Artigos

Matemática Universitária Nº 11, junho de 1990, pp. 15-26.

Grupos de Reflexões

Gudlaugur Thorbergsson*

Department of Mathematics
University of Notre Dame
Notre Dame, Indiana 46556
P.O. Box 398

A teoria de grupos de refelxões, também chamados de grupos de Coxeter, é uma área entre gometria e álgebra que pode facilmente ser ensinada no nível de graduação. Um tal curso poderia, por exemplo, ser baseado no livro [1] (vide bibliografia). Grupos de reflexões têm um papel importante em várias disciplinas mais avançadas como por exemplo grupos de Lie, singularidades, espaços simétricos e subvariedades isoparamétricas. Gostaríamos de mostrar nesta palestra que não só são de interesse por suas aplicações, mas também por si mesmos. Restringiremo-nos às dimensões dois e três onde os grupos de reflexões são os grupos de simetria de polígonos e sólidos regulares. Observamos, no final da palestra, que esta situação muda a partir de dimensão quatro.

Parte I. Reflexões no plano $\mathbf{R}^2$

Nós definimos primeiro a noção de reflexão no plano $\mathbf{R}^2$. Seja L uma reta no plano não contendo necessariamente a origem. A *reflexão* $r_L: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, com L como *espelho*, fixa L e manda um ponto $x \notin L$ para o outro lado de L de tal maneira que L é a mediatriz do segmento entre x e $r_L(x)$. Vide fig. 1.

*Palestra proferida em agosto de 1989 no Colóquio de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, financiado pela Sociedade Brasileira de Matemática.

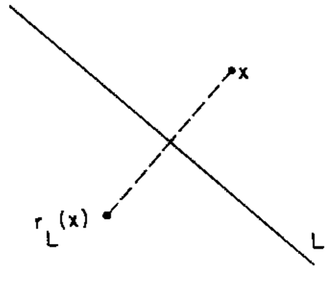

Figura 1.

Observe que r_L é uma isometria com a propriedade que a distância entre x e L é a mesma que a distância entre $r_L(x)$ e L. Note também que uma reflexão não respeito a orientação do plano.

DEFINIÇÃO: Um grupo W de isometrias do plano é chamado de *grupo de reflexões* (ou grupo de Coxeter) se ele é gerado por reflexões, i.e., se existe um subconjunto de reflexões $S \subset W$ tal que todo elemento de W pode ser escrito como produto de elementos de S.

OBSERVAÇÃO: Um grupo de reflexões *não* consiste somente de reflexões. Com efeito, o produto de duas reflexões é uma rotação ou uma translação (ou a identidade). Sejam L_1 e L_2 duas retas que se interceptam no ponto y com ângulo α. Então $r_{L_1} \circ r_{L_2}$ é a rotação de ângulo 2α na direção L_2 para L_1 com centro em y, vide fig. 2.

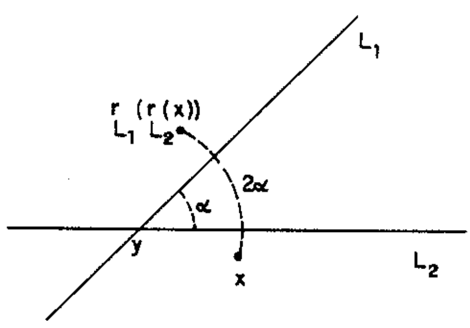

Figura 2.

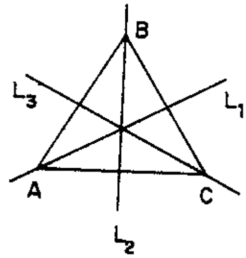

Figura 3.

Sejam agora L_1 e L_2 duas retas paralelas. Então $r_{L_2} \circ r_{L_1}$ é a translação de distância 2δ na direção ortogonal a L_1 e L_2 onde $\delta = d(L_1, L_2)$. Observe que toda isometria do plano pode ser escrita como produto de três (ou menos) reflexões.

Exemplos: (1) Seja T um triângulo equilátero. As reflexões nas retas L_1, L_2 e L_3 (vide fig. 3) geram o grupo de simetrias do triângulo. Para nós, o grupo de simetrias de um objeto consiste em todas as isometrias que mandam o objeto em si, respeitando ou não a orientação do plano.

