

Fundamentos Matemáticos da Tomografia Computadorizada: Métodos de Transformação

Alvaro R. De Pierro

Instituto de Matemática - UNICAMP
Caixa Postal 6065
13081 - Campinas, SP

1. Introdução.

Quantas vezes, desde a descoberta da capacidade dos raios X para atravessar objetos, o homem se perguntou sobre a possibilidade de descrever exatamente o que tem dentro do corpo vivo sem danificar os tecidos? Quantas vezes se fez a mesma pergunta quando precisou "ver" por dentro a estrutura da crosta da terra na procura de novos minerais? Ou quando precisou reconstruir a estrutura de algum material sem destruí-lo?

Desde a década de 50, a união com a Matemática dos avanços tecnológicos para detectar com precisão fons e ondas de diferentes tipos, tornaram esta capacidade de "ver" dentro dos objetos uma realidade cada dia mais concreta. O problema da reconstrução de imagens a partir de projeções apareceu independentemente em diversas áreas de aplicação e na maioria dos casos muitos anos se passaram até se concluir que o problema matemático subjacente era comum a todas elas. Como casos importantes podemos mencionar: o cálculo da estrutura da coroa solar (vide [1]), a estimativa da distribuição de radionucléidos no interior do corpo humano (vide [2]) para estudar certos processos fisiológicos e a reconstrução da estrutura tridimensional de uma bactéria a partir de seções bidimensionais (vide [3]).

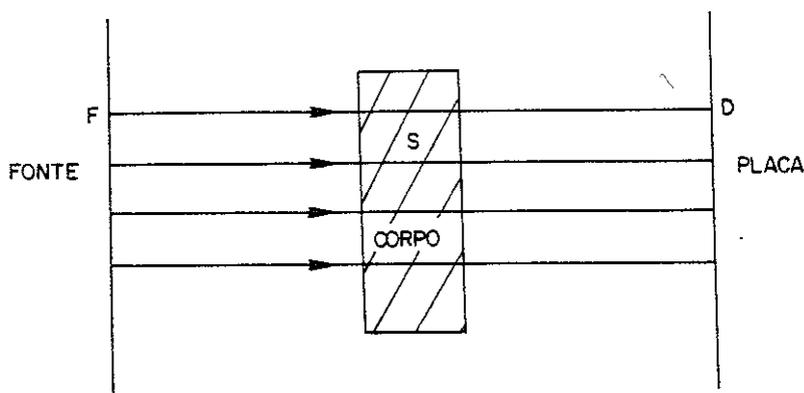


Figura 1.

De todas as aplicações, possivelmente a mais importante e que tem revolucionado a área do diagnóstico na medicina é a tomografia de transmissão de raios X ou CT . Existem outros tipos de tomografia como a de ressonância magnética nuclear, ultrassom, etc. que não trataremos neste artigo. Mais informações sobre estas técnicas podem ser encontradas por exemplo em [4]. Antes de descrever o modelo matemático da tomografia propriamente dita analisaremos primeiro os princípios básicos da radiografia convencional. Neste caso, temos uma fonte de raios X , o corpo, e uma placa sensível que registra a quantidade de radiação que conseguiu atravessar os tecidos sem ser absorvida (Figura 1). Tons mais claros indicam muita absorção (osso), mais obscuros pouca absorção (músculo, tecido nervoso). Suponha, para simplificar, que a fonte é pontual (F), o raio é uma reta e no lugar de uma placa sensível há um contador de ftons (D).

