

# O Índice de Morse das Superfícies Mínimas

Manfredo P. do Carmo

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110  
22460 Rio de Janeiro

Ao Elon, nos seus 60 anos

A teoria das superfícies mínimas é um tópico antigo em Matemática que se iniciou com Lagrange em 1760 e tem tido surtos esporádicos de intenso desenvolvimento. As últimas três décadas presenciaram um destes períodos de grande atividade, e gostaria de apresentar aqui uma questão que está em pleno desenvolvimento.

Recordemos que uma superfície mínima  $M \subset \mathbb{R}^3$  é definida pela condição de ser sua curvatura média  $H = (k_1 + k_2)/2$  identicamente nula; em outras palavras, em cada ponto  $p$  de  $M$  as curvaturas normais máxima  $k_1$  e mínima  $k_2$  satisfazem  $k_1 = -k_2$ . Decorre daí que elas podem ser pensadas fisicamente como a posição de equilíbrio de uma película elástica submetida unicamente à ação da tensão superficial.

Um ponto importante é que as superfícies mínimas  $M$  limitadas por uma curva fechada  $\partial M$  são soluções de um problema variacional envolvendo a área, a saber,  $M$  é ponto crítico da área de todas as perturbações de  $M$  que deixam o bordo  $\partial M$  fixo. Mais precisamente, se  $f$  é uma função diferenciável por partes em  $M$  (suposta agora orientada) que se anula em  $\partial M$ , e considerarmos a perturbação a um parâmetro

$$x_t(p) = x_0(p) + tf(p)\eta(p), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad (1)$$

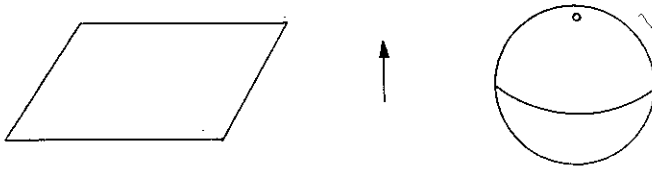


Figura 1

onde  $x_0$  é o vetor posição de  $M$  e  $\eta$  é o seu vetor unitário normal, obteremos que

$$\frac{dA}{dt}(0) = 0,$$

onde  $A: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}$  é a área da superfície  $x_t$ .

É natural tentar obter condições para que tal ponto crítico seja realmente um mínimo, i.e., para que  $\frac{d^2A}{dt^2}(0) > 0$  para qualquer perturbação de  $M$ . Fisicamente, isto significa que o equilíbrio da película elástica é estável, no sentido que para qualquer perturbação de  $M$  mantendo  $\partial M$  fixo, a tensão superficial fará  $M$  voltar à posição inicial de equilíbrio. As superfícies mínimas que satisfazem a esta condição são chamadas *estáveis*.

É claro que a busca de condições para a estabilidade interessou aos primeiros investigadores em superfícies mínimas. Um resultado completamente satisfatório, entretanto, foi só obtido em 1974.

**Teorema 1.** (J.L. Barbosa e M. do Carmo [1] e [2]) *Seja  $M$  uma superfície mínima orientável em  $\mathbf{R}^3$ , compacta e com bordo  $\partial M$ , e seja  $g: M \rightarrow S^2$  a sua aplicação normal de Gauss. Se  $\text{area } g(M) < 2\pi$ , então  $M$  é estável.*

O resultado é o melhor possível no sentido que existem superfícies mínimas não-estáveis cuja área da imagem esférica é  $2\pi + \varepsilon$ , onde  $\varepsilon > 0$  é arbitrário.

Uma aplicação do teorema acima é que gráficos mínimos, isto é, superfícies mínimas na forma  $z = f(x, y)$ , são estáveis. Por outro lado, um teorema de Bernstein afirma que se um gráfico mínimo está definido em todo o plano  $xy$  (de modo que a superfície é completa no sentido de não ter fronteiras ou buracos), então tal

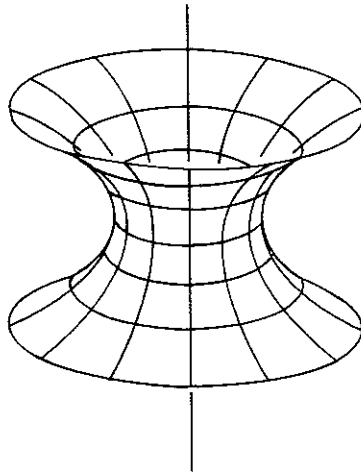


Figura 2

gráfico é um plano. É profundamente surpreendente que o teorema de Bernstein possa ser estendido substituindo *gráfico* por *estável*.

