Matemática Universitária Nº 11, junho de 1990, pp. 27-52.

Séries de Fourier e Convergência*

Roberto Oscar Gandulfo

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília
70.910 Brasília - DF

A idéia central da teoria das séries de Fourier é a de representar uma dada função f, periódica e de período 2π, como a soma de uma série trigonométrica,

$$(*) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

No presente trabalho analisaremos essa representação do ponto de vista da convergência pontual da série.

De um modo geral, esta é uma das idéias básicas da Análise: decompor funções arbitrárias em têrmos de outras mais simples, com o objetivo de encontrar propriedades das funções a partir das "componentes" que as representam.

Muitos nomes famosos estão ligados à teoria: a discussão da possibilidade de tal representação começa com L. Euler (1707-1783) e D. Bernoulli (1700-1782) por volta de 1750, e prossegue com J. d'Alembert (1717-1783) e J. L. Lagrange (1736-1813).

J. B. Fourier (1768-1830) em sua célebre memória sobre a teoria do calor, publicada em 1822 e premiada pela Academia de

*O presente trabalho é uma revisão daquele que apareceu no Noticiário da SBM (outubro de 84) cujo objetivo é de apresentar cronologicamente os diversos resultados que levaram à solução da Conjectura de Lusin sobre a convergência das séries de Fourier de funções integráveis. No nº 3 desta revista (junho de 86) apareceu outro artigo sobre as séries de Fourier voltado principalmente a uma discussão do ensino desta teoria.

Ciências de Paris, fez a primeira tentativa para provar que uma função arbitrária f é igual à soma de uma série trigonométrica particular, série esta que passou a ser chamada de "série de Fourier de f", embora Euler já conhecesse a forma dos coeficientes a_n e b_n, bem antes dos trabalhos de Fourier. Euler fez essa descoberta por volta de 1777, em um trabalho publicado dezesseis anos mais tarde.

P. G. Dirichlet (1805-1859) foi o primeiro matemático a obter uma condição suficiente para a validade da representação (*). Num trabalho de 1829 ele provou que se f é de variação limitada, a série de Fourier de f converge a f nos pontos onde ela é contínua, e converge à media dos limites laterais de f nos pontos de descontinuidade. Nesse trabalho Dirichlet deu origem ao conceito de função como ele é hoje conhecido, esclarecendo assim uma das noções mais básicas da Análise.

Ao que parece, foi por influência de Dirichlet que G. B. Riemann (1826-1866) se interessou pelo problema das séries trigonométricas, sendo levado a estudar cuidadosamente a integral que leva seu nome num trabalho fundamental de 1854, intitulado "Sobre a representação de funções por meio de séries trigonométricas" e publicado em 1867. Este trabalho teve uma influência muito grande sobre G. Cantor (1845-1918), que investigou o problema da unicidade da representação de funções por séries trigonométricas. O estudo dos chamados "conjuntos de unicidade" levou-o a definir os números reais como limites de sucessões de racionais e criar a Teoria dos Conjuntos e dos números transfinitos, trabalho este de monumental importância no desenvolvimento da Matemática no final do século 19.

Mencionemos finalmente K. Weierstrass (1815-1897) que em 1861 deu o primeiro exemplo de uma função contínua sem derivada em ponto algum. Essa função é definida por uma série trigonométrica que converge uniformemente, o que implica em particular que a série é de Fourier, como veremos mais adiante.

Estes breves comentários indicam a influência decisiva que a teoria das séries de Fourier teve no desenvolvimento de várias idéias centrais da Matemática, podendo ser considerada uma das teorias mais fascinantes da Análise.

A referência clássica sobre esta teoria continua sendo o excelente livro de A. Zygmund [18] que desde sua primeira edição em

1935 influenciou o desenvolvimento de grande parte da pesquisa em Análise Harmônica e Teoria de Funções.

As Séries de Fourier

Em geral consideraremos funções definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$, embora, às vezes, seja mais conveniente considerar o intervalo $[0, 2\pi]$ com o objetivo de simplificar as notações. Em qualquer caso, se f está definida em algum desses intervalos, estendê-la-emos a todo $\mathbf{R}$ como uma função periódica de período 2π; $L^1 = L^1(-\pi, \pi)$ denota, como é usual, o espaço das funções integráveis a Lebesgue no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Se $f \in L^1(-\pi, \pi)$, definimos

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\ nx\,dx \end{aligned} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e escrevemos

$$(2) \qquad S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n\,\text{sen}\ nx).$$

Essa série, chamada de "série de Fourier de f relativa ao sistema trigonométrico $\{\frac{1}{2}, \cos x, \text{sen}\ x, \text{sen}\ 2x, \ldots\}$", é somente formal, quer dizer, não fazemos qualquer consideração sobre sua convergência ou divergência; a notação $S[f]$ indica apenas que os coeficientes de (2) foram determinados pelas fórmulas dadas em (1).

Observemos agora que

$$a_n \cos nx + b_n\ \text{sen}\ nx = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx},$$

de modo que, definindo $a_{-n} = a_n$, $b_{-n} = -b_n$ e $b_o = 0$, obtemos a n-ésima soma parcial de (2),

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

na forma

(3) $$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Então $S[f]$ pode ser escrita na "forma complexa"

(4) $$S[f] = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

onde a convergência ou divergência desta última série (4) deve ser entendida no sentido das somas parciais simétricas (3); neste caso os coeficientes c_n são chamados os coeficientes de Fourier complexos de f e denotados por $\hat{f}(n)$. Temos assim

(5) $$c_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Na notação (4), $S[f]$ é também a "série de Fourier de f relativa ao sistema trigonométrico $\{e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$".