Muitos ftons detectados em D significa que poucos foram absorvidos e portanto o tecido era pouco denso na trajetória do raio e, vice-versa, poucos ftons detectados indicam tecido muito denso. É claro que a diferença entre os ftons que saíram de F e aqueles que foram detectados em D fornece informação sobre a densidade do tecido no segmento S determinado pela reta FD e o corpo, mas é igualmente claro que isto não é suficiente para descrever a densidade no interior de S . Podemos dizer que o segmento S do corpo é projetado sobre D ao longo da reta FD . A radiografia

é uma projeção do corpo sobre a placa na direção determinada pela fonte de raios X . A pergunta imediata que surge é se, considerando projeções em muitas direções diferentes, é possível reconstruir as características de densidade do tecido para cada ponto ou pequena região no interior do corpo. A resposta nos leva ao modelo da tomografia e por razões técnicas óbvias (a mudança de direção) devemos nos restringir a um plano, ou corte (tomos significa "corte" em grego) do corpo. A incógnita agora é uma função f a valores reais, definida num subconjunto Ω do plano \mathbf{R}^2 , que representa a propriedade do tecido que chamaremos "coeficiente linear de atenuação" (ou simplesmente "atenuação"). Se considerarmos a reta L , determinada pelo par fonte-detector (Figura 2), é possível provar que sob determinadas condições a variação relativa da intensidade I (fotons absorvidos/fotons emitidos) em cada intervalo é proporcional à atenuação multiplicada pelo tamanho do intervalo, ou seja

$$\frac{\Delta I}{I} = f(s)\Delta s;$$

integrando ao longo da reta resulta

$$\log \frac{I_D}{I_F} = \int_L f(s)ds, \quad (1)$$

onde I_D e I_F representam o número de fotons detectados em D e emitidos em F respectivamente.

De (1) deduzimos que o problema teórico que devemos resolver é: recuperar f conhecido o valor de todas as integrais da linha, na prática apenas um número finito mas muito grande. Para o desenvolvimento matemático podemos considerar f com suporte compacto (zero fora de um conjunto limitado e fechado) e de quadrado integrável. Discutiremos nas próximas seções o caminho mais usado para resolver este problema.

2. A Transformada de Radon e sua Inversa.

Coloquemos o problema definido por (1) em termos matemáticos mais precisos. Como já foi dito, f será uma função de duas variáveis (x, y) com suporte Ω contido num quadrado centrado na origem. Em coordenadas polares, $f(r, \phi) = 0$ para todo $r \geq E$ para algum $E > 0$, ou, equivalentemente $f(x, y) = 0$ se $|x|$

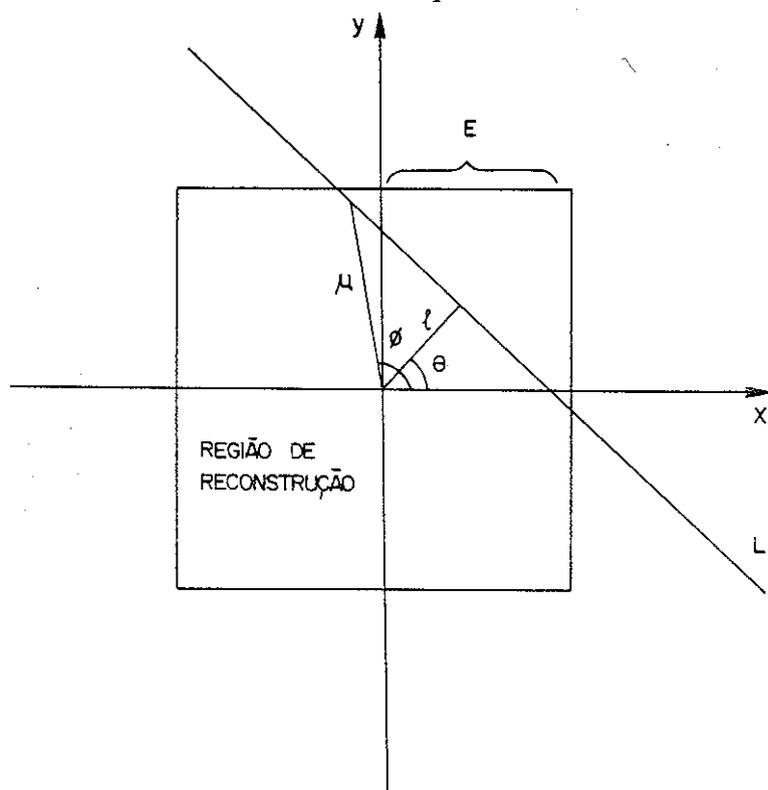


Figura 2.