Este grupo é chamado o *grupo diedral de ordem seis* e é denotado por $\mathcal{H}_2^3$ (o índice 2 se refere à dimensão do plano e 3 se refere ao número de vértices do triângulo). É fácil ver que $\mathcal{H}_2^3$ é isomorfo ao grupo simétrico S_3 de permutações de três letras. Note que, por exemplo, a reflexão r_{L_1} corresponde a transposição (B, C) que fixa o vértice A e permuta B e C.

Mais geralmente, dado $n \geq 3$, seja P_n um n-ágono regular. O grupo de simetrias de P_n é também gerado por reflexões e é chamado o *grupo diedral de ordem* $2n$, denotado $\mathcal{H}_2^n$. (É claro que $\mathcal{H}_2^n$ não é isomorfo ao grupo simétrico S_n se $n > 3$.) Uma outra maneira de definir os grupos diedrais é a seguinte. Sejam $n \geq 1$ e L_1 e L_2 duas retas que se interceptam com ângulo π/n ($L_1 = L_2$ se $n = 1$). O grupo gerado pelas reflexões r_{L_1} e r_{L_2} coincide com $\mathcal{H}_2^n$ se $n \geq 3$. Se $n = 1$ ou 2 chamamos o grupo também de diedral e denotamos por $\mathcal{H}_2^1$ ou $\mathcal{H}_2^2$ respectivamente. (Note que muitos livros usam a notação D_n ou D_{2n} no lugar de $\mathcal{H}_2^n$. Nossa notação coincide com a de [1].)

(2) O grupo de rotações de um n-ágono regular ($n \geq 3$) é um grupo cíclico de ordem n que nós denotamos por C_2^n. Note que

todo elemento de $\mathcal{C}_2^n$ respeita a orientação do plano. Segue que $\mathcal{C}_2^n$ não contém nenhuma reflexão e portanto não é um grupo de reflexões. O grupo $\mathcal{C}_2^n$ é um subgrupo de índice dois em $\mathcal{H}_2^n$. Note que $\mathcal{H}_2^1$ e $\mathcal{H}_2^2$ também têm subgrupos de rotações de índice dois que nós denotamos por $\mathcal{C}_1^1$ ou $\mathcal{C}_2^2$. É claro que $\mathcal{C}_2^1$ só contém a identidade.

(3) A notação em (1) e (2) é inexata porque não existe *só um* grupo diedral de ordem $2n$ ou *um* grupo cíclico de rotações de ordem n. Eles dependem obviamente do n-ágono P_n ou das retas L_1 e L_2. Mas observe que dois tais grupos são conjugados no grupo de todas as isometrias do plano se eles têm a mesma ordem e são ambos ou diedrais ou cíclicos. No seguinte teorema entendemos por um grupo diedral ou um grupo cíclico de rotações um tal grupo com respeito a algum n-ágono regular ou par de retas L_1 ou L_2.

Teorema. *Seja W um grupo finito de reflexões em $\mathbf{R}^2$. Então W é um grupo diedral. Um grupo finito de isometrias do plano é ou diedral ou cíclico.*

A prova deste teorema se encontra em [1]. Na proposição a seguir explicaremos o início da prova que é baseada numa ferramenta útil para várias perguntas: o conceito de *centróide*. Seja $A = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset \mathbf{R}^n$. O centróide de A é definido como a média

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_k.$$

Proposição. *Um grupo finito de isometrias do $\mathbf{R}^n$ tem um ponto fixo.*

PROVA: Denotamos o grupo por W. Seja $x \in \mathbf{R}^n$. Seja Wx a órbita de x sob W, i.e., $Wx = \{wx \mid w \in W\}$. Note que Wx é um subconjunto finito do $\mathbf{R}^n$, que tem portanto um centróide y. Uma isometria leva o centróide de um conjunto para o centróide do conjunto imagem. A imagem de Wx por um elemento de W é obviamente Wx. Conseqüentemente, o centróide y é fixo sob todo elemento de W.

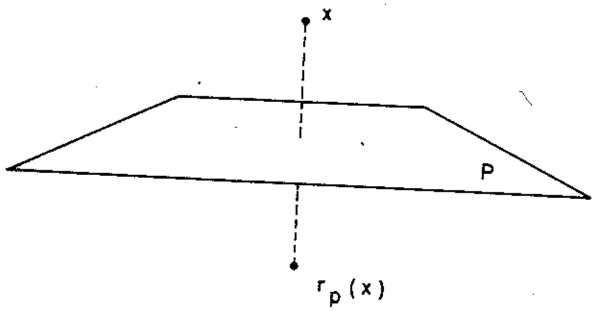

Figura 4.