Que podemos dizer sobre os coeficientes $\hat{f}(n)$? Foi Riemann quem demonstrou um resultado básico e geral, posteriormente estendido por Lebesgue ao novo conceito de integral por ele definido, e conhecido como

Lema de Riemann-Lebesgue. *Se $f \in L^1$, então*

$$\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Com efeito, usando a definição (5) de $\hat{f}(n)$, trocando x por $x+\frac{\pi}{n}$ e lembrando que f é periódica de período 2π, obtemos

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\frac{\pi}{n})e^{-inx}dx.\end{aligned}$$

Somando estas duas últimas expressões e dividindo por 2, resulta

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})\right)e^{-inx}dx$$

e então

$$(6) \qquad |\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x+\frac{\pi}{n})|dx.$$

Se f é contínua, é fácil ver que o membro da direita tende a zero quando $|n|\to\infty$; se f é integrável, então, aproximando f por funções contínuas, podemos tirar a mesma conclusão: $c_n = \hat{f}(n) \to 0$ com $|n|\to\infty$.

O resultado seguinte vale para qualquer série trigonométrica, não necessariamente de Fourier;

Teorema de Cantor-Lebesgue. *Se a série trigonométrica* $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ *converge em um conjunto de medida positiva* (por exemplo, um subintervalo aberto qualquer), *então*

$$\lim_{|n|\to\infty} c_n = 0.$$

Vemos então que se uma série trigonométrica é a série de Fourier de uma dada função, seus coeficientes devem tender a zero necessariamente (pelo Lema de Riemann-Lebesgue), e este fato independe da convergência da série; no entanto, se a série trigonométrica dada for arbitrária, não poderemos concluir que $\lim_{|n|\to\infty} c_n = 0$ em geral, a não ser que saibamos, de antemão, que a série converge em um conjunto de medida positiva. Certos aspectos da convergência evidenciam outras diferenças existentes entre as séries trigonométricas e as séries de Fourier. Suponhamos que uma série trigonométrica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ convirja uniformemente para uma função f no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Isto implica, em particular, que f é contínua em $[-\pi, \pi]$, logo, como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

temos também

$$f(x)e^{ikx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n-k)x};$$

integrando e usando a convergência uniforme para trocar a integral pelo somatório,

$$\begin{aligned}(7) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}dx \\ &= 2\pi c_k.\end{aligned}$$

Isto mostra que a série é precisamente a série de Fourier de sua soma f.

O que pode acontecer se não temos convergência uniforme? Mostraremos mais adiante que a série

$$(8) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{\log n}$$

converge em todo ponto do intervalo $[0, 2\pi]$ e uniformemente em todo subintervalo $[\delta, 2\pi - \delta]$ onde $0 < \delta < \pi$, mas também provaremos que essa série trigonométrica não pode ser uma série de Fourier. Em contraste com esta situação, há exemplos de funções cujas séries de Fourier divergem em um subconjunto que pode ser finito, infinito, denso, e até coincidir com o intervalo todo.

Isto nos leva a considerar a seguinte questão:

$$(9)\qquad \begin{array}{l}\textit{É possível saber se uma série trigonométrica dada}\\ \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \textit{ é a série de Fourier de uma certa função,}\\ \textit{levando-se em consideração a rapidez com que seus}\\ \textit{coeficientes tendem a zero quando } |n| \to \infty\,?\end{array}$$

A resposta, em geral, é negativa, mas em vários casos particulares a resposta é, não somente positiva, como também pode-se precisar a estrutura da função. Se supomos, por exemplo, que os coeficientes c_n tendem a zero com suficiente rapidez, digamos $c_n = 0\left(\frac{1}{|n|^s}\right)$ para $|n| \to \infty$, com $s > 1$, então o teste M de Weierstrass assegura que a série converge uniformemente em todo o intervalo e, argumentando como em (7), a série resulta ser a série de Fourier de sua soma, respondendo afirmativamente à questão. Além disso, é fácil ver, derivando têrmo a têrmo, que essa soma é uma função de classe C^k, $1 \leq k < s - 1$.

Voltando nossa atenção para a série (8), podemos observar que seus coeficientes satisfazem

$$\frac{1}{n^s} = o(\frac{1}{\log n})$$

quando $n \to \infty$, $\forall\, s > 0$, e esse descrescimento tão lento de $1/\log n$ é responsável pelo fato de que a série não seja de Fourier. Mas este fato não é um resultado geral, pois, como veremos mais adiante, dada qualquer sucessão $(\lambda_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ que tenda a zero quando $|n| \to \infty$, é sempre possível achar uma outra sucessão (c_n) tal que $|c_n| \geq |\lambda_n|$ $\forall\, n \in \mathbf{Z}$ e de tal modo que $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ seja uma série de Fourier. Isto quer dizer que os coeficientes de Fourier de funções podem tender a zero de modo arbitrariamente lento.

