Notas de Ensino

Matemática Universitária Nº 11, junho de 1990, pp. 99-113.

Uma Experiência em Curso Básico de Equações Diferenciais Ordinárias

Utilizando o Computador como Ferramenta Didática. Obstáculos e Possibilidades

Gilda de La Rocque Palis

Departamento de Matemática
PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente 225
22451 - Rio de Janeiro, RJ

Quase sempre, um curso básico tradicional de equações diferenciais ordinárias enfatiza o aprendizado no quadro algébrico, o que permite resolver certas equações diferenciais explicitando suas soluções por uma fórmula.

O estado do ensino atual pode estar ligado à evolução histórica da Teoria de Equações Diferenciais, em que predominou este quadro. E neste contexto grande parte dos cursos básicos se restringe ao estado da arte do século XVIII. O aprofundamento desta abordagem mobiliza uma matemática bem mais complexa e fora do alcance dos alunos no estágio considerado. A situação aqui é parecida com o que ocorre em álgebra, onde a bagagem matemática para resolver equações de até quarto grau é menos complexa do que para mostrar que a equação do quinto grau não é resolúvel por meio de radicais.

Em uma experiência realizada em um curso de Cálculo procurei investigar a viabilidade da extensão do estudo de equações diferenciais ao quadro gráfico, geométrico, e de uma introdução ao estudo qualitativo. A oportunidade do planejamento dessa modificação, e da especificação de obstáculos e possibilidades existentes, reside na constatação de que o ensino usual neste nível não tem sido, em geral, influenciado pelo concernente desenvolvimento científico e tecnológico.

Em uma investigação exploratória prévia à experiência, alguns obstáculos à introdução da abordagem qualitativa naquele nível foram detectados. Dentre eles, a dificuldade e pouco hábito dos alunos com a associação entre os quadros algébrico e gráfico, e também a dificuldade intrínseca do traçado a mão de gráficos de funções, equações, campos de direções e vetoriais.

Levando em conta estes obstáculos, além de terem sido organizados trabalhos preparatórios para os alunos, no contexto de funções, foi desenvolvido um "software" para desenho de retrato de fase de sistemas de duas equações diferenciais autônomas de primeira ordem. Este trabalho foi realizado pelo aluno Sérgio D. Calheiros, que havia participado da investigação prévia.

O uso desta ferramente computacional, além de incorporar uma componente estética ao curso, e permitir sua ilustração com muitos exemplos, foi decisivo para possibilitar o planejamento das atividades desejadas.

Foram organizadas duas seqüências de problemas, uma delas para ser incorporada ao estudo de equações diferenciais da forma $y' = f(x, y)$, e outra ao de sistemas autônomos $x = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$.

A primeira destas seqüências continha, por exemplo, os problemas a seguir, os restantes podendo ser encontradas em [**10**].

Problema 1:

Cada um dos oito traçados gráficos da Fig. 1 representa o campo de direções associado a uma dentre as equações diferenciais da lista abaixo:
$y' = -x; y' = 0; y' = \operatorname{sen} x; y' = 3; y' = x + 1; y' = 1/1 + x^2; y' = \cos x; y' = 1/x; y' = -x^2; y' = \tan^{-1} x$.

a) Identifique a equação correspondente a cada gráfico, justificando as escolhas feitas.
b) Esboce gráficos de soluções de cada uma das oito equações identificadas, nos traçados fornecidos.

c) Determine a solução geral (algébrica) de cada uma das oito equações identificadas.
d) Compare estas soluções algébricas com as soluções gráficas esboçadas em b).
e) Esboce o gráfico das soluções de $y' = \tan^{-1} x$.

Problema 2:

O mesmo enunciado excetuando o item e) com as equações: $y' = 1/(x^2 - 1)$; $y' = 5y$; $y' = -y$; $y' = y - 2$; $y' = y/x$; $y' = xy$; $y' = -2xy$; $y' = -x/y$; $y' = x/(y - 1)$; $y' = (y + 3)/(x - 2)$; $y' = x/(x^2 - 1)$; $y' = (y+3)/(x-2)^2$; $y' = 2-y$; $y' = x/(1-y)$. e os gráficos da Fig. 2.

Problema 3:

Este é o traçado obtido em computador de soluções da equação $y' = 2/(x^2 - 1)$. (Fig. 3)

a) Esboce as soluções com condição inicial $y(0) = 0$ e $y(2) = 0$. Estas soluções apresentam assíntotas horizontais ou verticais?
b) Calcule as soluções com condição inicial $y(0) = 0$ e $y(2) = 0$. Verifique as suas conjecturas às questões do item a).

Problema 4:

Considere a equação $y' = (y^2 - 1)/2$.

a) Delimite as regiões do plano em que $y' > 0$ e $y' < 0$.
b) Esboce algumas soluções da equação, em particular, as soluções com condição inicial $y(0) = 0$, $y(0) = -1$ e $y(0) = 2$.
c) Calcule as soluções com condição inicial $y(0) = 0, y(0) = -1$ e $y(0) = 2$. Verifique suas conjecturas em b).
d) A partir do conhecimento das soluções de $y' = 2/(x^2 - 1)$ você poderia inferir as de $y' = (y^2 - 1)/2$?

