O Método da Fase Estacionária

Geraldo Ávila

Instituto de Matemática – UNICAMP
Caixa Postal 6065
13.081 – Campinas, SP

Ao Elon

1. Introdução.

Consideremos a expressão

\[ I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikg(x)} dx, \]  \hspace{1cm} (1)

onde \( f \) tem suporte compacto. Nosso objetivo é estudar o comportamento desta expressão para valores grandes de \( k \), com hipóteses convenientes de regularidade das funções (reais) \( f \) e \( g \). Num próximo artigo apresentaremos uma interessante aplicação dessa aproximação num problema de propagação de ondas.

De acordo com o chamado método da fase estacionária, a principal contribuição na integral acima provém dos pontos onde \( g'(x) = 0 \). É fácil entender por que deve ser assim: se \( g'(x_0) = 0 \), então "\( g \) se estaciona" ou torna-se "praticamente constante" numa vizinhança de \( x_0 \), de sorte que, nessa vizinhança,

\[ e^{ikg(x)} = \cos kg(x) + i \sin kg(x) \]

quase não varia com o variar de \( x \), e a integral em (1) na referida vizinhança pode produzir um valor não nulo. Ao contrário, nos pontos \( x \) onde \( g'(x) \neq 0 \), o seno e o cosseno de \( kg(x) \) oscilam rapidamente com o variar de \( x \), já que \( k \) é grande, produzindo contribuições à integral em (1) que tendem a se cancelar mutuamente.

Heuristicamente, o método em questão pode ser assim explicado: se \( x_0 \) é o único ponto estacionário de \( g(x) \), então próximo a \( x_0 \), isto é, numa vizinhança \( |x - x_0| < \varepsilon \), o integrando em (1) pode ser aproximado por

\[
f(x_0)e^{ikg(x_0)}e^{i\frac{k}{2}(x-x_0)^2g''(x_0)},
\]

supondo, evidentemente, que \( g''(x_0) \neq 0 \). Admitindo que só a imediata vizinhança de \( x_0 \) contribua significativamente à integral em (1), teremos

\[
I(k) \approx f(x_0)e^{ikg(x_0)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{i\frac{k}{2}g''(x_0)u^2} du.
\]

Esta última integral, quando estendida de \(-\infty\) a \(+\infty\), incorpora uma parte de importância secundária, pois \( k \) é um parâmetro muito grande. Então,

\[
I(k) \approx f(x_0)e^{ikg(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{k}{2}g''(x_0)u^2} du.
\]

Ora, esta última integral é do tipo de Fresnel (e foi calculada em [1], p. 80), logo

\[
I(k) \approx \frac{\sqrt{2\pi}f(x_0)e^{ikg(x_0)}e^{i\sigma\pi/4}}{\sqrt{|g''(x_0)|k}},
\]

onde \( \sigma = \pm 1 \) conforme \( g''(x_0) \) seja maior ou menor do que zero, respectivamente.

Evidentemente, este último resultado carece de uma demonstração rigorosa. Uma tal demonstração pode ser encontrada em livros, como [2], [6] e [7], porém numa forma que não faz transparecer com clareza o resultado (2). Apresentaremos, no presente trabalho, uma dedução bastante simples do método da fase estacionária para a integral (1). Esta dedução, restrita ao caso em que \( f \) tenha derivadas contínuas e suporte compacto, tem a vantagem de se estender facilmente ao caso de integrais múltiplas, com interessantes aplicações em problemas de propagação ondulatória.
2. Uma Demonstração do Método.

Estabeleceremos inicialmente três lemas preliminares.

**Lema 1.** Se \( f \) é uma função de suporte compacto e de classe \( C^1 \), e \( g \) é de classe \( C^2 \), com \( g'(x) \neq 0 \) no suporte de \( f \), então

\[
I(k) = O \left( \frac{1}{k} \right), \quad k \to \pm \infty.
\]

**Demonstração:** Basta integrar por partes em (1). Como \( f \) tem suporte compacto, obtemos

\[
I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{ikg'(x)} \left( e^{ikg(x)} \right)' \, dx
\]

\[
= \frac{f(x)}{ikg'(x)} e^{ikg(x)} \bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{f(x)}{g'(x)} \right)' e^{ikg(x)} \, dx
\]

\[
= \frac{i}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{f(x)}{g'(x)} \right)' e^{ikg(x)} \, dx.
\]

Ora, esta última integral é, em módulo, limitada por uma constante que só depende de \( f \) e \( g \), donde segue o resultado desejado.