Alguns casos importantes, nos quais a resposta à pergunta (9) é afirmativa, serão analisados posteriormente na parte correspondente a certas séries particulares. Entretanto, vale a pena relembrar um dos teoremas mais importantes da Análise, que fornece uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão

$(c_n)_{-\infty}^{\infty}$ de números complexos seja a sucessão dos coeficientes de Fourier de uma função f de quadrado integrável. Usamos a notação usual,

$$L^2(-\pi,\pi) = \left\{ f \text{ mensurável } / \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx < \infty \right\},$$

e observamos que toda função $f \in L^2$ é integrável, pela desigualdade de Hölder para integrais. O resultado a que nos referimos é o

Teorema de Riesz-Fischer e Fórmula de Parseval. *Uma sucessão de números complexos $(c_n)_{-\infty}^{\infty}$ é a sucessão dos coeficientes de Fourier de uma função $f \in L^2$ se e somente se $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$; e se esta última condição é satisfeita, então*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Introduziremos agora alguns espaços clássicos de funções definidas em intervalos da forma $[-\pi,\pi]$ ou $[0,2\pi]$: *os espaços Lipschitz* α, denotados por Λ_α; o espaço das funções de variação limitada VL e a classe de Zygmund Λ_*. Esses espaços são relevantes em nossa discussão dos coeficientes de Fourier.

Dado $\alpha > 0$, definimos

$$\Lambda_\alpha = \{f / |f(x) - f(y)| \leq \mathbf{C}|x-y|^\alpha \ \ \forall\, x, y\}.$$

onde $\mathbf{C}$ é uma constante que só depende de f e de α. Se C denota o espaço das funções contínuas no intervalo fechado, então é fácil ver que

$$\Lambda_\alpha \subset C \ \ \forall\, \alpha > 0,$$

já que toda função $f \in \Lambda_\alpha$ é uma função uniformemente contínua, e sendo o intervalo de definição limitado, resulta que

$$\Lambda_{\alpha_2} \subset \Lambda_{\alpha_1}$$

se $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$, como o leitor pode verificar. Observamos também que para $\alpha > 1$, Λ_α só contém funções constantes, posto que, pela definição, se $f \in \Lambda_\alpha$ $f'(x) = 0$ para todo x.

Definimos agora o espaço das funções de variação limitada.

$$VL = \left\{ f / \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \infty \right\},$$

onde o supremo é calculado sobre todas as partições do intervalo. Deixamos ao leitor a tarefa de verificar que $\Lambda_1 \subset VL$ e que se $f \in VL$ então f pode ter no máximo um número enumerável de descontinuidades, todas de 1ª espécie, isto é, descontinuidades tipo salto.

Da estimativa (6) segue-se que, para toda função $f \in \Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$,

$$\hat{f}(n) = O(\frac{1}{|n|^\alpha}) \text{ quando } |n| \to \infty,$$

e a correspondente estimativa para $\alpha = 1$ pode ser estendida a VL: se $f \in VL$,

$$\hat{f}(n) = O(\frac{1}{|n|}) \text{ quando } |n| \to \infty.$$

A chamada classe de Zygmund Λ_* define um espaço de funções, intermediário entre os espaços Λ_α, $\alpha < 1$ e Λ_1:

$$\Lambda_* = \{f | \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = 0(1),$$
$$\text{uniformemente em } x \text{ quando } h \to 0^+\}.$$

Geometricamente isto significa que a diferença das inclinações das secantes ao gráfico em cada ponto $(x, f(x))$, que é o membro da esquerda acima, é limitada por uma constante que independe de x quando $h \to 0^+$.

É fácil ver que $\Lambda_1 \subset \Lambda_*$, e pode-se provar que $\Lambda_* \subset \Lambda_\alpha$ onde $0 < \alpha < 1$. Um argumento análogo ao caso de Λ_1 mostra que se $f \in \Lambda_*$, então

$$\hat{f}(n) = O(\frac{1}{|n|}).$$

Um exemplo típico de funções nestes espaços é a chamada função de Weierstrass

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n x),$$

onde $\alpha > 0$ e b é um inteiro > 1. Demonstra-se que $f_\alpha \in \Lambda_\alpha$ se $0 < \alpha < 1$; $f_1 \in \Lambda_*$, mas $f_1 \notin \Lambda_1$.

Por volta de 1870 Weierstrass provou que, para todo α suficientemente pequeno, a função f_α não tem derivada em ponto algum, mas é contínua por causa da convergência uniforme (note que este último fato mostra que a série acima é a série de Fourier de f_α).

O matemático inglês Hardy demonstrou, em 1916, que para qualquer $\alpha \leq 1$, f_α não é derivável em ponto algum [4]; entretanto, se $\alpha > 1$, a série obtida derivando têrmo a têrmo converge uniformemente e, como conseqüência disso, sua soma f'_α é contínua. Quer dizer então que para $0 < \alpha \leq 1$, f_α é contínua em todo o intervalo e não tem derivada em nenhum ponto; e se $\alpha > 1$, f_α tem derivada contínua em todo ponto. Uma repetição do argumento anterior mostra que se α for maior que um inteiro positivo k, então f_α é uma função de classe C^k.