**Teorema 2.** (M. do Carmo, C.K. Peng [3] e Fischer-Colbrie, R. Schoen [6]) *As únicas superfícies mínimas orientáveis do  $\mathbb{R}^3$  que são estáveis e completas são os planos.*

Os teoremas 1 e 2 dão um razoável entendimento da estabilidade de superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  e levantam a seguinte questão. Suponha que uma superfície mínima não é estável. Como se pode medir a sua não-estabilidade. Para isto, precisamos de alguns preliminares. Vamos nos restringir inicialmente às superfícies mínimas orientáveis compactas  $M$  com bordo  $\partial M$ .

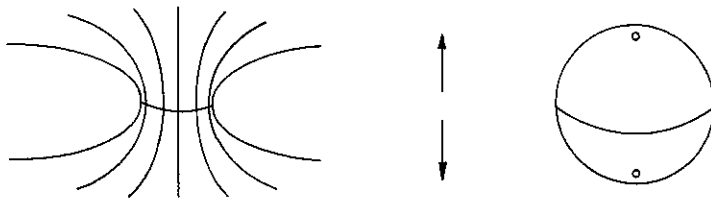


Figura 3

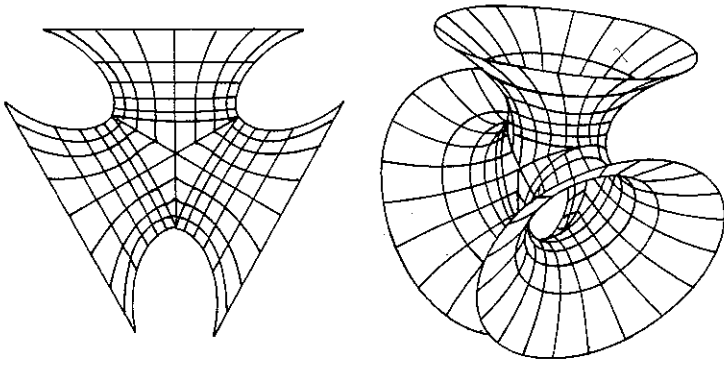


Figura 4

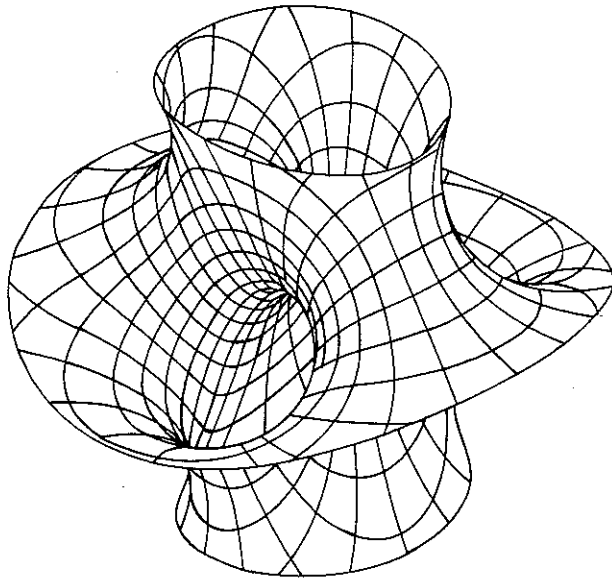


Figura 5

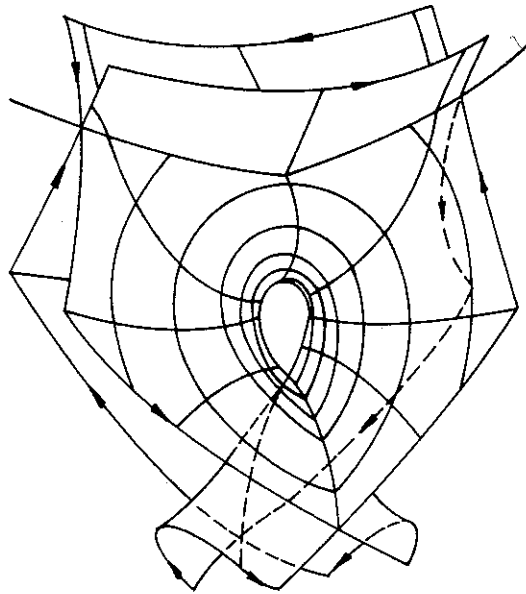


Figura 6

Se  $M$  não é estável, existe uma função  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  com  $f|_{\partial M} = 0$  e tal que  $\frac{d^2 A}{dt^2}(0) < 0$ , onde  $A(t)$  é a área da perturbação (1) correspondente a  $f$ . Pode ser provado que tal derivada segunda para  $t = 0$  é dada por

$$A''(0) = - \int_M (f \Delta f - 2K f^2) dM \stackrel{\text{def}}{=} I(f),$$

onde  $\Delta f$  é o laplaciano de  $f$  em  $M$  e  $K = k_1 k_2$  é a curvatura gaussiana de  $M$ . Seja  $F$  o espaço vetorial (de dimensão infinita) das funções diferenciáveis por partes em  $M$  que se anulam em  $\partial M$ . Não é difícil mostrar que  $I: F \rightarrow \mathbf{R}$  é uma forma quadrática sobre o espaço  $F$ . A dimensão do maior subespaço de  $F$  no qual  $I$  é negativa definida (o chamado índice da forma quadrática  $I$ ) fornece uma medida da não-estabilidade de  $M$ . Por razões que apresentaremos dentro em pouco, tal índice é finito, e é chamado o índice (de Morse)  $Ind(M)$  da superfície mínima  $M$ .

Uma interpretação conveniente do índice de  $M$  é a seguinte.

Considere em  $F$  o bem conhecido produto interno

$$(f, g) = \int_M fg dM,$$