**Observação:** A integração por partes no lema anterior pode ser repetida um número \( N \) de vezes, desde que \( f \) seja de classe \( C^N \) e \( g \) de classe \( C^{N+1} \). Como cada integração produz um fator \( 1/k \), teremos, após \( N \) integrações,

\[
I(k) = O \left( \frac{1}{k^N} \right), \quad k \to \pm \infty.
\]

**Lema 2.** Se \( f \) é de suporte compacto e de classe \( C^1 \), e \( \lambda \) é um número real não nulo, então

\[
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)xe^{i\lambda kx^2} \, dx = O \left( \frac{1}{k} \right), \quad k \to \pm \infty.
\]

**Demonstração:** Raciocinamos como no lema anterior, notando que

\[
x e^{i\lambda kx^2} = \left( \frac{e^{i\lambda kx^2}}{2i\lambda k} \right)'.
\]
Lema 3. Se \( f \) é uma função de classe \( C^1 \), que se anula numa vizinhança da origem, \( |x| \leq c \), e \( f(x) = K = \text{constante para } |x| \geq M > c \), então

\[
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx^2} \, dx = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \to \pm \infty.
\]

Demonstração: Restringiremos nossas considerações à integral de zero a \( +\infty \). O tratamento é inteiramente análogo para a integral de \( -\infty \) a zero.

Como no Lema 1, integramos por partes:

\[
\int_0^{\infty} f(x)e^{ikx^2} \, dx = \int_c^{\infty} \frac{f(x)}{2ikx} \left( e^{ikx^2} \right)' \, dx
\]

\[
= \frac{f(x)}{2ikx} e^{ikx^2} \bigg|_c^{\infty} + \frac{i}{2k} \int_c^{\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right)' e^{ikx^2} \, dx
\]

\[
= \frac{i}{2k} \int_c^{\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right)' e^{ikx^2} \, dx - \frac{i}{2k} \int_c^{M} \frac{f'(x)}{x} e^{ikx^2} \, dx - \frac{i}{2k} \int_c^{\infty} \frac{f(x)}{x^2} e^{ikx^2} \, dx.
\]

Daqui segue prontamente o resultado desejado, pois estas duas últimas integrais são limitadas, como é fácil verificar.

Teorema 4. Se \( f \) é uma função de suporte compacto e de classe \( C^2 \), e \( g \) é de classe \( C^6 \), possuindo um único ponto estacionário \( x_0 \), com \( g''(x_0) \neq 0 \), então

\[
I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikg(x)} \, dx = \sqrt{2\pi} f(x_0)e^{ikg(x_0)} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (3)
\]

para \( k \to +\infty \), onde \( \sigma = \pm 1 \) conforme seja \( g''(x_0) > 0 \) ou \( g''(x_0) < 0 \), respectivamente.

Demonstração: Para simplificar os cálculos, vamos supor \( x_0 = 0 \). O caso \( x_0 \neq 0 \) requer modificações óbvias, que deixamos a cargo do leitor. Suporemos também \( g(0) = 0 \), o que se consegue fatorando \( e^{ikg(0)} \) na expressão integral de \( I(k) \).
A fórmula de Taylor com resto integral ([4], p. 262) nos permite escrever:

\[ g(x) = \lambda x^2 h(x), \]  

onde \( \lambda = g'''(0)/2 \) e

\[ h(x) = 1 + \frac{x}{2\lambda} \int_0^1 (1 - t)^2 g'''(tx)dt \]

é uma função de classe \( C^3 \), com \( h(0) = 1 \). Vemos, pois, que a função

\[ s = s(x) = x\sqrt{h(x)} \]  

tem derivada

\[ s'(x) = \frac{2h(x) + xh'(x)}{2\sqrt{h(x)}}, \]

que é positiva numa vizinhança \( I_\delta = (-\delta, \delta) \) da origem, onde, então, \( s(x) \) é crescente. Como também \( s(0) = 0 \), podemos concluir, pelo teorema da função inversa, que \( s = s(x) \) é um difeomorfismo do intervalo \( I_\delta \) num intervalo \( J_\delta = (-a, b) \), onde, \( a \) e \( b \), assim como \( \delta \) são números positivos. Notemos que

\[ J(s) = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{s'(s)} = \frac{2\sqrt{h(x)}}{2h(x) + xh'(x)}, \]  

de sorte que \( J(0) = 1/\sqrt{h(0)} = 1 \).