O problema da representação de uma função em série trigonométrica surgiu em meados do século XVIII, em conexão com o estudo das vibrações transversais de uma corda flexível e esticada. Supondo que a corda coincida com o eixo dos x em sua posição de repouso e designando por u (x, y) o desvio de seu ponto de abscissa x no instante t, mostra-se que u satisfaz à chamada equação das ondas, $u_{xx} + c^{-2} u_{tt} = 0$, *onde* $c = \sqrt{T/\rho}$, *T é a tensão na corda e* ρ *é a densidade linear de massa.*

O primeiro estudo significativo do fenômeno das vibrações de uma corda é devido a Jean le Rond d' Alembert (1717-1783) que publicou um trabalho sobre o assunto em 1747, no qual ele obteve a solução geral da equação das ondas na forma $u = f(x+ct)+g(x-ct)$, *onde f e g são funções arbitrárias. Imediatamente Leonhard Euler (1707-1783) também se interessou pelo assunto e publicou sua própria versão do problema. Seguiu-se entre os dois uma polêmica sobre o tipo de funções que poderiam ser admitidas para o perfil inicial da corda. Essa disputa era devida sobretudo à inexistência de um conceito preciso de função e à falta de justificativa para os processos infinitos então usados.*

Em 1753 Daniel Bernoulli (1700-1782) apresentou um novo estudo do problema, exprimindo a solução na forma de superposição de soluções elementares do tipo sen nx.cos nct (estamos supondo a corda de comprimento π*). Bernoulli*

(Continuação na Pág. 52).

Algumas Séries Particulares

Os polinômios trigonométricos

$$(10)\qquad \begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \quad \text{e} \\ \tilde{D}_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx \end{aligned}$$

são chamados os *núcleos de Dirichlet e de Dirichlet conjugado*, respectivamente. Usando identidades trigonométricas conhecidas, não é difícil verificar que

$$D_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}$$

e

$$\tilde{D}_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

Em conseqüência, se $0 < \delta < \pi$, temos, para $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$,

$$(11)\qquad |D_n(x)| \leq \frac{\frac{1}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \leq \mathbf{C}_\delta,$$

onde $\mathbf{C}_\delta$ é uma constante que só depende de δ; analogamente, no mesmo intervalo,

$$(11')\qquad |\tilde{D}_n(x)| \leq \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \leq \mathbf{C}_\delta.$$

(seguimos a prática usual de denotar qualquer constante pela mesma letra $\mathbf{C}$, embora as constantes que aparecem em estimativas distintas sejam diferentes; o índice indica, neste caso, que a constante depende desse parâmetro).

É bom insistir novamente que as estimativas acima são uniformes no intervalo $[\delta, 2\pi - \delta]$ e não dependem de n.

Uma fórmula muito útil para calcular somas finitas é a chamada fórmula de soma por partes:

Se $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ são sucessões numéricas (reais ou complexas) e se denotamos por

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ para } n \geq 0 \text{ e } A_{-1} = 0,$$

então, para todo par de inteiros $q > p \geq -1$, vale a igualdade

$$(12) \qquad \begin{aligned} \sum_{n=p+1}^{q} a_n b_n = A_q b_{q+1} - A_q b_{q+1} - A_p b_{p+1} \\ + \sum_{n=p+1}^{q} A_n(b_n - b_{n+1}), \end{aligned}$$

como o leitor pode verificar. Essa fórmula permite provar fácilmente que qualquer série da forma

$$(13) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

e da forma

$$(14) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx,$$

onde os coeficientes formam sucessões decrescentes e tendendo a zero, são uniformemente convergentes em todo intervalo $[\delta, 2\pi - \delta]$. Portanto, as respectivas somas são funções contínuas em $(0, 2\pi)$. Com efeito, se $b_n \downarrow 0$, tomando $a_n = \operatorname{sen} nx$ e usando as estimativas (11), válidas para todo n, obtemos

$$|A_n| \leq \mathbf{C}_\delta.$$

Daqui e de (12) obtemos

$$|\sum_{p+1}^{q} b_n \operatorname{sen} nx| \leq \mathbf{C}_\delta(b_{q+1} + b_{p+1}),$$

que tende a zero uniformemente no intervalo $[\delta, 2\pi - \delta]$, quando $p, q \to \infty$.

Uma conseqüência imediata do resultado que acabamos de estabelecer é que a série (8) converge em todo o intervalo $[0, 2\pi]$, uniformemente em subintervalos $[\delta, 2\pi - \delta]$.

As séries trigonométricas de senos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx.$$

com coeficientes reais $b_n \downarrow 0$, possuem várias propriedades. Mencionemos as mais conhecidas:

(15) A série converge uniformemente em $[0, 2\pi]$ se e somente se $\lim_{n\to\infty} nb_n = 0$.

(16) A série é a série de Fourier de uma função contínua se e somente se $\lim_{n\to\infty} nb_n = 0$.

(17) A série é a série de Fourier de uma função limitada f (escrevemos $f \in L^\infty(0, 2\pi)$) se $nb_n = O(1)$ para $n \to \infty$.

(18) Se a série converge pontualmente em todo o intervalo para uma função f, então $f \in L^1$ se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} < \infty$.

Uma conseqüência imediata de (18) é que a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{\log n},$$

embora convirja para uma função f, contínua em $(0,2\pi)$, não é série de Fourier, pois $f \notin L^1$ visto que $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\log n} = \infty$.

Vale a pena incluir aquí uma rápida idéia da demonstração de que $f \in L^1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} < \infty$. Seja $f \in L^1$ e

$$(19) \qquad S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

a série de Fourier de f. Então a série obtida integrando têrmo a têrmo converge uniformente (veja (c) abaixo):

$$(20) \qquad F(x) - \frac{a_0}{2}x = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-b_n \cos nx + a_n \operatorname{sen} nx)}{n},$$

onde $F(x)$ é uma integral indefinida de f e C é a constante de integração correspondente. Observemos que a convergência uniforme em (20) independe totalmente do fato de ser a série (19) convergente ou não. Isto é conseqüência do teste de Dirichlet, que enunciamos a seguir, e que é talvez o teste de convergência pontual mais conhecido da teoria das séries de Fourier:

Teste de Dirichlet. *Se f é de variação limitada, temos:*
(a) *$S[f]$ converge para f em todo ponto de continuidade de f;*
(b) *Se f é descontínua em x_0, $S[f]$ converge para $\frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)]$;*
(c) *Se f é contínua em todo um intervalo I, $S[f]$ converge uniformemente para f em I.*

Veja uma demonstração em [8].