Parte II. Reflexões no espaço $\mathbf{R}^3$

A definição de uma reflexão no espaço $\mathbf{R}^3$ é semelhante ao caso do plano. Mais precisamente, seja P um plano no $\mathbf{R}^3$ não contendo necessariamente a origem. A *reflexão* $r_P: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ com P como *espelho* fixa P e manda um ponto $x \notin P$ para o outro lado de P de tal maneira que a distância entre x e P é a mesma distância entre $r_P(x)$ e P; vide fig. 4.

Vide [1] para uma definição mais formal. Note que uma reflexão no espaço não respeita a orientação. Um *grupo de reflexões no espaço* $\mathbf{R}^3$ é, exatamente como no plano, um grupo gerado por reflexões. Toda isometria de $\mathbf{R}^3$ pode ser escrita como produto de quatro (ou menos) reflexões.

EXEMPLOS: (Extensão dos grupos diedrais e cíclicos para o espaço.) Seja P_n a pirâmide com vértice (0,0,2) cuja base é um n-ágono regular inscrito no círculo unitário no plano-xy, $n \geq 3$. O grupo de simetrias de P_n é denotado por $\mathcal{H}_3^n$. É fácil ver que $\mathcal{H}_3^n$ e $\mathcal{H}_2^n$ são isomorfos. Nós chamamos $\mathcal{H}_3^n$ também de *grupo diedral de ordem* $2n$. O grupo de rotações que deixa P_n invariante é denotado por $\mathcal{C}_3^n$. Ele é isomorfo ao grupo cíclico $\mathcal{C}_2^n$.

Nós dizemos que o eixo-z é *inessencial* para $\mathcal{H}_3^n$ e $\mathcal{C}_3^n$ porque todos os elementos destes grupos deixam o eixo fixo. Nós dizemos também que $\mathcal{H}_3^n$ e $\mathcal{C}_3^n$ são *inessenciais* porque as ações deles são extensões triviais de ações de grupos que agem em uma dimensão menor.

Nós damos agora exemplos de grupos essenciais. Estes grupos são grupos de simetrias dos cinco sólidos regulares no $\mathbf{R}^3$ (vide fig. 5).

