - Bx)\frac{\partial}{\partial z}$$

é polinomial, claramente tangente a esfera S^2 , e como anula a forma $\pi^*\eta$, se projeta em V por π , i.e. $d\pi(V^*(p)) = V(\pi(p))$. Este campo restrito a S^2 é o induzido pela projeção central de Poincaré. O enunciado exige que todas as singularidades de V^* em S^2 sejam hiperbólicas.

Utilizando em parte o teorema de Il'yashenko, R. Bamón resolveu em 1985 o problema de Dulac para campos de grau 2.

Teorema [1]. *Qualquer campo de vetores quadrático em \mathbf{R}^2 só possui um número finito de ciclos limites.*

Sem a pretensão de demonstrar o teorema de Il'yashenko passamos a indicar quais as dificuldades para demonstrá-lo. Suponhamos por absurdo que existem infinitos ciclos limites (γ_n) em S^2 . Como o ambiente é compacto existe um ponto regular $p \in S^2$ de V^* que é ponto de acumulação das γ_n . Pelo teorema de Poincaré-Bendixson temos as seguintes possibilidades para a trajetória γ

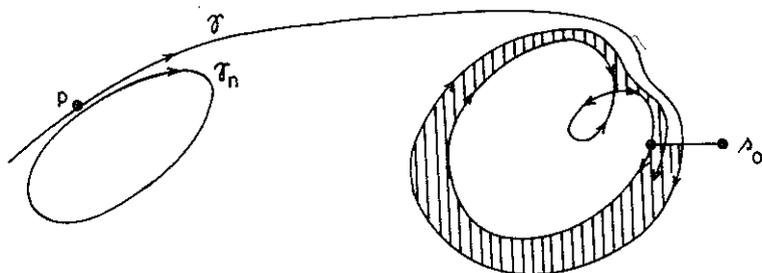


Figura 3.

que passa por p . 1) γ é uma trajetória periódica, 2) O limite positivo de γ é uma trajetória periódica, 3) O limite positivo de γ é um ciclo fechado 4) O limite positivo de γ é um ponto singular. As duas primeiras são impossíveis já que a transformação de primeiro retorno f da trajetória periódica é analítica e como esta é acumulada pelas γ_n , f teria infinitos pontos fixos com ponto de acumulação no limite de γ o que implicaria que f é a identidade.

Em 3) um ciclo fechado C é uma união conexa de pontos singulares (seus vértices) e de trajetórias (seus lados) que possui uma aplicação de primeiro retorno f , i.e. existe uma curva analítica transversal a V , $\Sigma: [0,1] \rightarrow S^2$, $\Sigma(0) \in C$, e tal que a trajetória que passa por $\Sigma(s)$ corta pela primeira vez Σ em $\Sigma(f(s))$ para s suficientemente pequeno, $s \leq s_0$. Para n suficientemente grande γ_n penetra na região sombreada da figura e sem poder sair dela contradiz o fato de ser periódica. O mesmo argumento serve para 2).

Só resta a última possibilidade e neste caso é fácil verificar que a singularidade no limite de γ é um ponto de sela $p_1 \in S^2$. Assim as γ_n se acumulam também em outra separatriz γ' de p_1 e pelo mesmo argumento anterior γ' se acumula numa sela p_2 . Como o número de selas é finito, após um número finito de etapas concluímos que $\gamma, \gamma', \dots, \gamma^{(m)} = \gamma$ são os lados de um ciclo fechado C .

É preciso então demonstrar que a aplicação de primeiro retorno f de um ciclo fechado C onde os vértices $p_1, \dots, p_{n+1} = p_1$ são pontos de sela, não tem uma infinidade de pontos fixos isolados. Em cada p_j introduzimos coordenadas locais (x_j, x'_j) tais

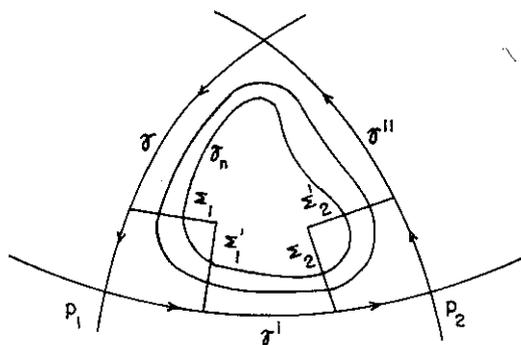


Figura 4.