e defina uma aplicação linear  $L: F \rightarrow F$  por  $Lf = \Delta f - 2Kf$ ,  $f \in F$ . Então  $I(f) = -(Lf, f)$ . Seja  $\lambda$  dado por  $Lf + \lambda f = 0$ , para algum  $f$ , isto é,  $\lambda$  é um valor próprio de  $L$  (pela escolha que fizemos do sinal do laplaciano, é conveniente tomar o valor próprio de  $L$  com o sinal trocado). É um resultado de Análise que podemos diagonalizar  $L$  com uma seqüência crescente de valores próprios reais:

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \dots \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

cujos subespaços de vetores próprios têm dimensão finita. Portanto,

$$I(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f_i, f_i), \quad (3)$$

onde  $f_i$  pertence ao subespaço próprio de  $\lambda_i$ . Decorre daí que  $ind(M)$  é o número (contado com multiplicidade) de valores próprios negativos do operador  $L$ . Uma conseqüência de (2) é que o índice de uma superfície mínima compacta com bordo é finito. Além disto, é bem conhecido que se  $M \subset \tilde{M}$ ,  $\lambda_i \geq \tilde{\lambda}_i$ , para todo  $i$ . Logo, se  $M \subset \tilde{M}$ , então  $Ind(M) \leq Ind\tilde{M}$ .

Até agora, definimos o índice para uma superfície mínima compacta com bordo. Para definirmos o índice de uma superfície mínima completa  $M$ , procederemos da maneira seguinte. Considere uma seqüência crescente  $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n \subset \dots$  de subconjuntos limitados de  $M$  com bordos regulares e tais que  $\cup M_n = M$  (uma tal seqüência é chamada uma *exaustão* de  $M$ ). Pelo que vimos, os índices de  $M_n$  formam uma seqüência crescente. Por um argumento simples, é possível mostrar que o supremo dos índices de  $M_n$  não depende da exaustão escolhida. Definimos então

$$Ind(M) = \sup_n Ind(M_n).$$

Em princípio, o índice de uma superfície mínima completa pode ser infinito. Entretanto, prova-se o seguinte resultado extraordinário.