ou $|y|$ é maior ou igual que $\frac{\sqrt{2}}{2} E$. Se parametrizamos as retas L do plano (x, y) , usando a distância ℓ à origem e o ângulo θ com o eixo x como na Figura 2, definimos a transformada de Radon de f como a seguinte função de (ℓ, θ) :

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{R}f](\ell, \theta) &= \\
 &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\sqrt{\ell^2 + z^2}, \theta + \arctg\left(\frac{z}{\ell}\right)\right) dz & \text{se } \ell \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(z, \theta + \pi/2) dz & \text{se } \ell = 0 \end{cases} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Em 1917 J. Radon provou que com condições razoáveis sobre f , vale que

$$f(r, \phi) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\mathcal{D}_1 \mathcal{R}f](\ell, \theta)}{\ell - r \cos(\theta - \phi)} d\ell d\theta, \quad (3)$$

onde \mathcal{D}_1 denota a derivada parcial com relação à primeira variável (no sentido das distribuições) e a integral interior no caso que nos ocupa será entre $-E$ e E , já que as integrais de f se anulam para retas que não interceptam o quadrado que chamamos de região de reconstrução. O artigo original de Radon com a demonstração de (3) pode ser encontrado em [5].

A existência de uma fórmula fechada como (3) pareceria resolver completamente o problema da tomografia mas isto está longe de ser verdadeiro por vários motivos. Em primeiro lugar não conhecemos $[\mathcal{R}f](\ell, \theta)$ para todo (ℓ, θ) , mas apenas para um número finito de valores; segundo, ainda que tivéssemos os valores de todas as integrais de linha de f , a integral singular em (3) somente pode ser calculada em forma aproximada, e, finalmente devemos considerar o fato de que o problema (1) é mal posto no sentido que ilustraremos na próxima seção.

3. A Indeterminação de f .

A primeira pergunta que um matemático se faz quando analisa um problema como (1) é se este tem solução. Se provada a existência, a segunda pergunta é se a solução é única ou não e, finalmente, a pergunta fundamental do ponto de vista das aplicações é relacionada com a estabilidade; na presença de erro nos dados, quanto pode variar a solução, e como? Se pequenas perturbações nos dados produzem grandes variações da solução estamos na presença de um problema mal posto ou mal condicionado e o conceito de solução deve ser redefinido ou tratado mais cuidadosamente. Este é o caso da reconstrução de imagens a partir de projeções e de muitos outros problemas, em geral associados com novas tecnologias, como por exemplo, a tomografia sísmica, a visão computacional e o sensoriamento remoto, conhecidos também como problemas inversos [6]. No caso que nos ocupa, suponha que temos k pontos no plano (r, ϕ) da Figura 2, (v_k, ϕ_k) para $k = 1, \dots, K$ e M ângulos $m\Delta$ para $m = 0, \dots, M - 1$, sendo $\Delta = \pi/M$. Definimos

então a função d (para $0 < \delta < E/\sqrt{2}$)

$$d(r, \phi) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{\pi r}{\delta}) \sin(\phi M)}{\delta}, & \text{se } 0 \leq r \leq \delta, \\ 0 & \text{se } r > \delta. \end{cases} \quad (4)$$

É fácil verificar que

$$[\mathcal{R}d](\ell, m\Delta) = 0 \quad (5)$$

e

$$d\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2M}\right) = 1. \quad (6)$$

Usando (5) e (6) é possível construir uma função g tal que a transformada de Radon de g nos pontos $(\ell, m\Delta)$ é nula e

$$g(r_k, \phi_k) = c_k \quad k = 1, \dots, K, \quad (7)$$

onde os c_k são valores arbitrários. Em outras palavras, se uma função f tem projeções conhecidas para um número finito de ângulos, $f + g$ tem as mesmas projeções e valores arbitrários nos pontos (r_k, ϕ_k) . Ou seja, conhecidas todas as integrais de linha para um número finito de ângulos θ não somente não determinam a f mas aparentemente não determinam nada.