Sendo F uma integral indefinida, F resulta ser de variação limitada e contínua. Além disso, não é difícil verificar que a série em (20) é exatamente $S\left[F - \frac{a_0}{2}x\right]$. Em vista deste resultado e colocando $x = 0$ em (20) obtemos a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$.

Voltando ao exemplo (8), mencionado acima, é possível provar que a soma f dessa série tem o mesmo comportamento que a função $\frac{1}{x \log x}$ para $x \to 0^+$, o que confirma a não integrabilidade de f numa vizinhança de zero.

Para as séries trigonométricas de cossenos,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

temos o seguinte resultado:

(21) Se $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tende a zero e é convexa (conforme definição abaixo), a série converge em todo ponto (com exceção possivelmente dos pontos $x \equiv 0 \mod 2\pi$) para uma função integrável $f \geq 0$, e a série de cossenos é a série de Fourier de f.

Definição: Uma sucessão de números reais $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é convexa se

$$a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Exemplos de sucessões convexas são obtidos tomando $a_n = \varphi(n)$ onde φ é uma função real convexa.

A propriedade (21) fornece uma prova simples do fato de que os coeficientes de Fourier de funções integráveis podem tender a zero de modo arbitariamente lento. Com efeito, dada qualquer sucessão de números reais $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ com $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, tendendo a zero tão lentamente quanto desejarmos, sempre podemos construir (geométricamente, por exemplo) uma outra sucessão $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ seja convexa, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $a_n \geq c_n$ $\forall\, n \geq 1$. A propriedade (21) assegura que $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ é a série de Fourier de uma função integrável.

Exemplos

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx.$

Pelo lema de Riemann-Lebesgue, não pode ser uma série de Fourier e também não converge pontualmente para nenhum x: se convergisse para $x = x_0$ deveríamos ter

$$\lim_{n\to\infty} \cos nx_0 = 0;$$

mas, como conseqüência das identidades

$$\operatorname{sen}^2 nx_0 = 1 - \cos^2 nx_0$$

e

$$\operatorname{sen}^2 nx_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx_0),$$

teríamos $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}^2 nx_0 = 1$ e $\frac{1}{2}$.

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} nx.$

Novamente o lema de Riemann-Lebesgue mostra que a série não é de Fourier; além disso, a série só converge para $x \equiv 0 \mod \pi$, pois de $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} nx_0 = 0$ para algum x_0, da identidade

$$\operatorname{sen}(n+1)x_0 - \operatorname{sen}(n-1)x_0 = 2 \operatorname{sen} x_0 \cos nx_0$$

teríamos que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} x_0 \cos nx_0 = 0$, logo pelo exemplo anterior $\operatorname{sen} x_0 = 0$ e então $x_0 \equiv 0 \mod \pi$.

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$

A série é a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x), & 0 < x < 2\pi \\ 0, & x = 0, 2\pi. \end{cases}$$

A convergência não é uniforme no intervalo, pois f não é contínua.

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$

A série é a série de Fourier da função

$$f(x) = -\log\left|2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right| \quad 0 < x < 2\pi.$$

Neste caso $S[f]$ diverge nos extremos $x = 0,\ 2\pi$.

v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}.$

Sendo $\left\{\frac{1}{\log n}\right\}$ uma sucessão convexa e que tende a zero, (21) assegura que a série converge em todo ponto $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$ para uma função $f \geq 0$, integrável e contínua em $(0, 2\pi)$, e a série acima é exatamente $S[f]$. Para $x \to 0^+$, f tem o mesmo comportamento da função $\frac{\pi}{2}\frac{1}{x}\log^{-2}(\frac{1}{x})$.

vi) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \log n}.$

Neste exemplo valem as mesmas conclusões do caso anterior; vemos também que a série diverge nos extremos 0 e 2π.

vii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n \log n}.$

Esta série é a série de Fourier de uma função contínua em $[0, 2\pi]$, como conseqüência de (16).

Este último exemplo ilustra um aspecto interessante da convergência das séries de funções: não é difícil construir exemplos de séries convergentes em todo um intervalo finito para uma função contínua e integrável, onde a convergência é absoluta mas não uniforme no intervalo; a série vii) fornece um exemplo de uma série de Fourier uniformemente convergente que diverge absolutamente em todo $x \not\equiv 0 \mod \pi$. Com efeito, se

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} nx|}{n \log n}$$

fosse convergente para algum $x_0 \not\equiv 0 \mod \pi$, então a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 nx_0}{n \log n}$$

seria convergente, pois $\operatorname{sen}^2 nx_0 \leq |\operatorname{sen} nx_0|$, mas sendo $2\operatorname{sen}^2 nx_0 = 1 - \cos 2nx_0$ e levando em consideração que pelo exemplo vi), a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2nx_0}{n \log n}$$

converge, a convergência da série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 - \cos 2nx_0}{n \log n}$ implicaria na convergência de $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$, o que é falso.

viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Neste caso, uma aplicação de (18) mostra que a série converge para uma função $f \in L^1$ e que ela é $S[f]$. Além disso, o comportamento da f perto de 0 pode ser precisado: f é equivalente à função $C_\alpha x^{\alpha-1}$ para $x \to 0^+$, onde C_α é uma constante que só depende de α.

ix) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

De acordo com (21) a série acima é a série de Fourier de uma função integrável não negativa. O comportamento para $x \to 0^+$ é semelhante àquele do exemplo anterior.

