Matemática Universitária Nº 9/10, dezembro de 1989

Mergulhando Variedades Suaves em Espaços Euclidianos

E. Spanier

Departamento de Matemática
Universidade da Califórnia
Berkeley, Califórnia 94720

Com cordiais saudações
a Elon Lima em seu 60º aniversário

Um resultado clássico de Whitney diz que toda variedade suave de dimensão n pode ser suavemente mergulhada como uma subvariedade fechada do espaço euclidiano $\mathbf{R}^{2n+1}$. No caso de variedades compactas uma demonstração simples deste resultado foi dada por Pontryagin. O objetivo desta nota é esboçar uma nova demonstração do resultado de Whitney, para variedades arbitrárias, usando um teorema de Michael sobre passagem de propriedades locais para globais em espaços paracompactos. Esta prova é suficientemente elementar para ser apresentada em um primeiro curso de variedades diferenciais.

1. Variedades e Aplicações.

Usamos o termo "suave" significando "infinitamente diferenciável" (i.e. de classe C^∞) e nossas variedades serão sem bordo. Por variedade suave queremos designar um espaço de Hausdorff X, com base enumerável, provido de um atlas máximo suave (veja

[1], [3], [6] para mais detalhes sobre esta definição e para conceitos relacionados, discutidos abaixo). Para todo n, o espaço euclidiano $\mathbf{R}^n$ é uma variedade suave, com sua estrutura usual. Todo subconjunto aberto de uma variedade suave é também uma variedade suave. Se X e Y são variedades suaves, podemos considerar aplicações suaves: $f: X \to Y$.

Associado a toda variedade suave existe um inteiro não negativo chamado de sua dimensão. Escrevemos $\dim X = n$ ou equivalentemente, X é uma n-variedade suave.

Se $\dim X = n$, então a todo $x \in X$, está associado um espaço vetorial real de dimensão n, chamado espaço tangente de X em x e denotado por $T_x(X)$. A coleção dos espaços tangentes de X em todos os pontos $x \in X$ forma o fibrado tangente $T(X)$. O fibrado tangente é uma variedade suave com $\dim T(x) = 2 \dim X$ e existe uma projeção suave $\pi: T(X) \to X$ tal que $\pi^{-1}(x) = T_x(X)$ para todo $x \in X$. Se $f: X \to Y$ é suave, sua diferencial $f: T(X) \to T(Y)$ é uma aplicação suave tal que o quadrado abaixo é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{df} & T(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

e tal que para $x \in X$, a aplicação associada $df_x: T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ é linear. Uma aplicação suave $f: X \to Y$ é uma imersão se, em todo ponto $x \in X$, $df_x: T_xX \to T_{f(x)}Y$ é um monomorfismo. Um mergulho $f: X \to Y$ é uma imersão suave que é um homeomorfismo de X sobre $f(X) \subset Y$. Logo, todo mergulho é uma imersão injetiva.

2. Imersões Injetivas.

Como um passo na construção de mergulhos, construimos imersões injetivas. Um subconjunto A de uma variedade suave tem *medida* 0 se, para toda parametrização $u: U \to \mathbf{R}^n$ de X $u(A \cap U)$ tem medida 0 em $\mathbf{R}^n$. É claro que uma união enumerável de subconjuntos de X de medida 0 é um conjunto de medida 0 em X.

LEMA 2.1: Seja $f: X \to Y$ suave, com $\dim X < \dim Y$. Então $f(X)$ tem medida 0 em Y.

DEMONSTRAÇÃO: Este é o caso fácil do teorema de Sard e está demonstrado na Proposição 1.2 da página 69 de [**3**]. Se $v \in \mathbf{R}^m - \{0\}$, seja $\pi_v: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{m-1}$ a projeção no hiperplano ortogonal a v (isto é $\pi_v(z) = z - \langle z, v\rangle/\langle v, v\rangle$ para $z \in \mathbf{R}^m$, onde $\langle a, b\rangle$ é o produto interno usual de $a, b \in \mathbf{R}^m$).

