Matemática Universitária Nº 9/10, dezembro de 1989

Uma Demonstração do Teorema do Índice de Poincaré para Superfícies

M.M. Peixoto

IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460 Rio de Janeiro

1. Introdução.

A demonstração abaixo se originou em cursos que dei há muitos anos no IMPA e no IME/USP; variantes dela apareceram em notas de aula.

A importância do assunto, a simplicidade da prova e o fato, ao que me consta, de que ela continua inédita me animaram finalmente a publicá-la. E nenhum lugar mais adequado para isto do que este volume da "Matemática Universitária" dedicado a Elon Lima, ele próprio notório aficionado e autor de demonstrações simples, bonitas, minimais. Seja como for, cá com os meus botões, eu sempre achei que essa demonstração "tem a cara do Elon".

2. O Teorema.

Seja M uma variedade diferenciável (C^∞) de duas dimensões compacta e seja X um campo de vetores diferenciável em M. Um ponto $p \in M$ diz-se um ponto *regular* de X se $X(p) \neq 0$ e *singular* se $X(p) = 0$. Os campos de vetores que consideraremos terão apenas um número finito de singularidades. A cada uma delas associaremos um certo inteiro positivo, negativo ou nulo, o seu *índice*.

Recordemos aqui rapidamente esse conceito. Seja então p um ponto singular de X e γ uma "pequena" curva de Jordan em M que limita um disco contendo p no seu interior e contido no domínio de um sistema de coordenadas onde a única singularidade é p. Sem perda de generalidade podemos supor que p e γ estão num plano coordenado (x, y) onde X está definido e X se anula apenas em p.

Suponhamos que o ponto (x, y) percorre γ no sentido positivo. Como sobre γ, $X \neq 0$ a correspondência $(x, y) \rightarrow \frac{X(x,y)}{\|X(x,y)\|}$ define então uma aplicação $f: \gamma \rightarrow S^1$ onde S^1 é o círculo unitário. Definimos então o *índice de* X *em* p, $I(X,p) = I(X,\gamma)$, como o grau dessa aplicação. Essa definição faz sentido pois é fácil verificar que acharíamos o mesmo inteiro caso em vez de γ usássemos uma curva γ' contida no interior de γ e dela muito próxima. De próximo em próximo vê-se que para o cálculo de $I(X,p)$ em vez de γ poderemos usar uma qualquer curva de Jordan contida no interior de γ e contendo p no seu interior. Tem-se ainda que $I(X,p)$ não depende do sistema de coordenadas adotado. Além disso se um outro campo X' possui uma única singularidade p' no interior de γ e se o ângulo entre X e X' é sempre $< \pi$ então $I(X,p) = I(X',p')$. A definição acima de índice faz sentido caso o campo X em vez de ser diferenciável seja apenas contínuo.

O índice $I(X,p)$ possui assim *grande estabilidade* seja no que diz respeito a variações do campo X seja no que diz respeito a variações da curva γ. Essa estabilidade fica ainda maior quando consideramos não apenas o índice de uma única singularidade mas *a soma dos índices de todas as singularidades* de X em M. Na realidade essa soma é tão estável em relação a X e a M que ela nem depende de X, dependendo apenas da característica de Euler de M! É isso o que afirma o notabilíssimo

TEOREMA DO ÍNDICE DE POINCARÉ. *Se p_j, $j = 1, \ldots, n$ são as singularidades de um campo X em M e $I(X,p_j)$ os seus índices, então*

$$(1) \qquad I = I(X,M) = \sum_{j=1}^{n} I(X,p_j) = \chi(M)$$

onde $\chi(M)$ é a característica de Euler de M.

Antes de demonstrar esse teorema faremos algumas considerações preliminares.

Seja γ uma curva simples de M disjunta das singularidades de X, contida numa vizinhança coordenada e que seja bordo de um disco em M. Mesmo que X contenha singularidades nesse disco, então, em relação a esse disco a definição do índice $I(X,\gamma)$ dada acima faz sentido.