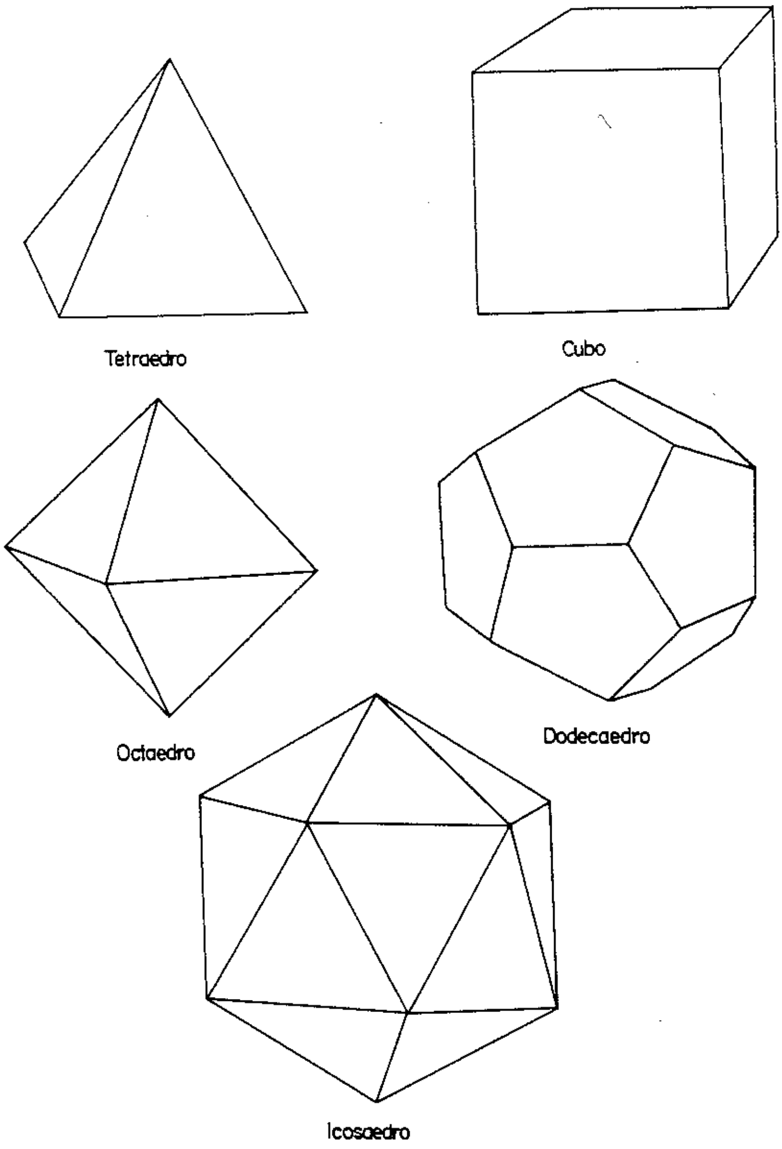

Figura 5.

Os cinco sólidos regulares foram descobertos já na antigüidade. No Timeu, um dos diálogos de Platão (429–348 a.C.), quatro sólidos (tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro) são associados aos quatro elementos fogo, terra, ar e água. O dodecaedro figura como símbolo para o universo inteiro. Isto talvez seja o primeiro "modelo

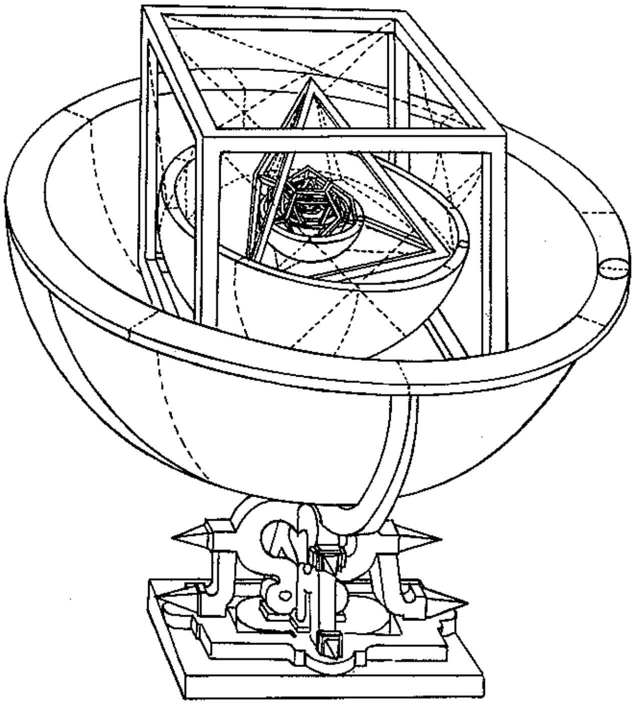

Figura 6.

matemático" na história da ciência!

Dois mil anos depois, no ano 1596, Kepler (1571–1630) publicou o seu livro sobre o "mistério cosmográfico". Ele usa os sólidos regulares para "explicar" as distâncias entre os seis planetas conhecidos na época: Mercúrio, Venus, Terra, Marte, Júpites e Saturno cujas órbitas são, de acordo com Copérnico, círculos centrados no Sol. O modelo é o seguinte: todo planeta determina uma esfera com o Sol no centro. Kepler notou que a proporção entre os raios

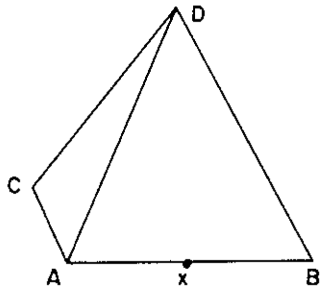

Figura 7.

das órbitas de Mercúrio e Venus é aproximadamente a proporção entre os raios da esfera inscrita num octaedro e da esfera na qual o octaedro está inscrito. Isto vale também para Venus e Terra (icosaedro), Terra e Marte (dodecaedro), Marte e Júpites (tetraedro), Júpites e Saturno (cubo) (vide fig. 6). O modelo, de fato, dá números bastante satisfatórios.

Não é difícil ver que a ordem do grupo de simetrias de um sólido regular é $2f\ell$, onde f é o número de faces do sólido é ℓ é o número dos lados de uma face. Seja v o número de vértices de um sólido. Então temos:

Tetraedro: $f = 4,\ \ell = 3,\ v = 4.$
Cubo: $f = 6,\ \ell = 4,\ v = 8.$
Octaedro: $f = 8,\ \ell = 3,\ v = 6.$
Dodecaedro: $f = 12,\ \ell = 5,\ v = 20.$
Icosaedro: $f = 20,\ \ell = 3,\ v = 12.$

EXEMPLOS: (1) *O tetraedro.* O grupo $\mathcal{T}$ de simetrias do tetraedro é isomorfo ao grupo simétrico S_4 de permutações de quatro letras. Note que S_4 é gerado por transposições que correspondem às reflexões em $\mathcal{T}$. Por exemplo, (A, B) é a reflexão no plano gerado por x, C e D; vide fig. 7.