LEMA 2.2: Seja $f: X \to \mathbf{R}^m$ uma imersão injetiva. Se $m > 2\dim X + 1$, o conjunto dos $v \in \mathbf{R}^m - \{0\}$ tais que $\pi_v \circ f: X \to \mathbf{R}^m$ é uma imersão injetiva é denso em $\mathbf{R}^m$.

DEMONSTRAÇÃO: (Veja a prova do teorema da página 51 de [**2**]). Como f é suave, $df: T(X) \to T(\mathbf{R}^m)$ também é. Ora, $T(\mathbf{R}^m) \approx \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$ e $\pi_2 \circ df: T(X) \to \mathbf{R}^m$ é uma aplicação suave que é um monomorfismo linear em cada espaço tangente $T_x(X)$ porque f é uma imersão. A aplicação linear $\pi_v: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{m-1}$ tem diferencial $d\pi_v: T(\mathbf{R}^m) \to T(\mathbf{R}^{m-1})$ correspondendo a $\pi_v \times \pi_v: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^{m-1}$ tal que $\pi_v \circ f$ é uma imersão se e só se v não está na imagem de $(\pi_2 \circ df)(T(X))$. Se $m > 2\dim X$, segue do Lema 2.1 que $(\pi_2 \circ df)(T(X))$ tem medida 0 em $\mathbf{R}^m$.

Seja $X' = X \times X \times \mathbf{R}$ uma variedade suave com $\dim X' = 2\dim X + 1$, e defina $f': X' \to \mathbf{R}^m$ por $f'(x, y, t) = t(f(x) - f(y))$. Então f' é suave e $\pi_v \circ f$ é injetiva se e só se v não está na imagem de $f'(X')$. Se $m > 2\dim X + 1$, segue do Lema 2.1 que $f'(X')$ tem medida 0 em $\mathbf{R}^m$.

Logo, $(\pi_2 \circ df)(T(X) \cup f'(X'))$ tem medida 0 em $\mathbf{R}^m$, e daí $\mathbf{R}^m - [(\pi_1 \circ df)(T(X)) \cup f'(X')]$ é denso em $\mathbf{R}^m$. Qualquer $v \in \mathbf{R}^m - [(\pi_2 \circ df)(T(X)) \cup f'(X')]$ é tal que $\pi_v \circ f$ é uma imersão injetiva em $\mathbf{R}^{m-1}$.

COROLÁRIO 2.3: Se uma n-variedade X tem uma imersão injetiva em algum $\mathbf{R}^m$, então ela tem uma imersão injetiva em $\mathbf{R}^{2n-1}$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que $f: X \to \mathbf{R}^m$ seja uma imersão injetiva com m mínimo. Se $m \leq 2n + 1$, então $\mathbf{R}^m \subset \mathbf{R}^{2n+1}$, logo f pode ser também considerada como uma imersão injetiva de X em $\mathbf{R}^{2n+1}$. Se $m > 2n + 1$, segue do Lema 2.2, que existe $v \in \mathbf{R}^m - \{0\}$ tal que $\pi_v \circ f: X \to \mathbf{R}^{m-1}$ é também uma imersão injetiva. Isto contradiz a minimalidade de m.

LEMA 2.4: Seja $\mathbf{U}$ uma coleção de subconjuntos abertos de uma variedade suave X tal que:

(1) Todo $r \in X$ está contido em algum $U \in \mathbf{U}$.

(2) Se $U \in \mathbf{U}$ e V é um subconjunto aberto de U, então $V \in \mathbf{U}$.

(3) Se $U, V \in \mathbf{U}$ então $U \cup V \in \mathbf{U}$.
(4) Se $\{U_j\}_{j \in J}$ é uma coleção disjunta de elementos de $\mathbf{U}$, então $\cup_i U_j \in \mathbf{U}$.
Então $X \in \mathbf{U}$.