Se $M + S^2$ γ determina dois discos e temos em princípio dois índices distintos. Em qualquer caso um argumento clássico mostra que

(2) $I(X,\gamma)$ *vale a soma dos índices das singularidades contidas no interior do disco competente.*

Uma vez fixado o disco que estamos considerando podemos raciocinar como se γ fosse uma curva fechada do plano e falar de pontos interiores e exteriores a γ. Vale então a seguinte fórmula para o cálculo do índice de γ

(3) $$I(X,\gamma) = 1 + \tfrac{i-e}{2}$$

onde $\underline{i}$ é o número de pontos de γ onde X é tangente a γ *interiormente* e $\underline{e}$ é o número de pontos de γ onde X é tangente a γ *exteriormente.* Na Fig. 1, $\underline{a}$ é ponto de tangência interior porque uma vizinhança da trajetória de X em $\underline{a}$ está contida no interior de γ; analogamente, $\underline{b}$ é ponto de tangência exterior.

Caso X tenha um número infinito de tangências a γ, vê-se facilmente que uma perturbação em X o transforma noutro campo com apenas um número finito de tangências; o que não altera o índice. A demonstração de (3) é fácil, uma vez admitido que a variação angular do vetor tangente a γ é 2π. Para a demonstração desse fato veja p.ex. [**1**, p.189].

A fórmula (3) é essencialmente devida a Poincaré. No caso em que γ é suficientemente pequena, contém no seu interior uma única singularidade e os dados são analíticos, (3) é conseqüência de um teorema de Bendixon [**1**, p.211].

3. Demonstração do Teorema.

Basta considerar o caso em que M é orientável. Com efeito, se M for não orientável, o fato de que (1) vale para o recobrimento duplo orientável de M, munido do correspondente campo levantado de X, implica imediatamente que (1) vale para M munido do campo X.

Seja então M orientável e consideremos inicialmente o caso da esfera

I) $M + S^2$.

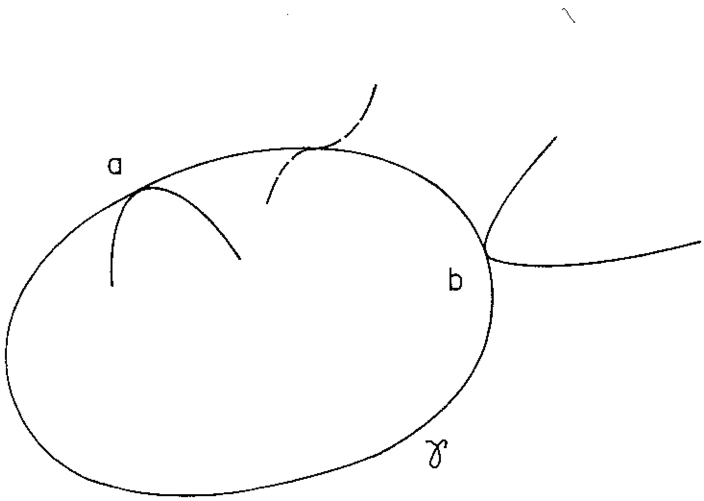

Figura 1. As trajetórias que são tangentes a γ e que atravessam γ não influenciam o índice.

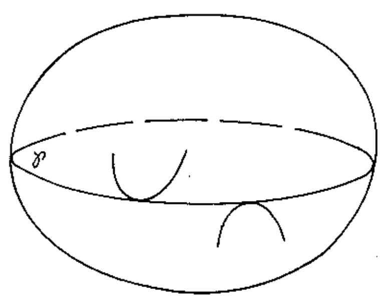

Figura 2

Seja γ uma curva de Jordan em S^2 disjunta das singularidades de X e possuindo apenas um número finito de pontos de tangência com X. Então γ divide S^2 em dois hemisférios (Fig. 2).

Por (2) e (3) a soma dos índices das singularidades situadas no "hemisfério norte" vale

(4) $\quad 1 + \frac{i-e}{2}$

onde $\underline{i}$ e $\underline{e}$ são respectivamente o número de tangências interiores relativamente a esse hemisfério. Pela mesma razão a contribuição do "hemisfério sul" vale

(5) $\quad 1 + \frac{e-i}{2}$

visto que ao trocarmos de hemisfério intercambiamos $\underline{i}$ com $\underline{e}$. Por (4) e (5) a soma total dos índices vale então

$$I = I(X, S^2) = 1 + \frac{i-e}{2} + 1 + \frac{e-i}{2} = 2 = \chi(S^2)$$

o que demonstra a (1) para o caso $M = S^2$.