A situação pareceria pior ainda se considerarmos o seguinte resultado devido a D. Solmon [7]:

Seja $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, C um compacto no interior do suporte de f_0 e $\theta_1, \dots, \theta_M$ um número finito de direções. Então existe uma outra função f infinitamente diferenciável com os mesmos valores de $\mathcal{R}f$ para as direções dadas e completamente arbitrária em C . (Teorema 1.8).

Apesar dos resultados anteriores, as reconstruções tomográficas obtidas podem ser muito boas e úteis para o diagnóstico clínico. A explicação disto começa por uma observação com relação ao exemplo (4). Se o número M de ângulos é muito grande, a função g tem período muito pequeno e portanto frequência muito alta. Por outra parte as funções com transformada de Radon nula para finitos ângulos necessariamente só têm altas frequências (vide [8]). Portanto, se eliminarmos este tipo de funções do conjunto viável (soluções permitidas) a indeterminação desaparece. É claro que quantas mais projeções sejam calculadas melhor será a reconstrução.

4. Os Métodos.

Uma vez definido o problema matemático e seus inconvenientes faremos uma introdução aos diferentes métodos para resolvê-lo.

Dois caminhos existem para calcular uma solução de (1). O primeiro é discretizar a transformada de Radon, ou seja, aproximar as integrais de linha e calcular uma solução do "sistema linear" resultante usando algum método iterativo. Este foi o caminho tentado nos primeiros tempos da tomografia, mas está hoje limitado a situações muito particulares (dados incompletos, ângulo limitado) que não trataremos aqui (vide [9] e [10]). O outro caminho, que produz as melhores reconstruções nas situações normais, é partir da fórmula analítica para a inversa da transformada de Radon e aproximá-la de alguma forma; estes são os chamados métodos de transformação. Uma visão razoavelmente extensa sobre este tipo de métodos pode ser encontrada em [11]. Concentrar-nos-emos apenas num deles, o mais usado e aceito como mais eficiente.

5. Convolução-retroprojeção.

Todos os métodos de transformação para calcular a inversa da transformada de Radon podem ser deduzidos do chamado teorema de projeção expresso na igualdade

$$\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{F}_1, \quad (8)$$

ou seja, a transformada inversa de Radon é a composição de uma transformada de Fourier, \mathcal{F}_1 , na primeira variável ℓ e uma transformada inversa de Fourier, \mathcal{F}_2^{-1} , bidimensional. A demonstração deste resultado é muito simples e segue da aplicação de uma mudança de variáveis e do teorema de Fubini (vide [8]).

Se chamamos $p(\ell, \theta)$ a $[\mathcal{R}f](\ell, \theta)$ e aplicamos (8) temos que

$$f(r, \phi) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\rho| [\mathcal{F}_{1p}](\rho, \theta) \exp(2\pi i r \rho \cos(\theta - \phi)) d\rho d\theta. \quad (9)$$

A integral interna em (9) é a transformada de Fourier inversa do produto $|\rho| [\mathcal{F}_{1p}]$ na variável ρ , portanto poderíamos usar o teorema de convolução que diz que a transformada de Fourier do produto de convolução de duas funções (lembrar que $(\ell * h)(x) =$

$\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x-t)h(t)dt$ é o produto de convolução de ℓ e h) é o produto das transformadas de Fourier dessas funções, ou, formalmente

$$\mathcal{F}_1^{-1}(|\rho|[\mathcal{F}_{1p}]) = \mathcal{F}^{-1}(|\rho|) * p. \quad (10)$$