Demonstração: Este é um caso particular do Teorema 3.6 de [4] que afirma a validade do Lema 2.4 para um espaço paracompacto X. No caso de uma variedade X daremos a seguinte prova direta: Como uma variedade é localmente compacta e tem base enumerável, existe uma seqüência de subconjuntos compactos $\{C_i\}_{i=1,2,\ldots}$ tal que $X = \bigcup_i C_i$ e $C_i \subset$ interior de C_{i+1} para cada i.

Por (1) e pela compacidade de C_k, existe um subconjunto finito de $\mathbf{U}$ cobrindo C_k. Por (3), a união deste subconjunto finito está em $\mathbf{U}$. Logo existe $U_k \in \mathbf{U}$ com $C_k \subset U_k$. Seja $V_k = \operatorname{int} C_{k+1} - C_{k-1}$ (onde colocamos $C_o = \phi$). Então V_k é um conjunto aberto em U_{k+1}, logo pertence a $\mathbf{U}$ por (2). As coleções $\{V_k\}_{k-\text{ímpar}}$ e $\{V_k\}_{k-\text{par}}$ são disjuntas (pois $V_k \cap V_{k+2} \subset C_{k+1} \cap (X - C_{k+1}) = \phi$) logo, por (4), $\bigcup_{k-\text{ímpar}} V_k$ e $\bigcup_{k-\text{par}} V_k$ estão em $\mathbf{U}$. Por (3), $\bigcup_k V_k \in \mathbf{U}$.

Mas $X = \bigcup_k V_k$ porque se k é o menor inteiro tal que $x \in C_k$ então $x \in \operatorname{int} C_{k+1}$ e $x \notin C_{k-1}$, logo $x \in V_k$. Conseqüentemente $X \in \mathbf{U}$.

Teorema 2.5: Se X é uma n-variedade suave, existe uma imersão injetiva de X em $\mathbf{R}^{2n+1}$.

Demonstração: Seja $\mathbf{U}$ a coleção de subconjuntos abertos de X que admitem imersões injetivas em $\mathbf{R}^{2n+1}$. Queremos mostrar que $X \in \mathbf{U}$. Pelo Lema 2.4 basta mostrar que $\mathbf{U}$ tem as propriedades de (1) a (4). Se $x \in X$, existe um sistema de coordenadas $u: U \to \mathbf{R}^n$ com $x \in U$. Então u é uma imersão injetiva de U em $\mathbf{R}^n$, logo U tem uma imersão injetiva em $\mathbf{R}^{2n+1}$ e (1) é satisfeita. Claramente, se $u: U \to \mathbf{R}^{2n+1}$ é uma imersão injetiva e V é aberto em U, então $u|V: V \to \mathbf{R}^{2n+1}$ é uma imersão injetiva, logo (2) está satisfeita.

Para provar (3), suponha que $u: U \to \mathbf{R}^{2n+1}$ e $v: V \to \mathbf{R}^{2n+1}$ sejam ambas imersões injetivas. Encolha U e V a U' e V', abertos, com $\overline{U}' \subset U, \overline{V}' \subset V$ (ambos os fechos tomados com relação ao espaço $U \cup V$). Seja $f: U \cup V \to \mathbf{R}$ uma função suave com $f(\overline{U}') = 1$ e $\operatorname{supp} f \subset U$ ($\operatorname{supp} f =$ fecho de $\{x \in U \cup V | f(x) \neq 0\}$).