Seja agora \( \alpha(x) \) uma função de classe \( C^2 \) satisfazendo as seguintes condições:

i) \( \alpha(x) = 1 \) para \(|x| \leq \frac{\delta}{2} \);

ii) \( \alpha(x) = 0 \) para \(|x| \geq \frac{2\delta}{3} \).

Em vista de (4) e (5) podemos escrever a integral em (3) na forma

\[ I(k) = \int_{-\delta}^{\delta} \alpha(x)f(x)e^{ik\lambda s^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \alpha(x)]f(x)e^{ikg(x)}dx. \]

A segunda destas integrais é da ordem de \( 1/k \), pelo Lema 1. Na primeira das integrais introduzimos a mudança de variáveis dada pela função inversa de (5), obtendo, assim,

\[ I(k) = \int_{-a}^{b} \alpha(x(s))J(s)f(x(s))e^{ik\lambda s^2}ds + O\left(\frac{1}{k}\right). \]  

(7)
Para estudar esta última integral, introduzimos a função de classe $C^2$,

$$F(s) = \begin{cases} 
0 & \text{se } s \leq -a \text{ ou } s \geq b, \\
\alpha(x(s))J(s)f(x(s)) & \text{se } -a \leq s \leq b,
\end{cases}$$

e escrevemo-la na forma

$$F(s) = F(0) + sR(s) = f(0) + sR(s), \quad (8)$$

onde

$$R(s) = \int_0^1 F'(ts)dt$$

resulta ser de classe $C^1$, pois $J$ e $f$, bem como $\alpha$, são de classe $C^2$. Por outro lado, seja $\beta(s)$ uma função como $\alpha(s)$, de classe $C^1$, que se anula fora de um intervalo $(-c, c)$, onde $[-c, c] \subset (-a, b)$, e tal que $\beta(s) = 1$ para $|s| \leq c/2$. Então, substituindo (8) em (7), obtemos:

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ik\lambda s^2}ds = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(s)F(s)e^{ik\lambda s^2}ds$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \beta(s)]F(s)e^{ik\lambda s^2}ds + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Esta última integral é da ordem de $1/k$, pelo Lema 1, de sorte que

$$I(k) = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \beta(s)e^{ik\lambda s^2}ds$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \beta(s)sR(s)e^{ik\lambda s^2}ds + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Novamente, a segunda das integrais que afi aparece é da ordem de $1/k$ pelo Lema 2. Então

$$I(k) = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\lambda s^2}ds$$

$$+ f(0)\int_{-\infty}^{\infty} [1 - \beta(s)]e^{ik\lambda s^2}ds + O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (9)$$
Mais uma vez, a segunda destas integrais é da ordem de $1/k$, pelo Lema 3. Quanto à primeira delas, trata-se da integral de Fresnel, cujo cálculo discutimos no Nº 5 desta Revista. Supondo $k > 0$, temos ([1], p. 80):

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\lambda s^2} ds = \left( \frac{\pi}{|\lambda| k} \right)^{1/2} e^{i\sigma(\lambda)\pi/4},
$$

onde $\sigma(\lambda) = \pm 1$ conforme seja $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$ respectivamente. Substituindo (10) em (9), resulta

$$
I(k) = f(0) \left( \frac{\pi}{|\lambda| k} \right)^{1/2} e^{i\sigma(\lambda)\pi/4} + O \left( \frac{1}{k} \right), \quad k \to +\infty,
$$
que é o resultado (3) com $x_0 = 0$, $g(x_0) = 0$ e $\lambda = g''(0)/2$. Como dissemos, no início da demonstração, o caso geral só requer pequenas modificações, que ficam a cargo do leitor. Assim, damos por encerrada a demonstração do teorema.