**Teorema 3.** (D. Fischer-Colbrie [7]) *Seja  $M$  uma superfície mínima orientável e completa em  $\mathbb{R}^3$ . Então*

$$\text{Ind}(M) < \infty \iff \left| \int_M K dM \right| < \infty.$$

O número  $\int_M K dM = C(M)$  é chamado a *curvatura total* de  $M$ . Entre as superfícies mínimas completas, as de curvatura total finita são as mais bem conhecidas. Dada uma tal superfície  $M$ , existe um difeomorfismo conforme (isto é, uma bijeção diferenciável que preserva ângulos)  $\theta: M \rightarrow \bar{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$  entre  $M$  e uma superfície que é obtida retirando um número finito de pontos  $p_1, \dots, p_k$  de uma superfície compacta  $\bar{M}$ . Uma vizinhança  $V_i \subset \bar{M}$  de  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  é chamada um *fim* da superfície  $M$ ; do ponto de vista métrico, um fim de  $M$  se estende para o infinito.

É conveniente apresentar alguns exemplos. Para maiores detalhes, o leitor poderá consultar [4].

- 1) O plano (Fig. 1) é conformemente equivalente (por projeção estereográfica) a uma esfera menos um ponto e tem, portanto, um fim.
- 2) O catenóide (Fig. 2) é conformemente equivalente a uma esfera menos dois pontos (Fig. 3) e tem dois fins.
- 3) Luquésio Jorge e William Meeks [8] construíram uma família de superfícies mínimas  $\{M_k\}$ ,  $k = 1, \dots, n, \dots$  tal que  $M_k$  é conformemente equivalente a uma esfera menos  $k$  pontos.  $M_2$  é o catenóide e  $M_3$ , chamado trinóide, está indicada na Fig. 4.
- 4) Pode ser mostrado que a elegante superfície de Costa, indicada na Fig. 5, é conformemente equivalente a um toro menos três pontos.

Os exemplos acima tem a propriedade que cada fim da superfície não possui auto-intersecções, embora dois fins distintos possam se intersectar como no exemplo do trinóide. Se os fins possuem auto-intersecção, a situação é um pouco mais complicada, como mostra o exemplo seguinte.

- 5) A superfície de Enneper (Fig. 6) é conformemente equivalente a uma esfera menos um ponto, e tem portanto um único fim.

Uma propriedade fundamental das superfícies mínimas completas com curvatura total finita é que quando tomamos uma

seqüência de pontos em um dado fim a qual "tende para o infinito", o vetor normal da superfície nestes pontos se aproxima de uma posição limite que não depende da seqüência considerada mas apenas do fim. Tal posição limite é chamado o vetor normal do fim e sua existência implica que a aplicação normal de Gauss  $g: \overline{M} - \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow S^2$  se estende continuamente aos pontos  $\{p_i\}$  fornecendo uma aplicação  $\overline{g}: \overline{M} \rightarrow S^2$ . A curvatura total se escreve então como  $C(M) = -4\pi m$ , onde  $m = \text{grau } \overline{g}$  é o número de vezes que  $\overline{M}$  cobre  $S^2$  por meio da aplicação  $\overline{g}$ .

Nos exemplos dados, os valores de  $C(M)$  são os seguintes: 1)  $C(M) = 0$ ; 2)  $C(M) = -4\pi$ ; 3)  $C(M_k) = -4\pi(k - 1)$ ; 4)  $C(M) = -12\pi$ ; 5)  $C(M) = -4\pi$ .

Voltemos ao Teorema 3. Da prova deste teorema conclui-se facilmente que  $\text{Ind}(M)$  depende apenas da aplicação normal de Gauss  $g$  de  $M$ . A questão em que estamos interessados surge agora naturalmente: Deveria ser possível calcular, ou pelo menos estimar, o índice de  $M$  em termos de invariantes da aplicação  $g$ , o mais simples deles sendo o grau de  $g$ .