Semelhantemente, seja $g: U \cup V \to \mathbf{R}$ suave com $g(\overline{V}') = 1$ e $\operatorname{supp} g \subset V$. Defina $u': U \cup V \to \mathbf{R}^{2n+1}$ por

$$u'(x) = \begin{cases} f(x)u(x) & \text{para} \quad x \in U \\ 0 & \text{para} \quad x \notin \operatorname{supp} f \end{cases}$$

e $v': U \cup V \to \mathbf{R}^{2n+1}$ por

$$v'(x) = \begin{cases} g(x)v(x) & \text{para} \quad x \in V \\ 0 & \text{para} \quad x \notin \operatorname{supp} g \end{cases}$$

Então u' e v' são ambas suaves e $u'|U' = u|U'$, $v'|V' = v|V'$. Defina $h: U \cup V \to \mathbf{R}^{2n+1} \times \mathbf{R}^{2n+1} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ por $h(x) = (u'(x), v'(x), f(x), g(x))$. Então h é suave. É uma imersão porque u' é imersão em U', v' é imersão em V' e $U' \cup V' = U \cup V$. É injetiva porque se $h(u) = h(y)$ e $x \in U'$, então $f(x) = 1 = f(y)$, logo $y \in U$ e $f(x)u(x) = f(y)u(y)$ implica $u(x) = u(y)$, logo $x = y$. Do mesmo modo se $h(x) = h(y)$ e $x \in V'$, então $x = y$ logo h é uma imersão injetiva em $\mathbf{R}^{4n+4}$. Pelo Corolário 2.3, $U \cup V$ admite uma imersão injetiva em $\mathbf{R}^{2n+1}$, logo $U \cup V \in \mathbf{U}$ e (3) está satisfeita.

Finalmente, se $\{U_i\}_{i \in J}$ é uma coleção disjunta de elementos de $\mathbf{U}$, ela é necessariamente enumerável (pois X tem base enumerável). Seja $\{V_j\}$ uma coleção disjunta enumerável de abertos de $\mathbf{R}^{2n+1}$, cada um difeomorfo a $\mathbf{R}^{2n+1}$. Como $U_j \in \mathbf{U}$, existe uma imersão injetiva $u_j: U_j \to V_j$. Defina $u: \bigcup_j U_j \to \mathbf{R}^{2n+1}$ tal que $u|U_j = u_j$. Então u é uma imersão injetiva, o que mostra que $\bigcup_j U_j \in \mathbf{U}$ logo (4) está satisfeita.

Se X é compacto, uma imersão injetiva é um mergulho, logo o Teorema 2.5 mostra que toda variedade compacta pode ser mergulhada em $\mathbf{R}^{2n+1}$. Para variedades não compactas, é preciso trabalhar mais.

3. Mergulhos.

Começamos com uma propriedade topológica. Uma aplicação $f: X \to Y$ é dita *própria* se C compacto em Y implica $f^{-1}(C)$ compacto em X.

Lema 3.1: Seja $f: X \to \mathbf{R}^m$ contínua e injetiva, de um espaço topológico X em $\mathbf{R}^m$. Então f é um mergulho de X como subconjunto fechado de $\mathbf{R}^m$, se e só se f é própria.

Demonstração: f é um mergulho fechado se e só se f é uma aplicação fechada (i.e. E fechado em X implica $f(E)$ fechado em $\mathbf{R}^m$). Como $\mathbf{R}^m$ é localmente compacto, um subconjunto $A \subset \mathbf{R}^m$ é fechado em $\mathbf{R}^m$ se e só se $A \cap C$ é compacto, para todo subconjunto compacto $C \subset \mathbf{R}^m$.

Se f é uma aplicação fechada, seja C um subconjunto compacto qualquer de $\mathbf{R}^m$. Queremos mostrar que $f^{-1}(C)$ é compacto. Mas $F^{-1}(C) = f^{-1}(f(X) \cap C)$, onde $f^{-1}: f(X) \to X$ é um homeomorfismo. Logo basta provar que $f(X) \cap C$ é compacto, mas isto é conseqüência de $f(X)$ ser fechado em $\mathbf{R}^m$. Logo se f é fechada, ela é própria.