Note que a ordem de $\mathcal{T}$ é 24. Em certo sentido, $\mathcal{T}$ é análogo ao grupo diedral $\mathcal{H}_2^3$, o grupo de simetrias do triângulo. Mais precisamente, estes dois grupos são os primeiros na série de grupos de reflexões em $\mathbf{R}^n$ que são grupos de simetria do n-simplexo.

(2) *O cubo e o octaedro.* O cubo e o octaedro têm grupos de simetria isomorfos. Para ver isto, note que os centros dos lados do cubo são vértices de um octaedro cujas arestas ligam os centros

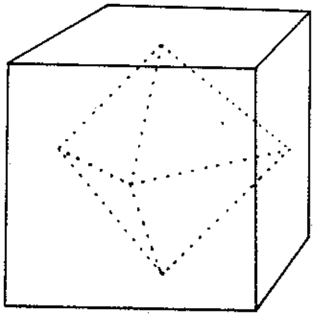

Figura 8.

dos lados adjacentes, e vice-versa (vide fig. 8).

Nós podemos considerar o octaedro com vértices $e_1 = (1,0,0)$, $-e_1 = (-1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $-e_2 = (0,-1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ e $-e_3 = (0,0,-1)$. O grupo $\mathcal{W}$ de simetrias é gerado por permutações de e_1, e_2 e e_3 e troca de sinal de e_1, e_2 ou e_3. A ordem de $\mathcal{W}$ é igual a $3!2^3 = 48$ (ou $2 \cdot 8 \cdot 3 = 48$, usando a observação acima sobre a ordem de um grupo de simetrias de um sólido regular). É mostrado em [**3**] que $\mathcal{W}$ é isomorfo ao produto direto $\mathcal{S}_4 \times \mathbf{Z}_2$. Note que os grupos de simetria do cubo em $\mathbf{R}^n$ é também gerado por reflexões para todo n. O primeiro grupo nesta série é o grupo diedral $\mathcal{H}_2^4$ de simetrias de um quadrado.

(3) *O dodecaedro e o icosaedro.* Os grupos de simetria do dodecaedro e icosaedro são isomorfos. A razão é análoga ao caso do cubo e do octaedro. Nós só citamos que o grupo $\mathcal{I}$ de simetrias do icosaedro é gerado por reflexões e é isomorfo a $\mathcal{A}_5 \times \mathbf{Z}_2$, vide [**3**]. A ordem de $\mathcal{I}$ é 120. Existem em $\mathbf{R}^4$, mas não em dimensões superiores, sólidos análogos ao dodecaedro e ao icosaedro cujos grupos de simetria são também gerados por reflexões. É interessante que o grupo $\mathcal{I}$ não pode ser o grupo de simetrias de um cristal, mas existe matéria viva com este grupo de simetria. A razão é que $\mathcal{I}$ tem subgrupos de ordem cinco, vide [**4**].

Anunciamos sem prova o seguinte teorema (vide [**1**]):

Teorema. *Os grupos essenciais de reflexões de* $\mathbf{R}^3$ *são* $\mathcal{T}$, $\mathcal{W}$ *e* $\mathcal{I}$.

Observação: Os grupos finitos de reflexões em qualquer dimensão foram classificados por Coxeter em 1934. Eles não correspondem todos a sólidos regulares. Estes foram classificados em