A convergência pontual e os métodos de somabilidade

O problema da convergência é um dos aspectos básicos da teoria, principalmente porque a representação de funções em têrmos de senos e cossenos fornece um método importante na análise de diversos problemas da Física Matemática. Historicamente, os problemas clássicos da corda vibrante e condução do calor motivaram e impulsionaram o estudo deste problema.

O problema principal que formulamos é o seguinte: para quais funções f vale a igualdade $f(x) = S[f](x)$ pontualmente?

O teste de Dirichlet já mencionado antes, afirma que se f é de variação limitada, $S[f]$ converge para f em cada ponto de continuidade de f. Um outro teste importante e talvez o mais útil da teoria é o

Teste de Dini: *Se $f \in L^1$ e*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x) - f(x-t)}{t} \right| dt < \infty$$

em um ponto x, então $S[f]$ converge a f no ponto x.

Como conseqüência podemos observar que se f é derivável num ponto x, então $\left|\frac{f(x)-f(x-t)}{t}\right|$ é limitada para todo t numa vizinhança de zero e então a condição acima é verificada; isto prova que $S[f]$ converge para f em cada ponto onde f é derivável.

Que acontece, por exemplo, se f for contínua, não tendo derivada em nenhum ponto nem sendo de variação limitada? Ainda há resultados positivos; Se $f \in \Lambda_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$,

$$S_n(f)(x) - f(x) = O(\frac{\log n}{n})$$

para $n \to \infty$, o que mostra que $S[f]$ converge uniformemente a f em todo o intervalo; em particular, vale a afirmação para a função de Weierstrass f_α.

Neste ponto, queremos chamar a atenção para um outro aspecto da convergência: é claro que a convergência ou divergência da série de Fourier $S[f]$ depende dos coeficientes $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}$; estes, por sua vez, dependem da estrutura global da função f em todo o intervalo, como mostram as fórmulas (5). Isto nos levaria naturalmente a esperar que a estrutura global de f é que determina se $S[f]$ converge ou não. Mas isto não é assim, já que, na realidade, a convergência ou divergência de $S[f]$ em um ponto x_0, só depende do comportamento de f numa vizinhança arbitrariamente pequena do ponto x_0; este é precisamente o conteúdo do chamado

Princípio de Localização de Riemann. *Se $f \in L^1$, para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeno,*

$$S_n(f)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)\frac{\text{sen } nt}{t}dt + \epsilon_\delta,$$

onde o "erro" ϵ_δ tende a zero uniformemente em todo o intervalo quando $n \to \infty$; mais precisamente

$$0 \leq \epsilon_\delta \leq \frac{C}{\delta}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+\frac{\pi}{n})|dx,$$

onde **C** *é uma constante absoluta.*

Fourier, em sua famosa teoria Analítica do Calor [3], anunciou que toda função pode ser representada por sua série de Fourier no sentido da convergência pontual; a justificativa de tal afirmação foi dada no curso de um longo e complicado argumento para deduzir a forma dos coeficientes de Fourier de uma dada função.

Seu raciocínio ao longo desse trabalho mostra claramente o uso de propriedades de duvidosa validade, várias delas falsas. Isto, de certo modo, descreve o espírito daquela época, de atribuir validade a conclusões obtidas a partir de manipulações analíticas puramente formais, embora muito engenhosas.

A afirmação de Fourier, sobre a validade da representação pontual de f por $S[f]$, é falsa e podemos citar os seguintes exemplos: em 1876 du Bóis-Reymond deu o primeiro exemplo de uma função contínua f, cuja série de Fourier diverge em um ponto. Posteriormente, demonstrou-se que dado qualquer conjunto enumerável $E \subset [0, 2\pi]$, existe uma função contínua cuja série de Fourier diverge em E e converge no complemento E^c. Em 1923 A. N. Kolmogorov [**10**], definiu uma função $f \in L^1$ cuja série de Fourier diverge quase sempre (uma propriedade é satisfeita q.s., ou quase sempre se o complemento do conjunto onde ela é verdadeira tem medida nula). Três anos mais tarde, Kolmogorov [**11**] define uma função $f \in L^1$ cuja série de Fourier diverge em todo ponto. Em 1964 Kahane e Katznelson [**9**] mostram que dado qualquer conjunto E de medida nula, existe uma função f contínua cuja série de Fourier diverge precisamente em E. Notemos aqui que se modificarmos os valores de uma função $f \in L^1$ em um subconjunto de medida nula de $[-\pi, \pi]$, os coeficientes de Fourier da nova função coincidem com os de f e, portanto, a série de Fourier permanece inalterada. Em conseqüência, o problema da representação deve ser reformulado assim:

" Para quais $f \in L^1$, $S[f]$ converge a f q.s.? "

O último exemplo de Kolmogorov mostra, por um lado, que o problema da representação não tem solução no contexto da convergência pontual q.s. para o espaço L^1, e, por outro lado, coloca em destaque a importância dos métodos de somabilidade. Os dois métodos mais significativos na teoria das séries de Fourier são os de Cesàro ou das médias aritméticas de 1ªordem e o método de

Abel-Poisson. A descrição que faremos a seguir é válida para toda série numérica, embora só consideremos o caso especial das séries trigonométricas.