**Observação:** Se a função $g$ possui um número finito de pontos críticos não degenerados, $x_1, x_2, \ldots, x_r$, a fórmula (3) se generaliza, dando lugar à expressão

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikg(x)} dx
$$

$$
= \sum_{j=1}^{r} \frac{\sqrt{2\pi f(x_j)} e^{ikg(x_j)+i\sigma_j\pi/4}}{\sqrt{|g''(x_j)| k}} + O \left( \frac{1}{k} \right),
$$

para $k \to +\infty$. O $\sigma_j$ que aí comparece é $+1$ ou $-1$, conforme $g''(x_j)$ seja maior ou menor do que zero, respectivamente.

Para obtermos este resultado, consideramos funções $\alpha_j(x)$ de classe $C^2$, como a função $\alpha(x)$ já considerada: $\alpha_j(x) = 1$ numa vizinhança de $x_j$, digamos, $|x - x_j| \leq \delta_j/2$ e $\alpha_j(x) = 0$ para $|x - x_j| \geq \delta_j$; o $\delta_j$ sendo tal que a vizinhança $|x - x_j| \leq \delta_j$ esteja contida no suporte de $f$. Então

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikg(x)} dx = \sum_{j=1}^{r} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_j(x) f(x) e^{ikg(x)} dx
$$

$$
+ \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x)] f(x) e^{ikg(x)} dx,
$$

(12)
e, pelo Teorema 4, o j-ésimo termo da primeira somatória do segundo membro dá origem ao j-ésimo termo da somatória de (11). A última integral em (12) é da ordem de $1/k$, pelo Lema 1, o que completa a demonstração de (11).

3. O Caso $n$-Dimensional.

Vamos tratar agora da integral

$$I(k) = \int f(x)e^{ikg(x)}dx,$$

onde $f$ e $g$ são funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $dx = dx_1 \ldots dx_n$ e a integração se estende a todo o espaço $\mathbb{R}^n$ (em verdade, apenas ao suporte de $f$).

O ingrediente principal do Lema 1 foi a integração por partes, notando que

$$e^{ikg(x)} = \frac{1}{ikg'(x)}(e^{ikg(x)})'.$$

Procuremos o análogo desta identidade no caso $n$-dimensional. Temos, sucessivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} e^{ikg(x)} = ik \frac{\partial g}{\partial x_j} e^{ikg(x)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} e^{ikg(x)} = ik |\nabla g(x)|^2 e^{ikg(x)},$$

$$e^{ikg(x)} = \frac{1}{ik} Le^{ikg(x)},$$

onde $L$ é o operador diferencial linear

$$L = \frac{1}{|\nabla g(x)|^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

(É claro que devemos supor $\nabla g(x) \neq 0$ no suporte da função $f$.) Portanto, integrando por partes em cada uma das variáveis $x_j$,
supondo $f$ de suporte compacto, teremos:

$$\int f(x)e^{ikg(x)}dx = \frac{1}{ik} \int f(x)L e^{ikg(x)}dx$$

$$= \frac{1}{ik} \int f(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g/\partial x_j}{|\nabla g|^2} \frac{\partial e^{ikg(x)}}{\partial x_j} dx$$

$$= \frac{i}{k} \int \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{f \partial g/\partial x_j}{|\nabla g|^2} \right) e^{ikg(x)} dx,$$

ou seja,

$$\int f(x)e^{ikg(x)}dx = \frac{1}{ik} \int f(x)L e^{ikg(x)}dx \quad (14)$$

$$= \frac{1}{ik} \int L^* f(x)e^{ikg(x)}dx,$$

onde $L^*$ é o adjunto formal de $L$, assim definido:

$$(L^*f) = - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{f \partial g/\partial x_j}{|\nabla g|^2} \right).$$

A integral em (14) é limitada, independentemente de $k$, desde que $f \in C^1$ e $g \in C^2$. Podemos prosseguir integrando por partes, sucessivamente, cada nova integração exigindo mais regularidade das funções $f$ e $g$. Em particular, $N$ integrações nos levam ao teorema que enunciaremos a seguir como lema e que será utilizado para provar o Teorema 6 adiante.