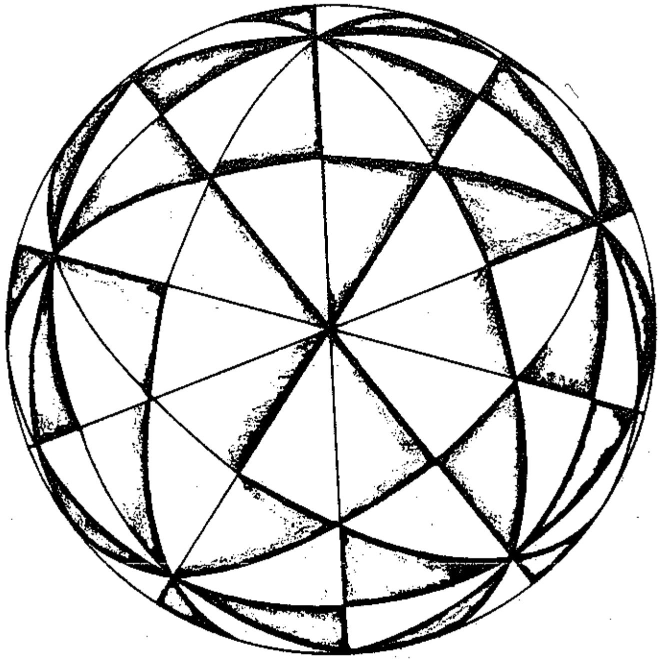

Figura 9.

dimensões superiores por Schläfli em 1850.

Parte III. Domínios fundamentais e diagramas

Seja W um grupo essencial de reflexões de $\mathbf{R}^3$ e seja $\mathcal{E}$ o conjunto dos espelhos das reflexões em W. Note que $H \in \mathcal{E}$ intercepta S^2 num círculo máximo $c_H := H \cap S^2$. (Nós estamos supondo que o ponto fixo de W é a origem.) Seja

$$\mathcal{C} = \bigcup_{H \in \mathcal{E}} c_H.$$

Então pode-se provar que o complemento de $\mathcal{C}$, $S^2 - \mathcal{C}$, consiste em triângulos, vide fig. 9, tirado do livro [**3**], p. 281, para o caso $W = \mathcal{I}$.

Esta triangulação de S^2 é invariante por W e contém tantos triângulos quanto a ordem de W. Mais precisamente:

Proposição. *Um componente de $S^2 - C$ é um domínio fundamental para W; i.e., seja Δ um componente. Então*

(1) $S^2 = \overline{W(\Delta)} = \bigcup_{w \in W} \overline{w(\Delta)}$, *onde $\overline{A}$ significa a união do conjunto A com os seus pontos de fronteira.*

(2) $w(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$ *se* $w \neq \mathrm{id}$.

Sejam agora ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 os lados de Δ. Associamos um *diagrama* a W da seguinte forma: Aos lados ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 correspondem os vértices do diagrama. Os vértices de ℓ_i e ℓ_j $(i \neq j)$ são ligados por $p-2$ arestas se o ângulo entre ℓ_i e ℓ_j é π/p. Note que segue da proposição que p é um inteiro ≥ 2. A seguinte tabela mostra os diagramas e os triângulos para as três possibilidaes para W no $\mathbf{R}^3$. (Observe que a soma dos ângulos não é igual a π porque os triângulos são esféricos.)

$W = \mathcal{T}$

$W = \mathcal{W}$

$W = \mathcal{I}$

Os diagramas podem ser definidos analogamente em dimensões maiores. Eles são importantes porque contém todas as informações essenciais sobre o grupo. A classificação de grupos de reflexões é feita através dos diagramas.

Exemplo em dimensão quatro. Sejam H_1, H_2, H_3 e H_4 quatro hiperplanos no $\mathbf{R}^4$, de modo que os ângulos entre eles são dados pelo seguinte diagrama:

O hiperplano H_1 corresponde ao vértice ligado a três arestas, os outros três hiperplanos correspondem arbitrariamente aos outros vértices. Isto significa que H_1 faz ângulo $\pi/3$ com H_2, H_3 e H_4 e todos os outros pares de planos se interceptam ortogonalmente. Esta configuração existe (escolha um produto interno conveniente em $\mathbf{R}^4$ de maneira que os hiperplanos ortogonais aos elementos da base canônica satisfaçam a condição) e ela é única a menos de uma isometria. O grupo gerado pelas reflexões r_{H_1}, r_{H_2}, r_{H_3} e r_{H_4} é finito e representa um fenômeno que não ocorre em dimensões dois e três: ele não é o grupo de simetrias de nenhum sólido regular de $\mathbf{R}^4$.

Bibliografia

1. L.C. Grove & C.T. Benson, "Finite reflection groups," Bogden & Quigley, Tarrytown-on-Hudson, NY, 1971.
2. M. Berger, "Geométrie, vol 1 & 3," Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1978.
3. H.M.S. Coxeter, "Introduction to Geometry," John Wiley & Sons, New York, 1961.
4. H. Weyl, "Symmetry," Princeton University Press, Princeton, 1952.