Reciprocamente, suponha que f seja própria e seja E um subconjunto fechado de X. Queremos mostrar que $f(E)$ é fechado em $\mathbf{R}^m$. Basta verificar que $f(E) \cap C$ é compacto para todo compacto C em $\mathbf{R}^m$. Mas $f(E) \cap C = f(E \cap f^{-1}(C))$ e $f^{-1}(C)$ é compacto porque f é própria. Como E é fechado, $E \cap f^{-1}(C)$ é também compacto, logo $f(E \cap f^{-1}(C))$ é compacto. Logo, f é própria implica f aplicação fechada.

Teorema 3.2: Toda n-variedade suave mergulha como subvariedade fechada de $\mathbf{R}^{2n+1}$.

Demonstração: Compare com a demonstração do teorema de Whitney na página 53 de [**2**]. Pelo Teorema 2.5, existe uma imersão injetiva de X em $\mathbf{R}^{2n+1}$. Como $\mathbf{R}^{2n+1}$ é difeomorfo à bola unitária aberta $U(1) = \{z \in \mathbf{R}^{2n+1} \mid \|z\| < 1\}$, existe uma imersão injetiva $f: X \to U(1)$. Seja $g: X \to \mathbf{R}$ uma função suave própria (corolário da página 53 de [**2**]) e defina $F: X \to \mathbf{R}^{2n+2}$ por $F(x) = (f(x), g(x))$. Então F é também uma aplicação própria e, se $v \in \mathbf{R}^{2n+2} - 0 \times \mathbf{R}$, a projeção $\pi_v \circ F: X \to \mathbf{R}^{2m+1}$ é também própria. Para ver isto, suponha que $\pi_v \circ F$ não seja prpria. Então existe $c > 0$, tal que $\{x \in X \mid \|\pi_v F(x)\| \leq c\}$ não é compacto. Então g é ilimitada neste conjunto: logo existe uma seqüência $\{x_i\}$ em X, tal que $\|\pi_v F(x_i)\| \leq c$ mas $g(x_i) \to \infty$. Podemos supor que v é um vetor unitário (porque $\pi_v = \pi_{v/\|v\|}$). Então $\pi_v F(x) = F(x) - \langle F(x), v\rangle v$ logo $F(x) - \pi_v F(x) = \langle F(x), v\rangle v$ é múltiplo de v. Conseqüentemente

$$\frac{F(x_i) - \pi_v F(x_i)}{g(x_i)} = w_i$$

é múltiplo de v. Mas $\left\| \frac{\pi_v F(x_i)}{g(x_i)} \right\| \leq \frac{c}{|g(x_i)|} \to 0$ e $\frac{F(x_i)}{g(x_i)} = (\frac{f(x_i)}{g(x_i)}, 1) \to (0 \ldots 0, 1)$. Logo $w_i \to (0 \ldots 0, 1)$. Mas cada w_i é múltiplo de v, logo $\lim w_i$ é múltiplo de v, logo $v = (0 \ldots 0, 1)$ ou $v = (0 \ldots 0, 1)$, o que é uma contradição.

Pelo Lema 2.2 existe v não em $0 \times \mathbf{R}$ tal que $\pi_v \circ F$ é uma imersão própria injetiva, logo pelo Lema 3.1 $\pi_v \circ F$ é um mergulho fechado de X em $\mathbf{R}^{2n+1}$.

Bibliografia

1. Boothby, W.M., "Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry," segunda edição, Academic Press, Inc., 1986.
2. Guillemin, V e Pollackk, A., "Differential Topology," Prentice-Hall, Inc., 1974.
3. Hirsch, M.W., "Differential Topology," Springer-Verlag, 1976.
4. Michael, E., *Local Properties of Topological Spaces*, Duke Math. Journal **21** (1954), 163–171.
5. Pontryagin, L.S., *Smooth manifolds and their applications in homotopy theory*, Trudy Mat. Inst. Steklov **45** (1955), 1–139 (Russian), Amer. Math.Soc. Translations, ser.2, 11 (1959), 1–114.
6. Spivak, M., "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry," segunda edição, Publish or Perish, Inc., 1979.
7. Whitney, H., *Differentiable Manifolds*, Ann. of Math. **37(2)** (1936), 645–680.