Essa mesma idéia simples de usar a fórmula (3) aparecerá novamente no caso geral em que

II) $\quad M$ tem genus $g > 0$.

Sabemos que M é difeomorfa a uma esfera S^2 com g "asas" e que

(6) $\quad \chi(M) = 2 - 2g.$

Cada asa Γ é então um cilindro limitado por duas curvas α, β que são homotópicas e não limitam nenhum disco em M. Escolhamos α, β de modo que em Γ não haja nenhuma singularidade de X.

Então podemos considerar M como decomposta na esfera S^2 e mais as g asas Γ de tal modo que todas as singularidades de X em M estão "concentradas" em S^2. (Fig. 3).

Agora vamos eliminar cada asa Γ, substituindo-a por duas singularidades $\underline{a}$ e $\underline{b}$ associadas a α e β respectivamente (Fig. 6). Seja γ uma curva diferenciável fechada simples de Γ homotópica a α e β e chamemos de $\underline{d}$ e $\underline{e}$ o número de tangências de X a γ, "à direita" e "à esquerda" respectivamente. No presente contexto não é restrição supor que $\underline{d}$ e $\underline{e}$ são finitos. É fácil ver, usando o teorema do fluxo tubular, que existem curvas ε, δ à esquerda e

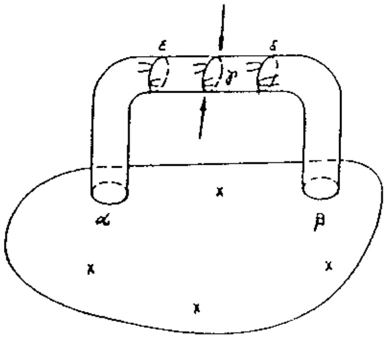

Figura 3

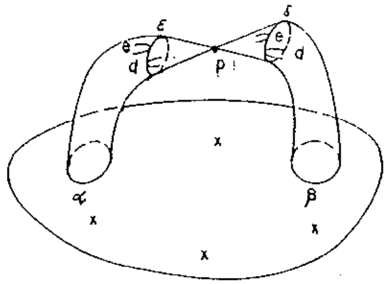

Figura 4

à direita de γ respectivamente tais que para elas os números $\underline{d}$ e $\underline{e}$ sejam exatamente aqueles relativos a γ. Seja φ uma função diferenciável definida numa vizinhança de γ, nula em γ e positiva em todos os outros pontos. É claro que os pontos de γ são pontos singulares do campo φX e que para esse novo campo, com o qual passamos a trabalhar, os números $\underline{d}$ e $\underline{e}$ relativos a δ e ε não sofreram nenhuma alteração.

Para eliminar Γ e de certa maneira "incorporá-la a S^2" vamos colocar uma "pinça", um "estrangulamento" em γ reduzindo-a a um ponto p (Fig. 4). Em seguida cortando em p obtemos duas novas singularidades $\underline{a}$ e $\underline{b}$ (Fig. 5) cujos índices

$$I(a) = 1 + \frac{d-e}{2}, \quad I(b) = 1 + \frac{e-d}{2}$$

são tais que

(7) $\qquad I(a) + I(b) = 2.$

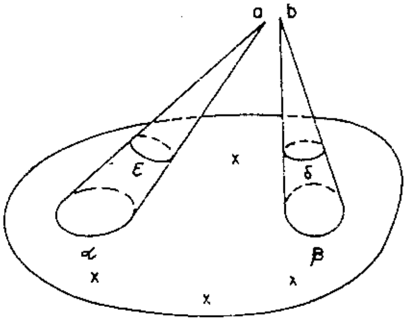

Figura 5

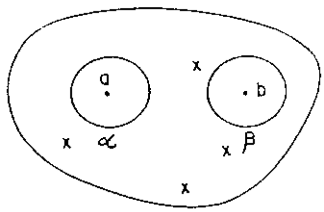

Figura 6

Repetindo essa operação para cada uma das g asas introduzimos em nossa esfera S^2, $2g$ novas singularidades além das originais de M. Por (7) essas novas singularidades têm para soma dos índices $2g$ e como o teorema é válido para o caso $M = S^2$ temos

$$I(X, M) + 2g = 2,$$

que por (6) é exatamente a (1). c.q.d.

Bibliografia

1. S. Lefschetz, "Differential equations: geometric theory," Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.