Lamentavelmente $\mathcal{F}^{-1}(|\rho|)$ não existe, logo devemos substituir o membro direito de (10) por uma aproximação, ou seja

$$\mathcal{F}_1^{-1}(|\rho| \mathcal{F}_{1p}) = \lim_{A \rightarrow \infty} q_A * p, \quad (11)$$

onde $q_A = \mathcal{F}_1^{-1}(|\rho| F_A(\rho))$. F_A é uma função apropriada, chamada janela (serve para "ver" a função) com comprimento de banda A . Um exemplo simples de janela é

$$F_A(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\rho| \leq A/2 \\ 0 & \text{se } |\rho| > A/2. \end{cases} \quad (12)$$

Se, para uma função \tilde{p} de duas variáveis, definimos o operador de retroprojeção

$$[\mathcal{R}^* \tilde{p}](r, \phi) = \int_0^\pi \tilde{p}(r \cos(\theta - \phi), \theta) d\theta, \quad (13)$$

de (9), (11) e (13) deduzimos que

$$f(r, \theta) \cong \mathcal{R}^*(q_A * p), \quad (14)$$

que é a formulação contínua do método de convolução-retroprojeção.

A escolha da janela F_A depende de uma análise que inclui fatores como: o erro nos dados e o erro nas aproximações que devem ser feitas para calcular (14). Essencialmente F_A pode ser pensada como um filtro que não deixa passar as variações em f mencionadas na seção anterior, provocadas pelas perturbações nos dados e nos cálculos intermediários. (Para uma discussão detalhada sobre esta escolha vide [12]).

Para calcular (14) na prática, é claro que precisamos aproximar as integrais tanto da convolução (11) como da retroprojeção (14). Esta aproximação dependerá da forma como os dados são

coletados, o que, na linguagem das pessoas que trabalham na área chama-se de *modo de varredura* (scanning mode) ou geometria da recoleção de dados. Existem muitos tipos possíveis de geometrias para recoleção de dados em tomografia médica. Por ser a forma mais simples e aparentemente a mais natural para a parametrização escolhida na nossa definição da transformada de Radon, embora não a mais rápida, consideraremos a geometria de raios paralelos. Este tipo de recoleção de dados em tomografia foi também o usado nas primeiras máquinas até ser substituído pela geometria de raios divergentes (fan beam) consideravelmente mais rápida.

6. Convolução-retroprojeção para raios paralelos.

Esta forma de coleta de dados consiste num arranjo de emissores-detectores em paralelo, tal como indica a Figura 3, que gira em torno do centro, tomando medições para vários ângulos. Suponha então que são calculadas $2N - 1$ projeções paralelas separadas por uma distância d para M ângulos. Isto é, conhecemos $p(nd, m\Delta)$ para

$$\begin{aligned} -N &\leq n \leq N \\ m &= 0, 1, \dots, M - 1, \end{aligned} \quad (15)$$

onde $\Delta = \pi/M$. Suponhamos também $Nd > E > r$.

Para aproximar (11) usamos uma soma de Riemann, obtendo

$$p_c(nd, m\Delta) = \sum_{n'=-N}^N q_A((n - n')d)p(n'd, m\Delta), \quad (16)$$

para $n = -N, \dots, N$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$. O vetor de ordem $(2N + 1)M$ definido por (16) é conhecido como vetor de dados de projeção convolvidos. Na aproximação da retroprojeção (13) precisamos conhecer para cada par (r_j, ϕ_j) os valores de $p_c(m\Delta - \phi_j, m\Delta)$. Lamentavelmente esses valores não são os calculados em (16), sendo necessária então uma interpolação linear. Em outras palavras nossos dados de projeção convolvidos são conhecidos num conjunto de pontos do plano (ℓ, θ) distribuídos em uma malha retangular, mas para calcular a retroprojeção precisamos de valores sobre a curva definida por $\ell = r \cos(\theta - \phi)$ para cada (r, ϕ) tal como indicado na Figura 4.