Método das médias aritméticas. Dada uma série de Fourier

$$S[f] = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

cujas somas parciais simétricas são $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$, dizemos que $S[f]$ é *somável Cesàro* à soma (ou limite) s no ponto x, se a seguinte sucessão converge para s quando $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}\sigma_n(f)(x) &= \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|) c_k e^{ikx}\end{aligned}$$

$$\sigma_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_k e^{ikx}$$

Método de Abel-Poisson. A mesma série $S[f]$ é *somável Abel* à soma (ou limite) s no ponto x se

$$A_r(f)(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{inx} \qquad 0 \leq r < 1,$$

tem limite s quando $r \uparrow 1$.

Não é difícil provar que se a série $S[f]$ converge para s, então ela é somável a s pelos dois métodos; a recíproca é falsa, em geral. Usando uma relação que liga os têrmos correspondentes a ambos os métodos de somabilidade, demonstra-se que toda série somável para s pelo método de Cesàro é somável Abel a s. A somabilidade de séries devolve uma certa ordem ao panorama da convergência, como mostra o seguinte resultado:

Teorema: *Se $f \in L^1$, então $S[f]$ é somável com soma f q.s. pelos dois métodos de somabilidade. Se f for contínua, então $\sigma_n(f)$ e $A_r(f)$ convergem para f uniformemente em todo o intervalo.*

O problema da diferenciação de séries também tem uma solução elegante em têrmos da somabilidade:

Teorema: *Se $f \in L^1$ tem derivada de ordem m em um ponto x_0, a série obtida derivando $S[f]$ têrmo a têrmo m vezes é somável com soma $f^{(m)}(x_0)$ pelo método de Abel.*

Notemos que o teorema anterior não afirma que as séries obtidas derivando $S[f]$ têrmo a têrmo sejam as séries de Fourier das respectivas derivadas f', f'', ... : como exemplo observemos que para todo x em $(-\pi, \pi)$ temos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \text{ sen } nx$$

pontualmente em todo o intervalo $(-\pi, \pi)$; e derivando duas vezes têrmo a têrmo obtemos primeiro a série

(a) $$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \cos nx$$

e depois

(b) $$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} 2n(-1)^n \text{ sen } nx.$$

Nem (a) nem (b) são séries de Fourier. Entretanto, ambas são somáveis com somas 1 e 0, respectivamente, em $(-\pi, \pi)$, pelo método de Abel.

A conjectura de Lusin

Para simplificar notações supomos que todas as funções são reais; neste caso e por causa da fórmula de Parseval, se

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \text{ sen } nx),$$

então $f \in L^2$ se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) < \infty$. O chamado teste de Weyl para uma seqüência $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ que não é monótona decrescente consiste em provar que se

(22) $$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\lambda_n < \infty,$$

a série de Fourier converge q.s. para f. Fixemos nossa atenção apenas nas seqüências $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ monótonas crescentes tendendo a ∞.

Notamos que a condição (22) acima implica que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) < \infty$, já que, a partir de um n, $\lambda_n > 1$; portanto, a coleção das funções f cujos coeficientes satisfazem (22) está contida em L^2. Ao mesmo tempo observamos que se $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma outra seqüência crescente tendendo a ∞ e tal que $\mu_n \leq \lambda_n$ a partir de um n_0, então

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\mu_n$$

será convergente se a série (22) converge, o que mostra que o conjunto de funções de L^2 para as quais (22) converge será maior à medida que a correspondente seqüência (λ_n) de coeficientes cresça mais lentamente.

Em 1906 Pierre Fatou mostrou que $\lambda_n = n$ satisfazia o teste de Weyl [**2**], e o próprio H. Weyl, em 1909, provou que se podia tomar $\lambda_n = n^{\frac{1}{3}}$ [**17**]. Em 1913 três matemáticos melhoraram o teste; E. W. Hobson demonstrou que valia para $\lambda_n = n^{\epsilon}\ \forall\ \epsilon > 0$ [**6**], M. Plancherel conseguiu provar que se podia tomar $\lambda_n = \log^3 n$ [**15**] e G. H. Hardy provou o teste para $\lambda_n = \log^2 n$ [**5**].

Esse era o estado do problema da convergência quando o matemático russo N. Lusin anunciou em 1913 sua famosa conjectura [**14**]:

Para toda $f \in L^2$, $S[f]$ converge para f q.s.