Problema 5:

a) Os quatro desenhos da Fig. 4, obtidos em computador, correspondem a soluções de equações dentre as seguintes:

$y' = y/(y - x)$; $y' = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$; $y' = \operatorname{sen}(2x - \frac{\pi}{3})$; $y' = 1/(y^2 - 1)$; $y' = (y^2 - 1)$; $y' = y/(x - y)$; $y' = (\operatorname{sen} x)(y^2 - 1)$; $y' = (\operatorname{sen} x)(1 - y^2)$.

Identifique-as, justificando as escolhas.

b) Se desejo estudar o gráfico das soluções de $y' = x.\operatorname{sen} y$, posso me restringir a alguma faixa horizontal ou vertical? Qual; por exemplo? E com $y' = (\operatorname{sen} 3x).(\cos 5y)$?

Problema 6:

a) Considere as equações $y' = x^2y$, $y' = y^2x$ e $y' = x^2y^2$. Qual apreesenta soluções simétricas em relação a OX? OY? à origem?

b) Identifique-as nos gráficos da Fig. 5.

Problema 7:

Os quatro desenhos da Fig. 6, obtidos em computador, correspondem aos gráficos de soluções de equações dentre as seguintes: $y' = y^2 - x$; $y' = (x - y)/(x + y)$; $y' = 2x - y$; $y' = x^2 + y$; $y' = x^2 + y^2$; $y' = x - y^2$; $y' = (x - y)^2/(x + y)$; $y' = (2x - y)/(x - 5)$. Identifique-as, justificando as escolhas.

Problema 8:

A Fig. 7, obtida em computador, representa soluções da equação $y' = (x - y)/(x + y)$:

Existem isóclinas retilíneas que são soluções? Complete o desenho com as soluções retilíneas correspondentes.

Problema 9:

A Fig. 8, obtida em computador, representa soluções da equação $y' = 2x - y$.

a) Quais os tipos de solução que se pode identificar no desenho? As soluções apresentam assíntotas?

b) Resolva a equação, e verifique suas conjecturas.

Problema 10:

Estude a configuração das soluções da família de equações diferenciais dependendo de um parâmetro $y' = x^2 + y^2 + \lambda$, onde λ é um parâmetro real.

Problema 11: (Prova)

Cada um dos quatro traçados gráficos enumerados de 1 a 4 da Fig. 9, corresponde ao gráfico de soluções de uma dentre as equações diferenciais da lista abaixo:
$y' = x^2 - y^2$; $y' = x/y$; $y' = x^2 + y^2 + 1$; $y' = x(\operatorname{sen} y)$; $y' = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} y)$; $y' = \operatorname{sen} x/(1 - x^2)$; $y' = 1/(x^2 + y^2 + 1)$; $y' = \operatorname{sen}^2 x/(1 - x^2)$.

Diga qual equação corresponde a cada traçado, justificando as escolhas feitas.

Problema 12: (Prova)

A Fig. 10, obtida em computador, representa soluções da equação $y' = x^2 + y$.

a) Pelo traçado você pode responder à pergunta: "Todas as soluções apresentam ponto de inflexão?" (mudança de concavidade)?

b) Resolva a equação e verifique sua conjectura.

Um relato detalhado da experiência, contendo pré-requisitos necessários, relacionados a competência no contexto de funções, os critérios norteadores do planejamento das seqüências, a metodologia adotada e as reações dos alunos ao curso encontra-se em [**10**].

Bibliografia

1. Alibert, D., "(pré-publicação)."
2. Artigue, M., "Ingéniérie didactique a propos d'equations différentielles," Atas do PME XI, Montréal. 1987.
3. Artigue, M., Gautheron, V., "Systèmes differentiels, Étude Graphique," Cedic, Paris, 1983.
4. Artigue, M., Gautheron, V. e Sentenac, P., "Qualitative study of differential equations: results from some experiments with microcomputers," Proceeedings do ICECM, Rome, 1987.
5. Artigue, M., Szwed, T., "Représentations graphiques," IREM, Université Paris VII.
6. Douady, R., "The interplay between different settings. Tool-Object dialectic," Atas do PME 9, 1985.
7. Kaplan, W. e Lewis, D.J., "Cálculo e Álgebra Linear 4," LTC Editora S.A., RJ, 1976.
8. Kline, M., "Mathematical Thought from Ancient to Modern Time," Oxford University Press, New York, 1972.
9. Kreyszig, E., "Matemática Superior 1," LTC Editora S.A., RJ, 1983.
10. Palis, G.L., "Uma abordagem qualitativa em curso inicial de equações diferenciais. Metodologia ativa, utilizando o computador como ferramenta didática," Cadernos do Projeto Matemática Comunidade e Universidade, vol. 2 (com disquete e manual), a publicar, PUC, RJ, 1989.
11. Sotomayor, J., "Lições de equações diferenciais ordinárias," (Projeto Euclides), IMPA, RJ, 1979.