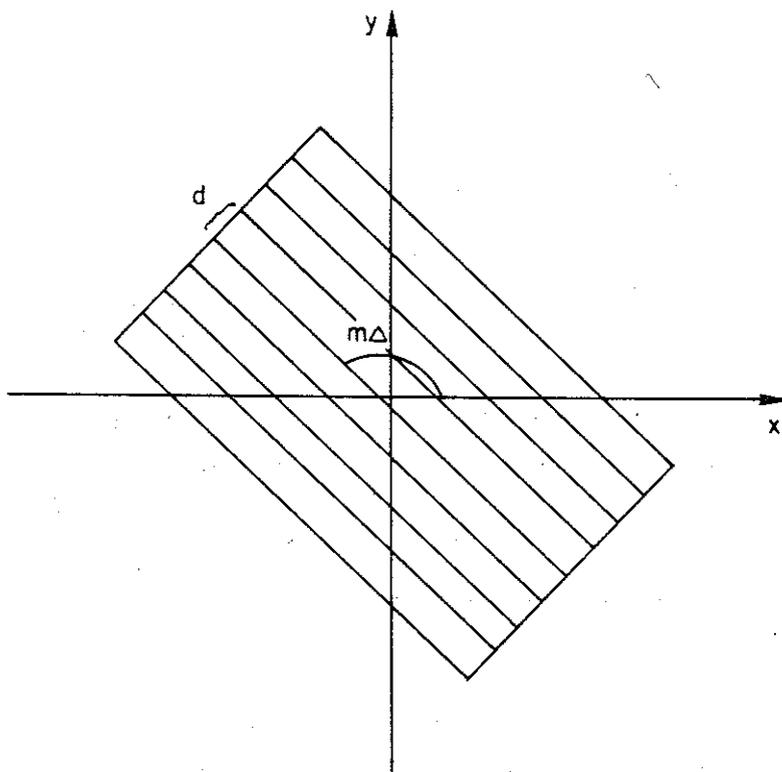


Figura 3.

Na interpolação linear escolhe-se n tal que $nd \leq r \cos(m\Delta - \phi) < (n+1)d$ e estima-se $\bar{p}_c(r \cos(m\Delta - \phi), m\Delta)$ por

$$\begin{aligned} \bar{p}_c(r \cos(m\Delta - \phi), m\Delta) &= \frac{(n+1)d - r \cos(m\Delta - \phi)}{d} p_c(nd, m\Delta) \\ &+ \frac{r \cos(m\Delta - \phi) - nd}{d} p_c((n+1)d, m\Delta). \end{aligned} \quad (17)$$

Usando (17), para cada ponto (r_j, ϕ_j) , com $j = 1, \dots, J$ aproxima-se a integral da retroprojeção pela soma de Riemann e resulta

$$\bar{f}(r_j, \phi_j) = \Delta \sum_{m=0}^{M-1} \bar{p}_c(r_j \cos(m\Delta - \phi_j), m\Delta), \quad (18)$$

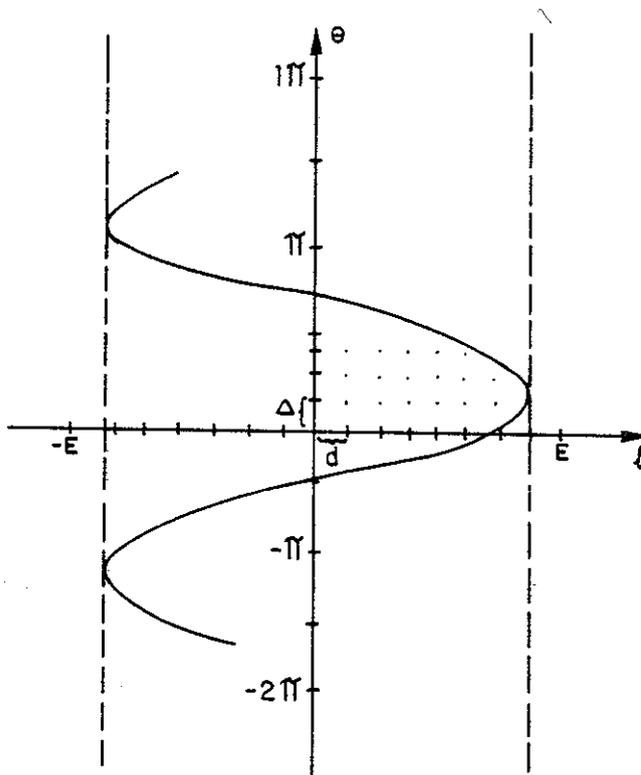


Figura 4.

e $\tilde{f}(r_j, \phi_j)$ será a estimativa da imagem f no ponto (r_j, ϕ_j) . Usualmente os pontos (r_j, ϕ_j) formam uma malha retangular uniforme onde cada elemento se chama "pixel" (de "picture element").