**Lema 5.** Se $f$ e $g$ são funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$, $f$ de suporte compacto e de classe $C^N$ e $g$ de classe $C^{N+1}$, $\nabla g \neq 0$ no suporte de $f$, então

$$I(k) = \int f(x)e^{ikg(x)}dx = O\left(\frac{1}{k^N}\right), \quad k \to \pm \infty.$$

Passemos a considerar o caso em que $g$ tenha um certo número finito de pontos estacionários, isto é, nos quais $\nabla g = 0$. Supomos agora que esses pontos sejam não degenerados, vale dizer,

$$\det\left(-\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0.$$

Provaremos então o análogo do Teorema 4, que enunciaremos a seguir.
Teorema 6. Sejam \( f \) e \( g \) funções reais definidas em \( \mathbb{R}^n \), de classes \( C^N \) e \( C^{N+1} \) respectivamente, \( N \geq 5 \) e \( N > n/2 \). Se \( g \) possui um único ponto estacionário \( x_0 \), não degenerado, e se \( f \) é de suporte compacto, então

\[
I(k) = \int f(x)e^{ikg(x)}dx
\]

\[
= \frac{(2\pi)^{n/2} f(x_0)e^{ikg(x_0)} + i\sigma \pi/4}{\sqrt{|K(x_0)|k^{n/2}}} + O\left(\frac{1}{k^{(n+1)/2}}\right),
\]

para \( k \to +\infty \), onde \( K(x_0) \) é a curvatura Gaussiana da superfície \( z = g(x) \) no ponto \( x = x_0 \) e \( \sigma = \mu - \nu \), \( \mu \) sendo o número de curvaturas principais positivas e \( \nu \) o de negativas, da superfície \( z = g(x) \) no ponto \( x_0 \).

Demonstração: Como na demonstração do Teorema 4, vamos supor \( x_0 = 0 \) e \( g(0) = 0 \). O chamado Lema de Morse ([6], p. 285 ss) nos permite fazer uma mudança de coordenadas \( x = x(s) \) de classe \( C^4(C^{k-2} \text{ se } f \in C^k) \), levando uma vizinhança \( V \) de \( s = 0 \) numa bola \( |x| < a \) e tal que:

i) \( J(s) = \frac{\partial (x)}{\partial (s)} > 0 \) para todo \( s \in V \);

ii) \( J(0) = 1 \);

iii) \( g(x(s)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^2 \) em \( |s| < a \).

Seja \( \gamma(x) = \alpha(|x|) \), onde \( \alpha \) é a função introduzida na demonstração do Teorema 4; se necessário, restringimos \( \delta \) de maneira que a bola \( |x| < \gamma \) esteja contida em \( V \). Podemos escrever

\[
I(k) = \int f(x)\gamma(x)e^{ikg(x)}dx + \int f(x)[1 - \gamma(x)]e^{ikg(x)}dx.
\]

Não havendo mais pontos singulares, esta última integral é da ordem de \( k^{-N} \), pelo lema anterior. Quanto à primeira, utilizamos a mudança de coordenadas \( x = x(s) \), obtendo, assim,

\[
I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ik\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i^2}ds, \ldots , ds_n
\]

\[
= O\left(\frac{1}{k^N}\right), \ k \to \pm \infty,
\]

onde \( F(s) = f(x(s))\gamma(x(s))J(s) \) se \( |s| \leq a \) e \( F(s) = 0 \) se \( |s| \geq a \). Ora, esta última integral é agora tratada por integração repetida de \( n \) integrais simples. Cada uma destas integrais simples
é passível do mesmo tratamento dado à integral em (9). Isto nos leva a obter, para a integral em (16), um produto do tipo

\[ F(0) \prod_{i=1}^{n} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda_i| \lambda_i}} e^{i\sigma(\lambda_i) \pi/4} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]. \]

Basta notar agora que

\[ F(0) = f(0), \quad g_{s,s}(0) = 2\lambda_i \quad \text{e} \quad K = \prod_{i=1}^{n} g_{s,s}(0), \]

para obtermos o resultado (15) com \( x_0 = 0 \) e \( g(0) = 0 \). O caso \( x_0 \neq 0 \) e \( g(x_0) \neq 0 \) só requer modificações óbvias e fica a cargo do leitor.

**Observação:** Se a função \( g \) possui um número finito de pontos críticos não degenerados, a fórmula (3) se generaliza como no caso unidimensional, dando-nos o análogo da expressão (12).

**Bibliografia**