Matemática Universitária Nº 11, junho de 1990, pp. 115-118.

Sobre Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Críticas

Adalberto Spezamiglio

Departamento de Matemática - IBILCE/UNESP
15055 - S.J. Rio Preto - SP

1. Introdução.

Um primeiro curso sobre equações diferenciais ordinárias geralmente tem como preocupação básica a procura de solução de um problema de valor inicial. Se o problema envolve uma equação linear homogênea com coeficientes constantes e se se desejar obter a solução geral, o ponto mais delicado é quando a equação característica associada tem raízes de multiplicidade maior que um. Nesse caso, quando a equação é de ordem dois, temos uma solução na forma exponencial e a outra solução linearmente independente (L.I.) é obtida através do chamado Método da Redução de Ordem, como se pode ver em **[2]**. Os textos tratam muito rapidamente as equações de ordem $n > 2$ geralmente se limitando a dar a forma das soluções L.I. obtidas de cada raiz característica múltipla.

Em **[1]** os autores consideram uma equação linear homogênea de segunda ordem com raiz característica dupla, da qual, portanto, se conhece uma solução na forma exponencial, e usam o artifício de introduzir um parâmetro na equação de modo a obter duas raízes simples. A segunda solução é então obtida através do limite da família de soluções do problema parametrizado. O objetivo destas notas é expor esse método no caso bidimensioinal e mostrar como ele pode ser usado em equações de ordem maior que dois.

Os resultados aqui apresentados podem ser utilizados em duas situações distintas: nos cursos elementares, como uma busca da solução geral das equações (e. neste caso, a função limite encontrada no final deve ser encarada como "candidata" a solução da equação); e nos cursos mais avançados, como ilustração do conhecido Teorema de Continuidade em Relação às Condições Iniciais e Parâmetros.

2. Equações Lineares com raízes múltiplas.

Consideremos uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea,

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (a \neq 0), \tag{1}$$

e o polinômio característico associado, $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. Se $\lambda = r$ é um zero de $p(\lambda)$ então $y(x) = \exp(rx)$ é uma solução de (1); e se r_1, r_2 são zeros distintos, então a solução geral de (1) é $y(x) = A\exp(r_1x) + B\exp(r_2x)$, A e B constantes. Vamos admitir que $p(\lambda)$ tenha um zero $\lambda = r$ duplo. Neste caso, a equação tem evidentemente a forma

$$y'' - 2ry' + r^2y = 0 \tag{2}$$

e conhecemos uma solução $y_1(x) = \exp(rx)$, satisfazendo as condições iniciais $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = r$. Desejamos obter uma segunda solução $y_2(x)$ L.I. com a primeira, e para isso devemos ter o Wronskiano $W[y_1, y_2](0) \neq 0$, o que acontece se determinarmos $y_2(x)$ satisfazendo as condições iniciais

$$y(0) = 0; \; y'(0) = 1. \tag{3}$$

A idéia é introduzir um parâmetro α em (2) de modo que a equação parametrizada tenha polinômio característico com dois zeros distintos e que ela se reduza a (2) quando $\alpha = 0$. A solução $y_2(x)$ de (2) será obtida como limite da família de soluções do problema parametrizado.

O polinômio característico associado a (2) é $p(\lambda) = (\lambda - r)^2$. Introduzimos α de modo que a equação parametrizada tenha polinômio característico $p_\alpha(\lambda) = (\lambda - r - \alpha)(\lambda - r + \alpha) = \lambda^2 - 2r\lambda + (r^2 - \alpha^2)$, isto é, consideramos a equação

$$y'' - 2ry' + (r^2 - \alpha^2)y = 0. \tag{4}$$

A solução geral de (4) é $y_\alpha(x) = A\, e^{(r+\alpha)x} + B\, e^{(r-\alpha)x}$, e quando impomos as condições (3) obtemos

$$y_\alpha(x) = e^{rx}\alpha^{-1}\,\mathrm{senh}(\alpha x).$$

Calculando o limite (pontual) para α tendendo a zero, usando L'Hospital, temos

$$\lim_{\alpha \to 0} y_\alpha(x) = x\, e^{rx},$$

que é a solução de (2) satisfazendo (3). Portanto, a solução geral de (2) é dada por $y(x) = e^{rx}(A + Bx)$.

É importante obervar que o procedimento acima pode ser usado para equações lineares de ordem $n > 2$ com zero r de multiplicidade $m > 2$. De fato, neste caso $p(\lambda) = (\lambda - r)^2 q(\lambda)$ e toma-se $p_\alpha(\lambda) = (\lambda - r - \alpha)(\lambda - r + \alpha)q(\lambda)$. Portanto, para uma equação de ordem $n > 2$ com valor característico r de multiplicidade $m > 2$, temos sempre duas soluções dadas por $y_1(x) = \exp(rx)$, $y_2(x) = x\,\exp(rx)$.

O passo seguinte é analisarmos o caso de multiplicidade três. Partimos de uma equação de ordem 3, que evidentemente pode ser colocada na forma

$$y''' - 3ry'' + 3r^2 y' - r^3 = 0 \tag{5}$$

com polinômio característico $p(\lambda) = (\lambda - r)^3$. A equação parametrizada deverá ter polinômio característico $p_\alpha(\lambda) = (\lambda - r + \alpha)(\lambda - r)(\lambda - r - \alpha)$. Pela obervação contida no parágrafo anterior, já conhecemos duas soluções de (5), a saber $y_1(x) = \exp(rx)$, $y_2(x) = x\,\exp(rx)$, satisfazendo $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = r$, $y_1''(0) = r^2$; $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ e $y_2''(0) = 2r$. Para que a terceira solução $y_3(x)$ satisfaça $W[y_1, y_2, y_3]\,(0) \neq 0$, impomos as condições iniciais

$$y(0) = 0;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = 1. \tag{6}$$

A solução geral da equação parametrizada é

$$y(x) = A\, e^{(r-\alpha)x} + B\, e^{rx} + C\, e^{(r+\alpha)x},$$

que sob as condições expressas em (6) nos dá

$$y_\alpha(x) = e^{rx}\alpha^{-2}[\cosh(\alpha x) - 1].$$

Usando L'Hospital calculamos

$$\lim_{\alpha \to 0} y_\alpha(x) = \frac{1}{2}x^2e^{rx}$$

e vemos facilmente que $y_3(x) = \frac{1}{2}x^2e^{rx}$ é a solução de (5) satisfazendo (6). Assim, a solução geral de (5) é $y(x) = e^{rx}(A + Bx + Cx^2)$.

É curioso observar que no presente método, o polinômio multiplicando a exponencial na expressão da solução aparece com o uso repetido da regra de L'Hospital no cálculo do limite da família parametrizada. Repetimos também que mesmo para $n > 3$ e r de multiplicidade $m > 3$, as três funções encontradas acima são soluções L.I. da equação original. A generalização para ordem $n > 3$ é imediata.

Esse método pode facilmente ser estendido para sistemas lineares com coeficientes constantes $Y' = AY$, quando a matriz A admite autovalores múltiplos. Mas há necessidade de se colocar o sistema numa forma canônica, com a matriz na forma triangular. O parâmetro é então introduzido na diagonal principal, ocupando uma posição conveniente junto aos autovalores múltiplos.

BIBLIOGRAFIA

1. R.S. Baslaw & H.M. Hastings, *On the critically damped oscillator*, Mathematics Magazine (1975), 105–106.
2. M. Braun, "Differential Equations and their Applications," Springer--Verlag, New York, 1975.