Para outros tipos de coleta de dados é necessário deduzir novas fórmulas equivalentes a (9) ou reduzir ao caso de raios paralelos usando interpolação.

Embora o método de convolução-retroprojeção, também conhecido como retroprojeção filtrada, seja mais eficiente e produza as melhores imagens em tomografia médica, isto supõe algumas condições que devem ser satisfeitas, como, por exemplo: um número suficientemente grande de fons emitidos e detectados, para manter a validade do modelo representado por (1), passo de discretização d razoavelmente pequeno e um número M

de ângulos grande e uniformemente distribuídos. Valores típicos de d , N e M podem ser 0.1504 cm, 84 e 144 respectivamente, para uma máquina com geometria de raios paralelos. Isto é, são conhecidos os valores aproximados de umas 25 000 integrais de linha e, para uma imagem de resolução mínima, f é reconstruída em pelo menos 4 000 pontos (pixels). Quando alguma das condições mencionadas não é satisfeita, as imagens resultantes da aplicação do método de convolução-retroprojeção se deterioram proporcionalmente. É o caso, por exemplo, em que por algum motivo a dose de raios X é baixa, ou existe algum material opaco (prótese) absorvendo a radiação. Neste tipo de situações, métodos mais flexíveis nos quais seja possível introduzir informação "a priori" adicional sobre o problema podem ser mais convenientes. É o caso dos chamados métodos de expansão em séries (vide [9], [10]).

BIBLIOGRAFIA

1. Altschuler, M.D., *Reconstruction of the global-scale three-dimensional solar corona*, em *Image Reconstruction: Implementation and Applications* (G.T. Herman, ed.), Springer-Verlag, Berlin and New York (1979), 105-145.
2. Budinger, T.C. e Gullberg, G.T., *Transverse section reconstruction of gamma-ray emitting radionuclides in patients*, em *Reconstruction Tomography in Diagnostic Radiology and Nuclear Medicine* (M.M. Ter-Pogossian et al. eds.), University Park Press, Maltimore Md (1977), 315-342.
3. Smith, P.R., Aebi, U., Josephs, R., e Kessel, M., *Studies of the structure of the T₄ bacteriophage tail sheath. I. The recovery of three-dimensional information from the extended sheath*, *Journal of Molecular Biology* **106** (1976), 243-275.
4. Herman, G.T. ed., "Proceedings of the IEEE, Special Issue on Computerized Tomography," 1983.
5. Sheepp, L.A., ed., "Computed Tomography, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics," AMS, 1983.
6. Keller J., *Inverse Problems*, *Am. Math. Monthly* **83** (1976), 107-118.
7. Solmon, D.C., *The x-ray transform*, *J. of Math. Anal. and Applis.* **56** (1976), 61-83.
8. Natterer, F., "The Mathematics of Computerized Tomography," John Wiley, 1986.
9. Censor, Y., *Finite series expansion reconstruction methods*, *Proc. IEEE* **71**, **3** (1983), 409-419.
10. Iusem, A.N. e A.R. De Pierro, *Fundamentos matemáticos da tomografia computadorizada: métodos de expansão em séries*, Em preparação.

11. Lewitt, R.M., *Reconstruction algorithms: transform methods*, Proc. IEEE 71, 3 (1983), 390-408.
12. Herman, G.T., "Image Reconstruction from Projections: the Fundamentals of Computerized Tomography," Academic Press, New York, 1980.