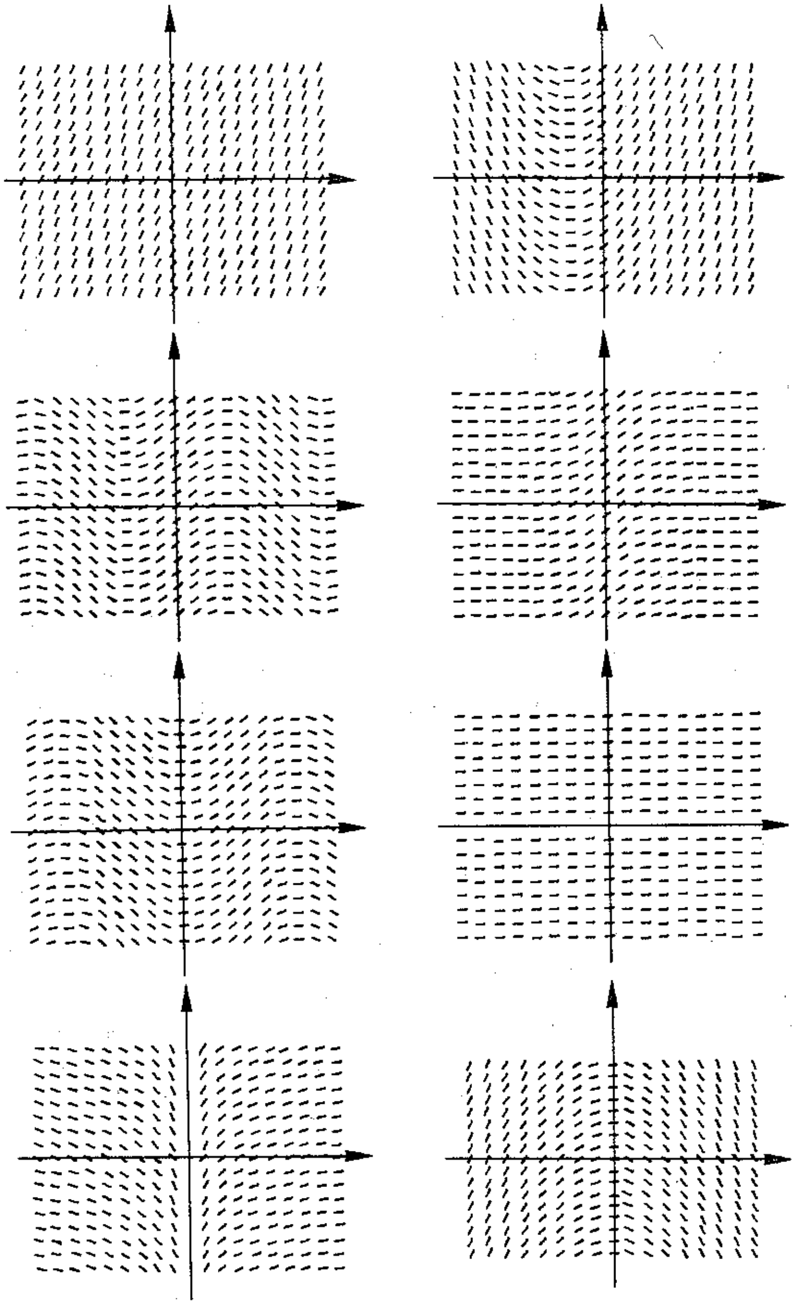

Figura 1.

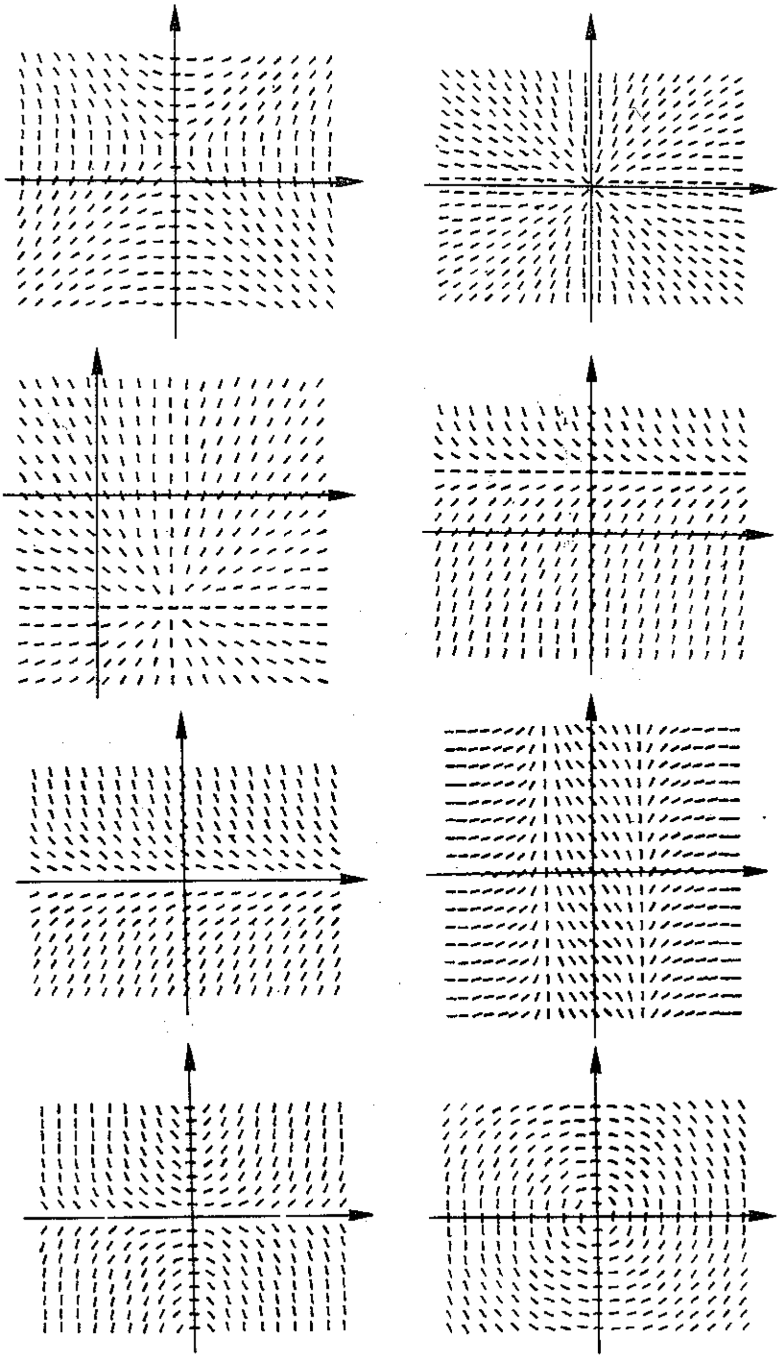

Figura 2.

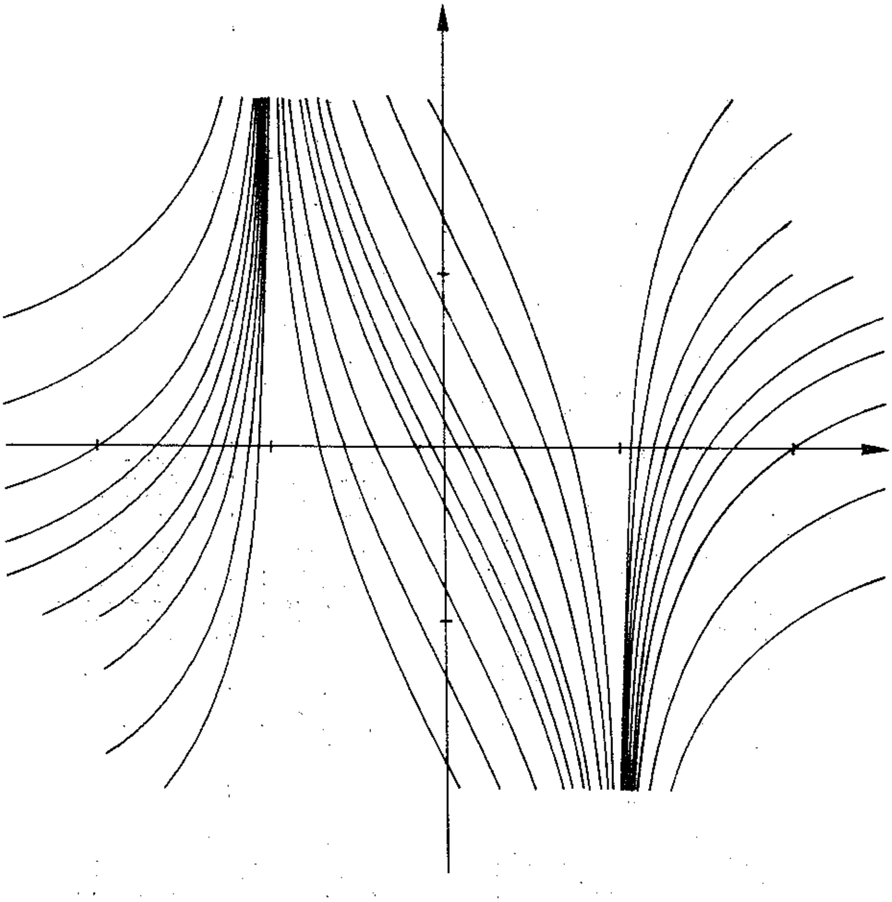

Figura 3.

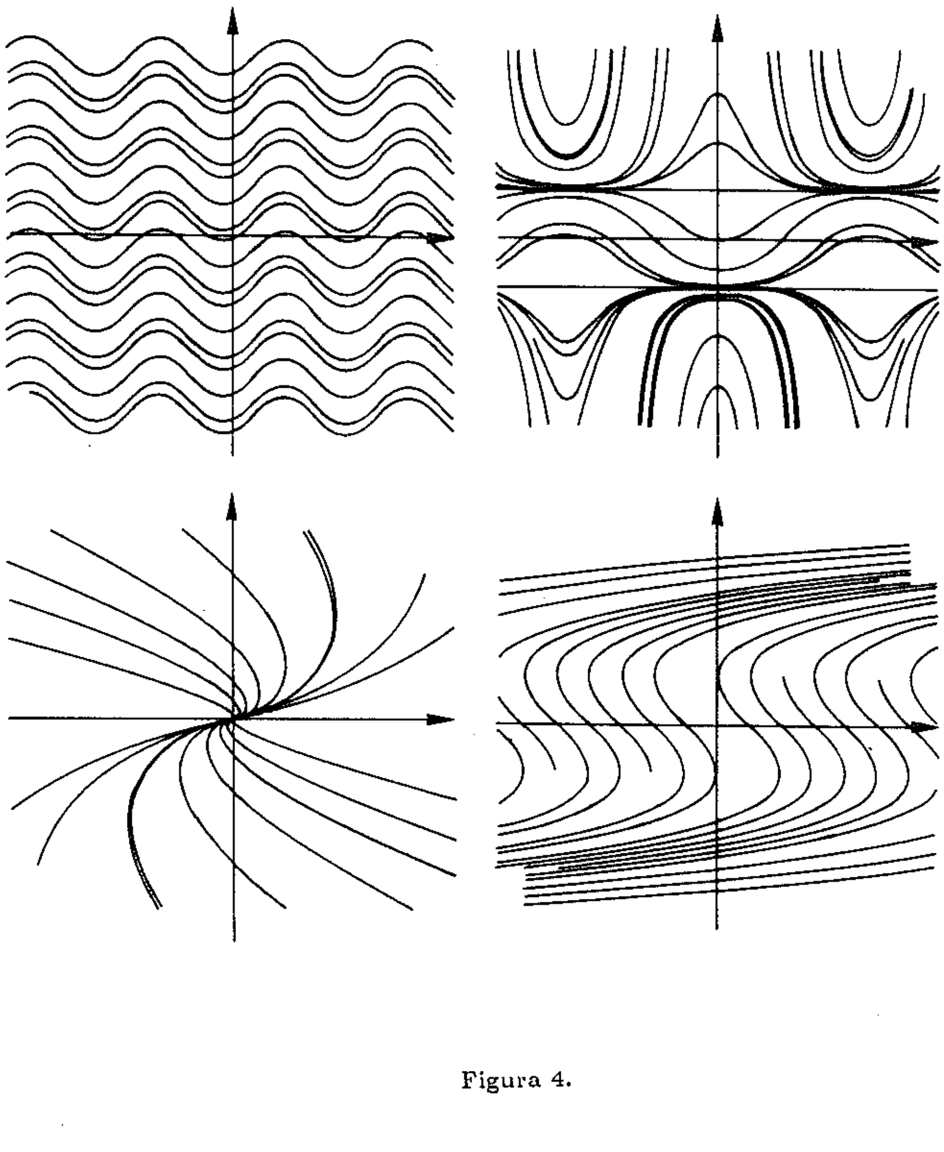

Figura 4.

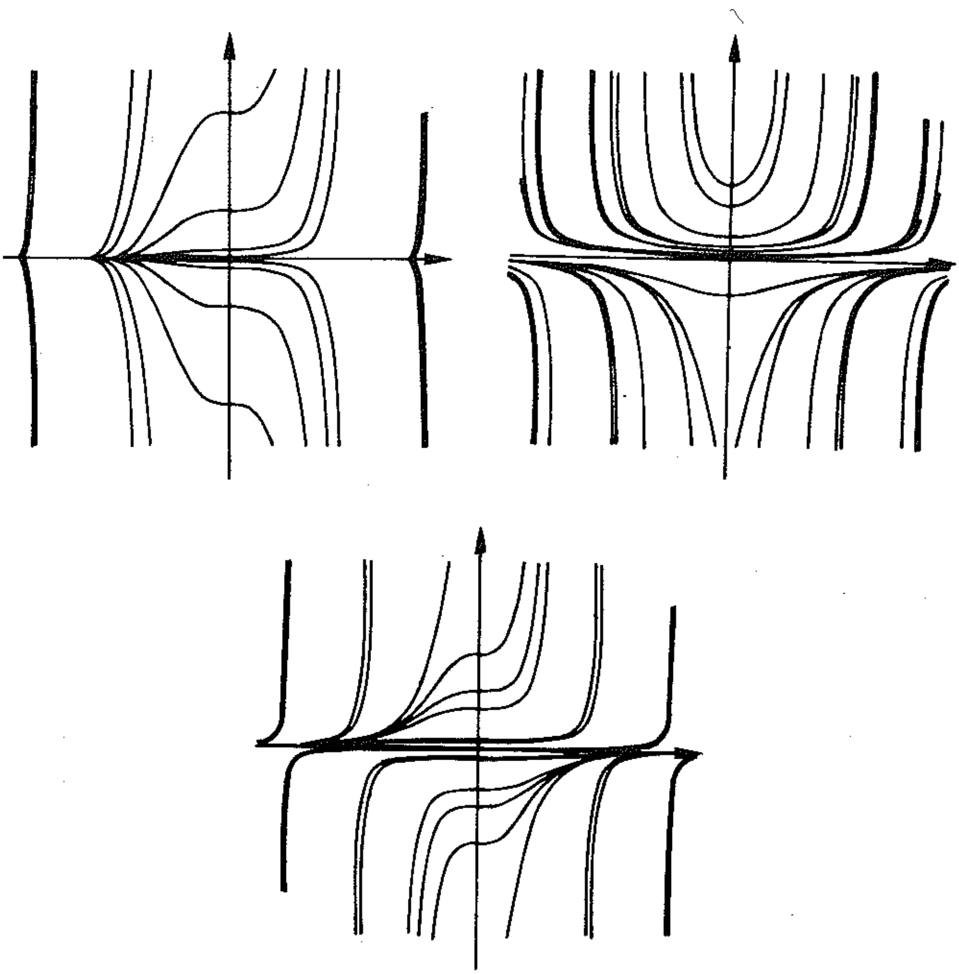

Figura 5.

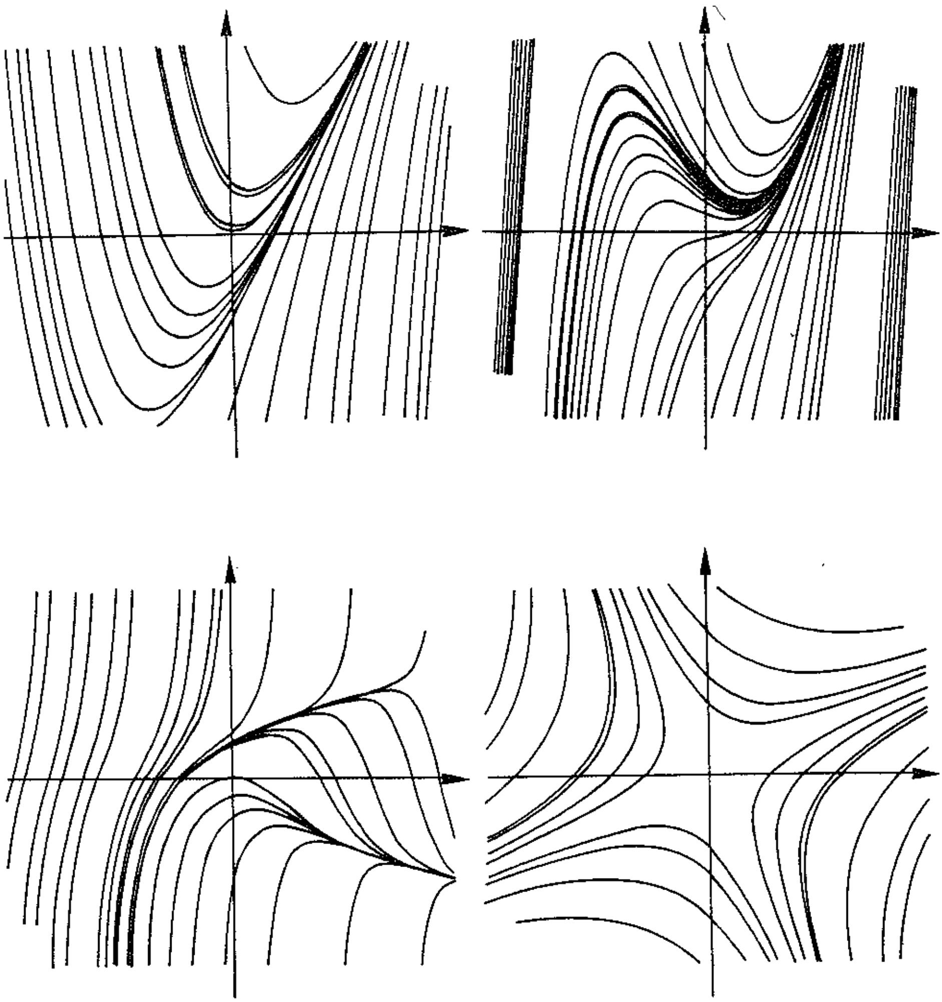

Figura 6.

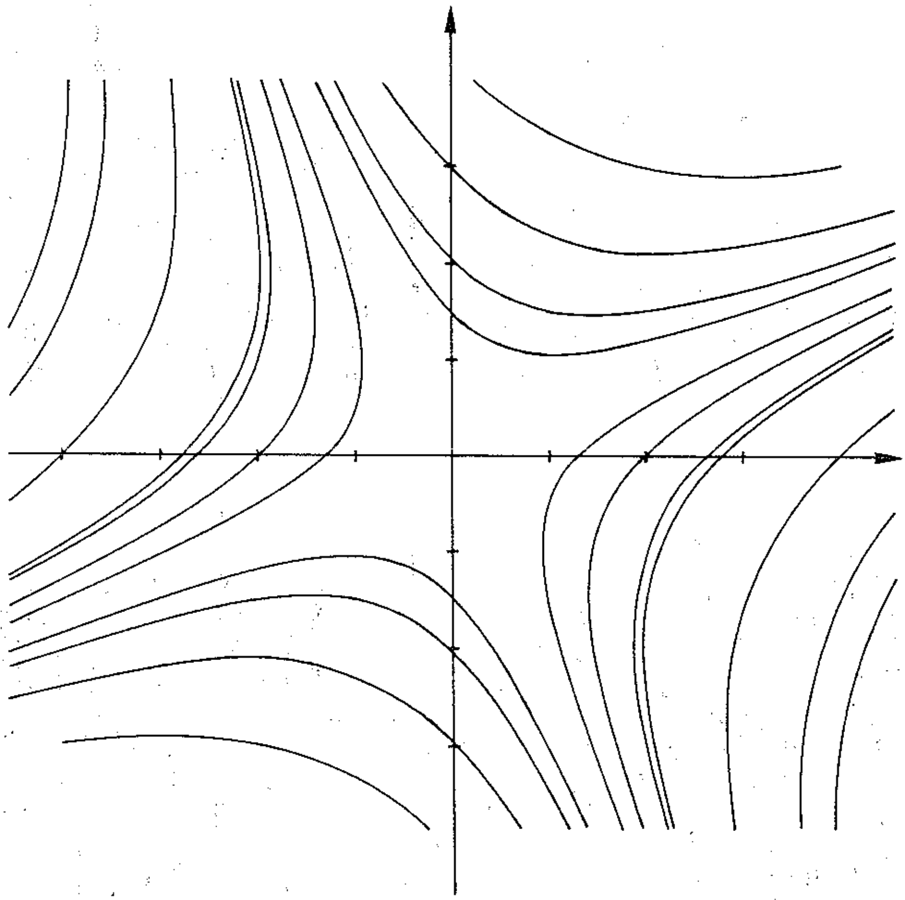

Figura 7.

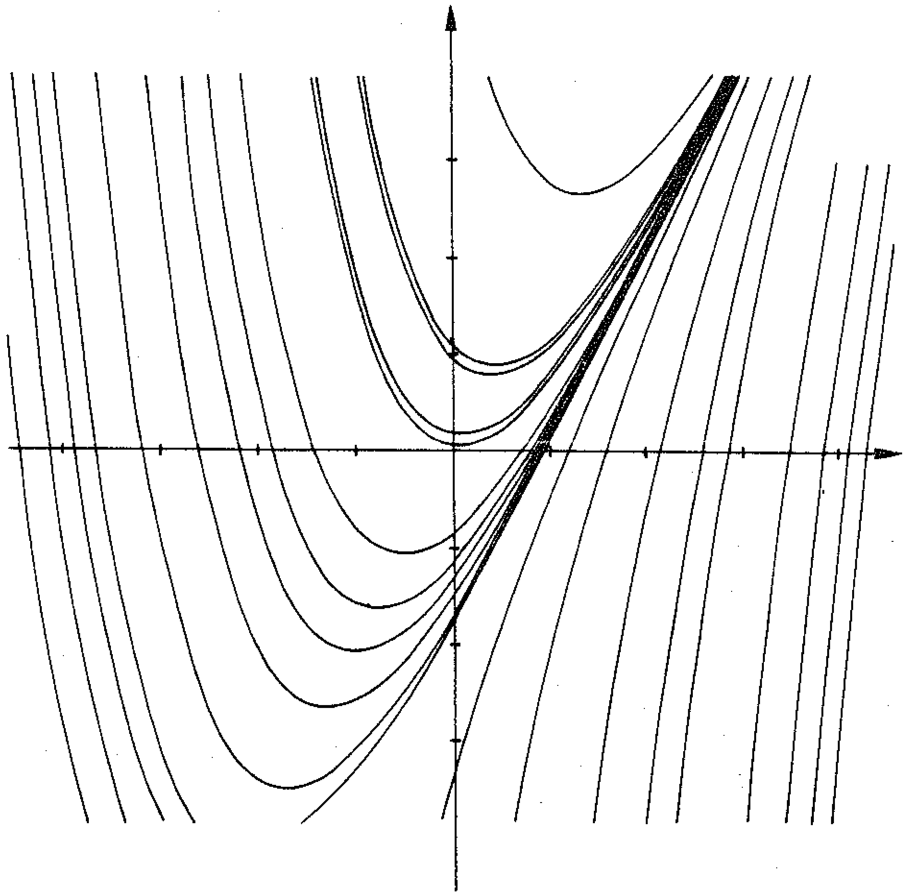

Figura 8.

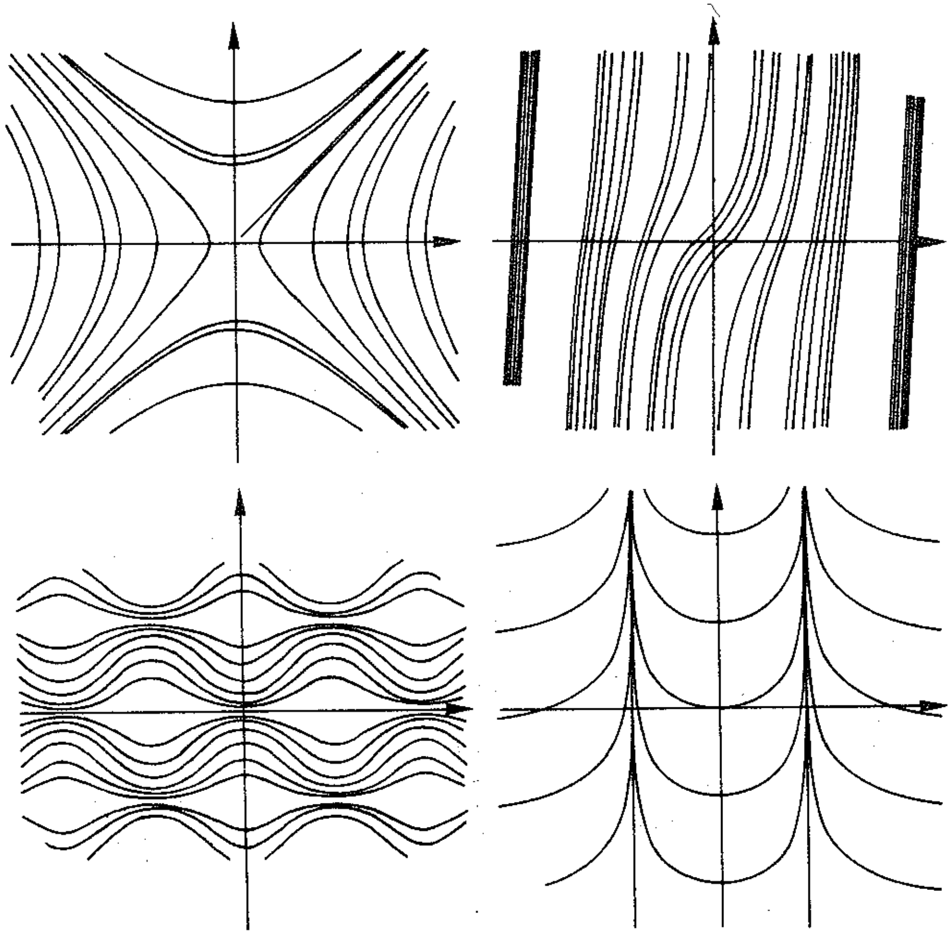

Figura 9.

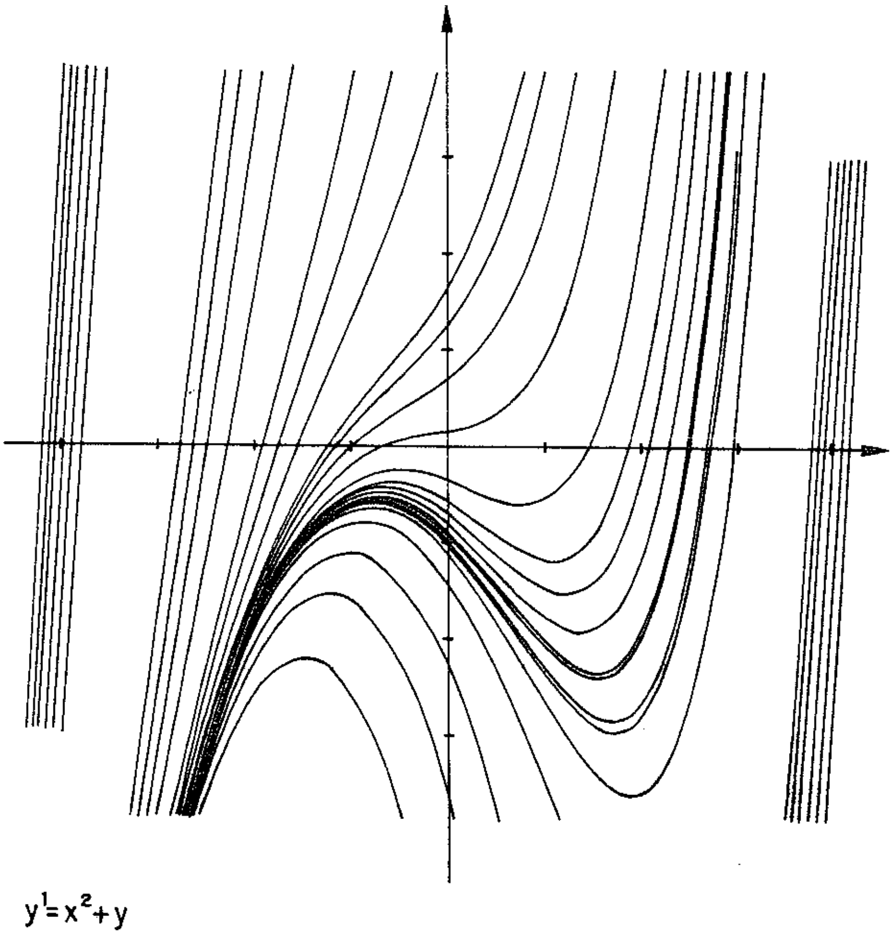

Figura 10.