que $p_j = (0,0)$ e $x_j = 0$, $y_j = 0$ são lados de C . As semiretas $\Sigma_j = \{(x_j, 1); x_j \geq 0\}$, $\Sigma'_j = \{(1, y_j); y_j \geq 0\}$ são transversais onde o primeiro retorno está bem definido. A trajetória pelo ponto $(x_j, 1)$ corta pela primeira vez Σ'_j em $(1, y_j) = g_j(x_j, 1)$ e Σ_{j+1} em $(x_{j+1}, 1) = h_j(1, y_j)$. Temos então

$$f = h_m \circ g_m \circ h_{m-1} \circ g_{m-1} \circ \dots \circ g_1.$$

As transformações g_j são chamadas *transformações de Dulac*. Elas são analíticas fora de $0 \in \Sigma_j$. O seu comportamento em $0 \in \Sigma_j$ foi analisado por Dulac [2]. O seu prolongamento analítico é fundamental na demonstração do teorema de Π 'yashenko.

A *transformação de Dulac*. Consideremos um ponto de sela p de um campo V . Suponhamos que em coordenadas locais (x, y) as separatrizes de p são dadas por $x = 0$ e $y = 0$, que V está bem definido numa vizinhança do polidisco $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, e que a transformação de Dulac aplica $\Sigma = [0, 1] \times 1$ em $\Sigma' = 1 \times [0, 1]$. A expressão local de V é

$$V = -(\lambda_1 x + a_1(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} + (\lambda_2 y + a_2(x, y)) \frac{\partial}{\partial y}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e a_1, a_2 só contém termos de ordem superior a um. O quociente $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$ é chamado expoente característico. A transformação g pode ser facilmente calculada se V admite uma integral primeira, i.e., uma função I que não é constante e satisfaz $DI(V) = 0$; já que nesse caso $y = g(x)$ é solução da equação

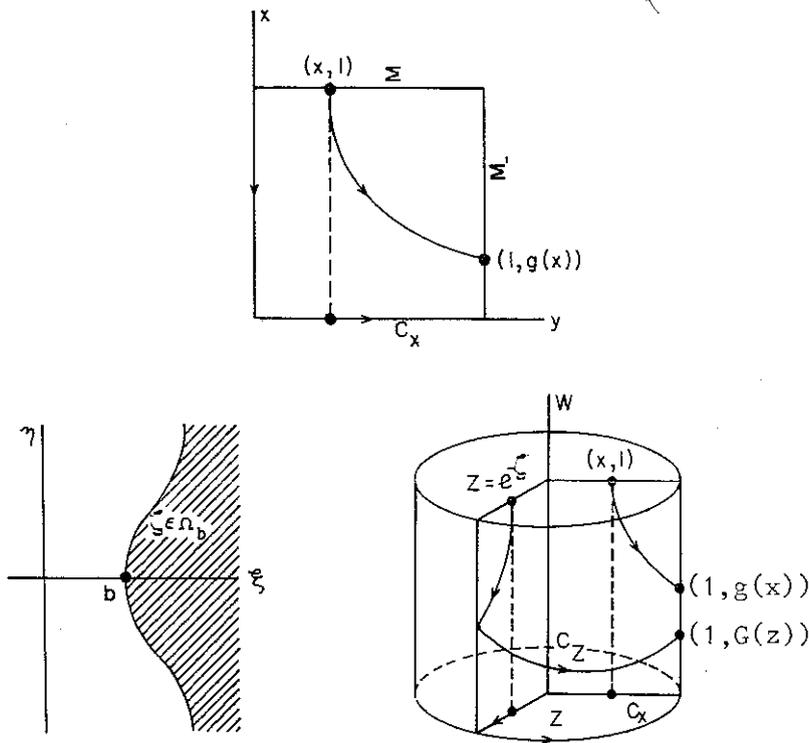


Figura 5.

$I(x, 1) = I(1, y)$. Por exemplo se V é linear, i.e. se $a_1 = a_2 \equiv 0$, então $I(x, y) = x^\lambda y$ é uma integral primeira e assim $g(x) = x^\lambda$. Em geral é possível encontrar uma integral primeira para a forma normal *formal* de V , i.e., uma expressão de V em séries de potências não necessariamente convergente. Por exemplo, quando $\lambda \notin \mathbf{Q}$ então V é *formalmente* linearizável. Se $\lambda = p/q$, $p, q \in \mathbf{N}$, é possível encontrar uma forma normal C^∞ para V a qual possui a integral primeira, [9]:

$$I(x, y) = x^\alpha y^\beta \exp(1/x^p y^q), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

A solução de $I(x, 1) = I(1, \hat{g}(x))$ nos fornece uma expressão

$$\hat{g}(x) = x^\lambda + \sum_{\ell=1}^{\infty} x^{\mu_\ell} P_\ell(\log x) \quad (1)$$

onde $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ é uma seqüência não limitada e os P_ℓ são polinômios. O conjunto \mathcal{D} destas séries formais é um grupo com a operação de composição. Ele é chamado o *grupo de Dulac*. Dizemos também que g possui um desenvolvimento assintótico \hat{g} .

O prolongamento analítico G de g é obtido pela complexificação do campo V :

$$\tilde{V} = -(\lambda_1, z + a_1(z, w)) \frac{\partial}{\partial z} + (\lambda_2 w + a_2(z, w)) \frac{\partial}{\partial w}$$

onde $z = x + ix'$, $w = y + iy'$.

A função G está definida como uma função multivaluada no disco furado $\tilde{\Sigma} \times 1$ onde $\tilde{\Sigma} = \{z \in \mathbf{C}; 0 < |z| < 1\}$, ou como uma função bem definida num subdomínio de $\{\zeta = \xi + i\eta \in \mathbf{C}; \xi > 0\}$ considerado como recobrimento universal de $\tilde{\Sigma}$ pela aplicação $\pi(\zeta) = \exp(-\zeta)$.

Geometricamente, $g(x)$ é obtida pelo levantamento do caminho $c_x: t \mapsto (1-t)x + t$, segundo a projeção $(x, y) \mapsto x$, ao longo da solução de V com origem em $(x, 1)$. O ponto final é $(1, g(x))$. Similamente, como \tilde{V} é transversal a projeção $(z, w) \mapsto z$, G é obtida levantando segundo esta projeção o caminho $c_z = \exp(-\tau_z)$, onde τ_z é a composição dos caminhos $t \mapsto (1-t)z + tyi$ e $t \mapsto (1-t)yi$, e o ponto inicial é $(e^{-z}, 1)$ e o ponto final $(1, G(z))$.

Trata-se então de demonstrar que uma aplicação f cujo desenvolvimento assintótico está em \mathcal{D} possui a propriedade das funções analíticas:

“Se $x_n \rightarrow 0$ é uma seqüência infinita de pontos fixos de f , i.e. $f(x_n) = x_n$ para todo n , então $f \equiv$ identidade”. Nesta direção o que está demonstrado no trabalho de Dulac é a seguinte:

Proposição 1 ([2]). *A aplicação de primeiro retorno f que é a composição de transformações de Dulac com difeomorfismos analíticos (h_j) possui desenvolvimento asintótico em \mathcal{D} e como f possui infinitos pontos fixos:*

$$f(x) = x + 0(x^n) \quad \text{para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Proposição 2 ([6]). *A função $x \mapsto f \circ \exp(-x)$, $x \in \mathbf{R}^+$ possui um prolongamento analítico limitado F definido num domínio $\Omega_b = \{\zeta = \xi + i\eta, \xi > b(1 + \eta^2)^{1/4}\} \subset \mathbf{C}$, $b > 0$.*

Supondo que f possui infinitos pontos fixos, temos que $\varphi: \{z = x + iy; x \geq 0\} \rightarrow \mathbf{C}$ dada por $\varphi(z) = z + b'(1+z)^{1/2}$ tem sua imagem contida em Ω_b para b' suficientemente grande. A aplicação $\phi(z) = F\varphi(z) - \exp(-\varphi(z))$ é holomorfa no semiplano real positivo e existem números reais K, K_n tais que

$$|\phi(z)| < K \text{ e } |\phi(x)| < K_n \exp(-nx) \text{ se } x \in \mathbf{R}_+ \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Uma aplicação do Teorema de Phragmén Lindelöf [6] implica que de fato $\phi(x) < K'e^{-nx}$ para todo $n \in \mathbf{N}$, i.e. $\phi \equiv 0$ ou $f \equiv$ identidade. O que demonstra o Teorema de Il'yashenko.

Um resumo da demonstração do Teorema de Bamón pode ser encontrada em [9].

A solução geral do problema de Dulac tem que levar em consideração o caso em que uma seqüência infinita de ciclos limites se acumula num ciclo fechado contendo alguma singularidade degenerada (não hiperbólica) como vértice.

As singularidades degeneradas podem ser simplificadas por um processo de redução que consiste na aplicação sucessiva de transformações quadráticas $q: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ $q(x, t) = (x, y)$ onde $y = tx$. Embora q não seja um difeomorfismo, o campo V nas variáveis (x, y) pode ser transformado num outro \bar{V} nas variáveis (x, t) o qual possui a mesma estrutura de órbitas fora do "divisor" $x = 0$. Tomemos como exemplo o seguinte

$$V = (x^3 + 2x^2y + y^3) \frac{\partial}{\partial x} + (3xy^2 + x^2y + y^3) \frac{\partial}{\partial y}.$$

A transformação q leva V em

$$q_*V = x^3(1 + 2t + 2t^3) \frac{\partial}{\partial x} + x^2t^2(1 + t - 2t^2) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Dividindo por x^2 obtemos um campo com singularidades isoladas $\bar{V} = \frac{q_*V}{x^2} = x(1 + 2t + 2t^3) \frac{\partial}{\partial x} + t^2(1 + t - 2t^2) \frac{\partial}{\partial t}$ o qual exhibe o seguinte espaço de fase perto de $x = 0$:

As singularidades que aparecem no divisor $x = 0$ são isoladas e conseqüentemente poderemos aplicar novamente uma transformação quadrática nestes pontos. O teorema de Seidenberg [11] garante que após um número finito destas operações todas as singularidades se tornam ou hiperbólicas com autovalores λ_1, λ_2 tais

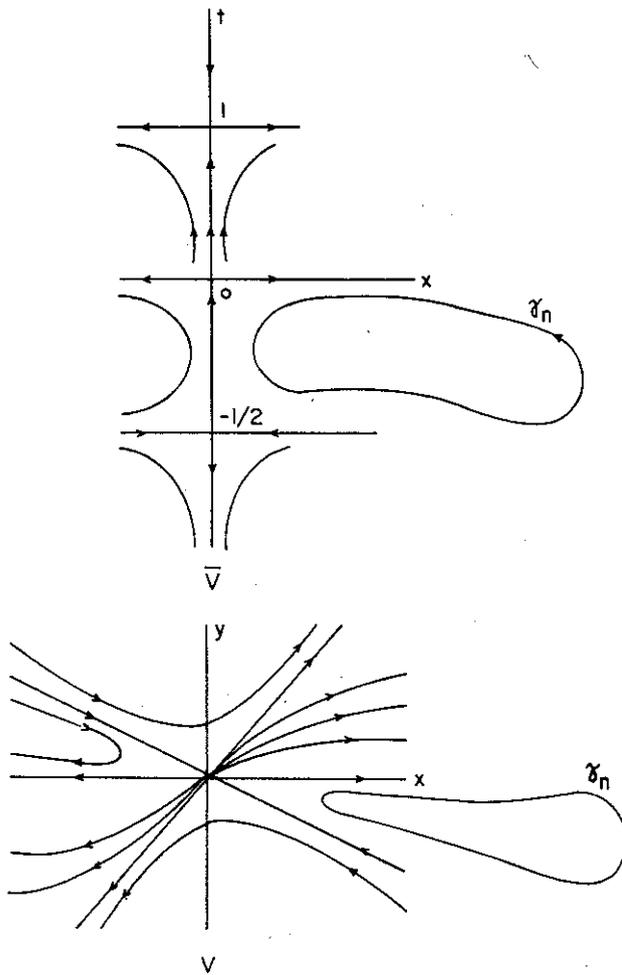


Figura 6.

que $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_+$ ou semihiperbólicas. Estas últimas também chamadas selas-nós tem uma forma local do tipo:

$$x^{p+1} \frac{\partial}{\partial x} - t(1 + \lambda x^p + A(x, t)) \frac{\partial}{\partial t}$$

onde $p \geq 1$ e A tem ordem $\geq p + 1$.

No exemplo acima a singularidade $(0,0)$ é semi-hiperbólica, já as outras duas $(0, -1/2)$ e $(0, 1)$ são pontos de sela. Na figura

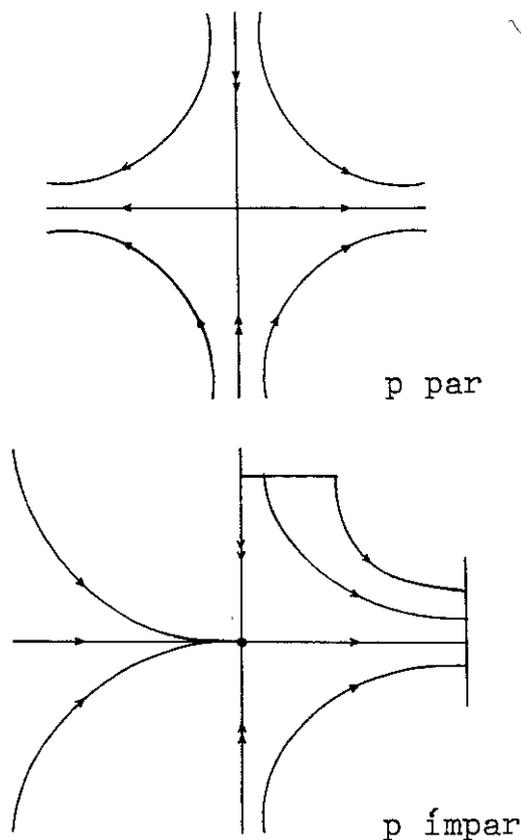


Figura 7.

se ilustra também a possibilidade de uma seqüência (γ_n) de ciclos limites se acumular num ciclo contendo tanto selas como selas-nós.

Um cálculo simples mostra que a aplicação g de Dulac no caso de uma sela nó não é mais do tipo (*) e que $g \circ \exp(-x)$ não possui mais um prolongamento limitado. A solução deste problema foi anunciada por vários autores [4], [7], [3], mas até agora nenhuma demonstração apareceu publicada.

O problema original proposto por Hilbert contudo continua em aberto, e talvez mais longínquo, mesmo em grau 2 após todos estes anos de existência. O leitor interessado poderá obter maiores informações nas referências de [9] e [13].

BIBLIOGRAFIA

1. R. Bamón, *Solution of Dulac's problem for quadratic vector fields*, Publ. Math. de l'IHES **64**, 111-142.
2. H. Dulac, *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France (1923), 45-188.
3. J. Ecalle, *Solution du problème de Dulac et accéléro-sommation de l'application de retour*, Bulletin "Resurgence" N 1.
4. J. Ecalle, J. Martinet, R. Moussu, J. P. Ramis, *Non-accumulation de cycles limites*, CRAS **304** (1987), (I) 375-378 (II) 431-434.
5. Y. Il'yashenko, *An example of equations $\frac{dw}{dz} = P_n(z, w)/Q_n(z, w)$ having...*, Math. Sbor. **80**, **3** (1969), 365-378.
6. Y. Il'yashenko, *Limit cycles of polynomial vector fields with nondegenerate singular points in the real plane*, Funk. Anal. and Appl. **18**, **3** (1984), 199-207.
7. Y. Il'yashenko, $Y \subset \pi$, Mam. Hayk. **42**, **3** (1987 pp 223).
8. S. Lefschetz, "Lectures on Differential Equations," Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press.
9. R. Moussu, *Le Problème de la finitude du nombre de cycles limites*, [d'après R. Bamón et Y. Il'yashenko] Sem. Bourbaki 38ème année, Asterisque **655** (1987), 145-146.
10. I.G. Petrovsky, E.M. Landis, *On the number of limit cycles of the equation $\frac{dy}{dx} = P(x, y)/Q(x, y)$ where P and Q are polynomials*, Am. Math. Soc. Transl. **2**, **14** (1960), 181-200.
11. A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differential equation $Ady = Bdx$* , Amer. Jour. of Math. (1968), 248-269.
12. Shi Song Ling, *A concrete example of the existence of forer limit cycles for plane quadratic systems*, Sci. Sinica. Ser. A, **23** (1980), 153-158.
13. J. Ch. Yoccoz, *Non-Accumulation de cycles limites*, Sem. Bourbaki, Asterisque **690** (1989).