O problema tem duas dificuldades fundamentais. O primeira é a estrutura global de  $g$ . Localmente, a aplicação  $g$  no caso de superfícies mínimas é relativamente simples. De fato, é possível escolher coordenadas locais  $(u, v)$  em  $M$  e  $(\xi, \eta)$  em  $S^2$  de modo que, fazendo  $z = u + iv \in \mathbb{C}$ ,  $w = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ , a aplicação  $g$  se comporta localmente como  $w = z^n$ , e sua extensão  $\overline{g}: \overline{M} \rightarrow S^2$  possui a mesma propriedade. Portanto, a menos de pontos (isolados) onde sua derivada se anula (chamados *pontos de ramificação*), a aplicação  $g$  é um difeomorfismo local, e a única complicação possível provém dos pontos de ramificação. Globalmente, entretanto, os pontos de ramificação podem apresentar uma configuração caprichosa e, até o presente, ainda não está claro a influência de tais pontos no cálculo do índice.

A segunda dificuldade provém no fato que o cálculo do índice de superfícies conhecidas é uma tarefa não-trivial.

O problema tem sido recentemente atacado por vários matemáticos. Várias contribuições parciais foram obtidas, e vamos mencionar algumas delas. No que se segue, uma superfície  $M$  indicará uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$ , orientável, completa e com curvatura total finita.



- 1) J. Tysk [10].  $Ind(M) \leq 7,68$  grau  $g$
- 2) F. Lopez e A. Ros [9]. O catenóide e a superfície de Enneper são as únicas superfícies que têm índice um.
- 3) Tushlin (comunicação pessoal). Para a família  $M_k$  das superfícies de Jorge-Meeks, tem-se  $Ind(M_k) = 2$  grau  $(g) - 1$ .
- 4) J. Choe [5]. O índice da superfície de Costa é  $\geq 3$ .
- 5) J. Choe [5]. Não existe  $M$ , com  $ind(M) = 2$ , tal que a sua compacta associada  $\overline{M}$  seja uma esfera.

Exceto por (1), que é provavelmente uma limitação longe de ser satisfatória, os resultados se referem a situações particulares. O problema geral, mesmo no que se refere apenas a obter boas limitações, está inteiramente aberto, e a minha conjectura favorita, para superfícies mínimas cuja compacta associada é uma esfera, é a seguinte:

$$\text{grau } g \leq Ind(M) \leq 2 \text{ grau } g - 1.$$

Antes de concluir, gostaríamos de mencionar que o problema aqui apresentado é apenas um caso simples do problema geral de "medir" a não-estabilidade de soluções de problemas variacionais. Um caso extremamente interessante é o de superfícies completas de curvatura média constante no espaço hiperbólico (o espaço da geometria não-euclidiana) que tem sido também objeto de trabalhos recentes. Isto, entretanto, é uma outra história, que teremos que deixar para outra ocasião.

#### BIBLIOGRAFIA

1. J.L. Barbosa e M. do Carmo, *Stable minimal surfaces*, Bull of A.M.S. **80** (1974), 581-583.
2. J.L. Barbosa e M. do Carmo, *On the size of a stable minimal surface in  $\mathbb{R}^3$* , Amer. J. Math. **98** (1976), 515-528.
3. M. do Carmo e C.K. Peng, *Stable complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  are planes*, Bull. A.M.S. **1** (1979), 903-906.
4. M. do Carmo, "Superfícies Mínimas," 16º Col. Bras. Mat., IMPA, 1987.
5. J. Choe, *Index, vision number, and stability of complete minimal surfaces*, Preprint.
6. D. Fischer-Colbrie e R. Schoen, *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds*, Comm. Pure and Appl. Math. **33** (1980), 199-211.

7. D. Fischer-Colbrie, *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 121-132.
8. L.P. Jorge and W.H. Meeks III, *The topology of complete minimal surfaces of finite total gaussian curvature*, Topology **22** (1983), 203-221.
9. F. Lopez e A. Ros, *Complete minimal surfaces with index one and stable constant mean curvature surfaces*, Comment. Math. Helv. **64** (1989), 34-43.
10. J. Tysk, *Eigenvalues estimates with applications to minimal surfaces*, Pacific J. Math. **128** (1987), 361-366.