Lusin descobriu uma condição necessária e suficiente para que $S[f]$ seja convergente q.s. e que pode ser descrita assim:

Se $f \in L^2$ e

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

então, pelo teorema de Riesz-Fischer, existe $g \in L^2$ tal que

$$S[g] = \sum_{n=1}^{\infty}(-b_n \cos nx + a_n \operatorname{sen} nx).$$

Daí ele conclui que a soma parcial n-ésima pode ser escrita na forma

$$S_n(f)(x) =$$

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\epsilon\leq|t|\leq\pi} g(x+t)\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}-\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\right\}dt \tag{23}$$

e mostrou, usando o fato de que $S[f]$ é somável Abel com soma f q.s., que

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon\leq|t|\leq\pi}\frac{g(x+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt = f(x) \quad \text{q.s.} \tag{24}$$

Em conseqüência disso, $\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x)$ q.s. se e somente se

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon\leq|t|\leq\pi} g(x+t)\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}dt = 0 \text{ q.s.} \tag{25}$$

Segundo Lusin, [**14**], " é muito provável que a condição acima seja satisfeita para todas as funções de L^2", já que ele sabia que existem funções g em L^2, contínuas, para as quais

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon\leq|t|\leq\pi}\left|\frac{g(x+t)}{t}\right|dt = \infty$$

em um conjunto de pontos x de medida positiva, enquanto que (24) mostra que

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon\leq|t|\leq\pi}\frac{g(x+t)}{t}dt \text{ existe q.s.}$$

A existência deste último limite deve então ser devido a cancelamentos de valores positivos e negativos da função $\frac{g(x+t)}{t}$ no intervalo $(0,\pi)$.

Lusin conjecturou que estes cancelamentos são os responsáveis pela validade de (25) e portanto pela convergência q.s. das séries de Fourier de funções de L^2.

Posteriormente, em 1925, os matemáticos russos A. N. Kolmogorov e G. Seliverstov [**12**], [**13**], e independentemente A. Plessner

[16], mostraram que o teste de Weyl era satisfeito por $\lambda_n = \log n$ e até 1966 foi o melhor resultado na direção da conjectura de Lusin.

Finalmente, nesse ano de 1966, L. Carleson publicou o seu famoso artigo em Acta [1], provando positivamente a conjectura de Lusin. A prova dessa conjectura talvez possa ser considerada um dos teoremas de convergência mais profundos já demonstrados em Análise.

Dois anos mais tarde, R. Hunt [7], estendeu o teorema de Carleson a todos os espaços $L^p(-\pi,\pi) = \left\{ f / \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p dx < \infty \right\}$: *Para toda* $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, $S[f]$ *converge a* f *q.s.*

Bibliografia

1. Carleson, L., *On the convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta. Math. **116** (1966), 135–157.
2. Fatou, P., *Séries trigonométriques*, Acta Math. **30** (1906), 335-400.
3. Fourier, J. B., "The Analytical Theory of Heat," Dover, 1955.
4. Hardy, G.H., *Weirstrass non-differentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), 301-325.
5. Hardy, G.H., *On the summability of Fourier series*, Proc. London Math. Soc. **12** (1913), 365-372.
6. Hobson, E. W., *On the convergence of series of orthogonal functions*, Proc. Longon Math. Soc. **12** (1913), 297-308.
7. Hunt, R., *On the convergence of Fourier series*, Proc. of Conference at So. Ill. Univ. (1967), 235-256.
8. Iorio, V., *Séries de Fourier*, Mat. Univ. **3** (1986), 92-111.
9. Kahane, J. P.; Katznelson, Y., *Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques*, Studia Math. **26** (1966), 305-306.
10. Kolmogorov, A. N., *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout*, Fund. Math. **4** (1923), 324-328.
11. Kolmogorov, A.N., *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout*, Comptes Rendus **183** (1926), 1327-1328.
12. Kolmogorov, A.N., Seliverstov, G., *Sur la convergence des séries de Fourier*, Comptes Rendus **178** (1925), 303-305.
13. Kolmogorov, A.N., Seliverstov, G., *Sur la convergence des séries de Fourier*, Acc. Lincei (1926), 307-310.
14. Lusin, N., *Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier*, Comptes Rendus **156** (1913), 1655-1658.
15. Plancherel, M., *Sur la convergence des séries des fonctions orthogonales*, Comptes Rendus **157** (1913), 539-541.
16. Plessner, A., *Über die Konvergenz von trigonometrische Reihen*, Journal Reine Matematik **155** (1926), 15-25.
17. Weyl, H., *Über die Konvergenz von Reihen die Orthogonal funktionem fortschreiten*, Math. Annalen **67** (1909), 225-245.

18. Zygmund, A., "Trigonometric Series," 2^{nd} edition, Camb. Univ. Press, 1977.

---

admitiu mesmo a possibilidade de soluções obtidas pela superposição de infinitos termos elementares,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx . \cos nct.$$

Seria então possível determinar os coeficientes a_n de forma a ajustá-los a qualquer perfil inicial f(x)? Vale dizer, de tal sorte que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx.$$

Bernoulli acreditava nessa possibilidade, mas não havia em sua época os recursos para prová-la satisfatoriamente.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) foi outro eminente matemático que também estudou a equação das ondas, obtendo a solução na forma de uma série mais geral ainda que a de Bernoulli. Mas Lagrange sequer acreditava na possibilidade de exprimir uma função arbitraria em série trigonométrica.

A questão assim permaneceu durante meio século, até que fosse retomada por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que revelou muita competência e habilidade matemáticas, embora vivesse sempre bastante ocupado com tarefas administrativas. Seus estudos sobre propagação do calor, desenvolvidos ao longo de duas décadas, culminaram na publicação de seu livro em 1822 (Théorie analytique de la chaleur), onde ele não somente retoma a questão primeiramente levantada por Bernoulli sobre o desenvolvimento de uma função arbitrária em série trigonométrica, como procura estabelecer essa possibilidade. Todavia, caberia a Peter Lejeune Dirichlet (1805-1857), em 1829, dar a primeira demonstração completa dessa teorema. (Veja, p. ex., I. Grattan-Guinness, The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann).