Matemática Universitária Nº 12, dezembro de 1990, 43–55

Solução Assintótica do Problema de Cauchy para a Equação das Ondas

Geraldo Ávila

Instituto de Matemática - UNICAMP
Caixa Postal 6065
13.081 - Campinas

1. Introdução.

O objetivo do presente artigo é mostrar como o *método da fase estacionária* [**2**] pode ser utilizado para estudar o comportamento da solução do problema (2)-(3), formulado adiante e conhecido como *problema de Cauchy* ou *problema de valores iniciais* para a equação das ondas. Este é um problema cuja solução pode ser obtida explicitamente. No entanto, é também uma situação típica do fato de que, para efeito das aplicações, não basta obter a solução; é preciso ter meios de explorá-la para obter informações relevantes na interpretação dos fenômenos que ela descreve. E no caso particular do problema que consideramos aqui o estudo da solução aproximada permite exibir com clareza o fenômeno da propagação de ondas, bem como o modo como ocorre a distribuição e propagação da energia associada a essas ondas.

2. Generalidades.

Muitos problemas de propagação de ondas originam-se de uma situação de repouso, quando, a partir de determinado instante, algum mecanismo é acionado, provocando o surgimento de ondas e sua propagação. Assim, por exemplo, um transmissor de rádio produz uma corrente elétrica em sua antena, originando ondas eletromagnéticas que se propagam no espaço. De maneira análoga são produzidas ondas acústicas, sísmicas, etc.

A geração e propagação desses diferentes tipos de ondas são governadas por equações específicas. Vamos nos restringir aqui a um dos tipos mais simples dessas equações, chamada *equação das ondas*. Designando com $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a variável espacial e com t o tempo, ela se escreve:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = h(x,t) \tag{1}$$

onde $h(x,t)$ é uma função dada, que representa a causa geradora das ondas, e que, portanto, deve ser zero antes de um certo tempo, digamos $t = 0$. A função $u = u(x,t)$ é a *função onda* que se procura determinar; ela pode ser uma das componentes do campo eletromagnético, de um abalo sísmico, a variação de pressão ou densidade em Acústica, etc. O parâmetro c, que supomos constante e positivo, tem o significado de velocidade de propagação.

No caso de ondas geradas a partir do instante $t = 0$ e que se propagam no espaço livre, sem fronteiras, o problema que se formula para a equação (1) é o de achar uma solução (única, é o que se espera e se procura provar) sujeita às condições iniciais

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

O chamado *Princípio de Duhamel* ([**5**], p. 112) permite mostrar que esse problema pode ser reduzido a um *problema de Cauchy* ou *de valores iniciais* para a equação homogênea, isto é, com $h \equiv 0$. Isto explica a importância prática deste último problema, que consiste em achar $u(x,t)$ que satisfaça a equação

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \tag{2}$$

para $x \in \mathbf{R}^n$ e $t > 0$, e as seguintes *condições iniciais*, onde f e g são funções dadas:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x). \tag{3}$$

3. Solução do Problema de Cauchy.

Há várias maneiras de se resolver o problema (2)-(3). Uma delas se baseia na utilização da *transformada de Fourier*, cujos resultados básicos mencionaremos a seguir. O leitor encontrará uma exposição dessa transformada em uma dimensão no capítulo 6 de [4]; para uma exposição em n dimensões veja, por exemplo, [8], pp. 146-149.

Dada uma função f, definimos sua transformada $\widehat{f}$ pela fórmula

$$\widehat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ip.x} f(x)dx, \tag{4}$$

onde a integração se estende a todo o $\mathbf{R}^n$. A função f é obtida de sua transformada $\widehat{f}$ pela fórmula inversa:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{ip.x} f(p)dp, \tag{5}$$

As fórmulas (4) e (5) se aplicam diretamente a funções do espaço $\mathcal{S}$, isto é, funções $f \in C^\infty$ tais que, juntamente com suas derivadas de todas as ordens, tendem a zero, com $|x| \to \infty$, mais rapidamente que qualquer potência negativa de $|x|$. Elas se estendem, de uma maneira bem natural, a todo o espaço $L^2(\mathbf{R}^n)$ (veja [8], p. 153).

Uma das virtudes da transformada de Fourier é que ela transforma a derivação em relação a x_j em multiplicação por ip_j, isto é,

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(p) = ip_j \widehat{f}(p).$$

Isto nos permite reduzir o problema (2)-(3) a um problema de equações diferenciais ordinárias por simples aplicação da transformada de Fourier. Assim, se $\widehat{u}(p,t)$ é a transformada de $u(x,t)$, a equação (2) transforma-se em

$$\widehat{u}_{tt}(p,t) + c^2|p|^2\widehat{u}(p,t) = 0,$$

onde, evidentemente,

$$|p|^2 = p_1^2 + \ldots + p_n^2.$$

As condições iniciais (3) transformam-se em

$$\widehat{u}(p,0) = \widehat{f}(p) \text{ e } \widehat{u}_t(p,0) = \widehat{g}(p).$$

Impondo estas condições à solução geral da equação diferencial,

$$\widehat{u}(p,t) = A\cos(c|p|t) + B\ \mathrm{sen}(c|p|t),$$

obtemos:

$$\begin{aligned}\widehat{u}(p,t) &= \widehat{f}(p)\cos(c|p|t) + \frac{\widehat{g}(p)}{c|p|}\ \mathrm{sen}(|c|p|t) \\ &= \left(\widehat{f}(p) - \frac{i\widehat{g}(p)}{c|p|}\right)\frac{e^{ic|p|t}}{2} + \left(\widehat{f}(p) + \frac{i\widehat{g}(p)}{c|p|}\right)\frac{e^{-ic|p|t}}{2}.\end{aligned}$$

Tomando agora a transformada inversa desta última expressão, encontramos

$$u(x,t) = \frac{v(x,t) + w(x,t)}{2},$$

onde

$$v(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{i(p.x-|p|ct)}\left(\widehat{f}(p) + \frac{i\widehat{g}(p)}{c|p|}\right)dp$$

e

$$w(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{i(p.x+c|p|t)}\left(\widehat{f}(p) - \frac{i\widehat{g}(p)}{c|p|}\right)dp.$$

Observemos agora que a transformada de Fourier de uma função real goza da propriedade: $\overline{\widehat{f}(p)} = \widehat{f}(-p)$. É fácil verificar então que $w(x,t) = \overline{v(x,t)}$; logo,

$$u(x,t) = Re[v(x,t)]. \tag{6}$$

É fácil ver também que

$$v(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int e^{i(p.x-|p|ct)}\widehat{h}(p)dp, \tag{7}$$

onde

$$\widehat{h}(p) = \widehat{f}(p) + i\frac{\widehat{g}(p)}{c|p|}. \tag{8}$$

Todo o procedimento usado para chegarmos à solução (6)-(8) é puramente formal e carece de justificativa. Todavia, é mais fácil seguir outro caminho, verificando diretamente que a função $u(x,t)$, dada por (6)-(8), é solução do problema (2)-(3). Ê claro que isto exige que os dados iniciais satisfaçam certas condições de regularidade. Não vamos nos ocupar deste problema aqui, limitando–nos a remeter o leitor interessado ao capítulo 5 de [**5**], onde a equação das ondas é resolvida pelo método das médias esféricas, que também é um procedimento formal que exige se verifique que a "solução formal" é solução autêntica.

4. A Solução Aproximada.

A solução de (2)-(3) na forma (6) a (8) encontra-se em [**6**]. A partir de agora, usaremos o mesmo procedimento de [**6**] na aplicação do método da fase estacionária para estudar o comportamento da função $v(x,t)$.

Notemos inicialmente que a expressão (7) é válida se $f, g \in \mathcal{S}$. Isto ocorre por exemplo, se $\widehat{f}$ e $\widehat{g} \in C_0^\infty$. Mais especificamente, seja D o conjunto das funções $\varphi \in \mathcal{S}$ tais que $\widehat{\varphi} \in C_0^\infty$ e $\widehat{\varphi}(p) = 0$ numa vizinhança da origem. É fácil provar que D é um conjunto denso no espaço $L^2(\mathbf{R}^n)$, portanto bastante amplo para acomodar os dados iniciais f e g. Assim, dados f e g em D, existem a e b, $0 < a < b$, tais que $\widehat{h}(p)$ tem suporte compacto no intervalo (a,b).

Vamos agora introduzir coordenadas polares, pondo $p = \rho\omega$, onde $\rho = |p|$ e $|\omega| = 1$. Notando que $dp = \rho^{n-1} dp\, d\omega$, sendo $d\omega$ o elemento de área na esfera $|\omega| = 1$, a expressão (7) assume a forma

$$v(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_a^b e^{-i\rho ct} V(x,\rho) \rho^{n-1} d\rho, \tag{9}$$

onde

$$V(x,\rho) = \int_{|\omega|=1} e^{i\rho x\cdot\omega} \widehat{h}(\rho\omega)\, d\omega. \tag{10}$$

Esta última expressão será agora tratada pelo método da fase estacionária com $|x| \to \infty$. Isto é o mesmo que $\rho|x| \to \infty$, já que $a \le \rho \le b$. Para achar os pontos estacionários da fase $\rho x.\omega$, sujeita à condição $\omega^2 - 1 = 0$, utilizamos o método dos multiplicadores de Lagrange ([**1**], sec. 3.4), igualando a zero as derivadas da função

$$F(\omega,\lambda) = \rho x.\omega - \lambda(\omega^2 - 1)$$

em relação a $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ e λ. Assim verificamos que os pontos estacionários são $\omega = \pm\eta$, onde $\eta = x/|x|$.

Para obtermos a contribuição à integral em (10), proveniente do ponto $\omega = \eta$, procedemos da seguinte maneira: com uma rotação dos eixos, colocamos o eixo $O\omega_n$ na direção de η, de sorte que

$$\omega_n = \sqrt{1 - \omega_1^2 - \cdots - \omega_{n-1}^2}$$

é uma representação conveniente da superfície $|\omega| = 1$ numa vizinhança de $\omega = \eta$. Em seguida, seja $\varphi(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \in C_0^\infty$ uma função que é igual a 1 numa vizinhança de η, digamos $\omega_1^2 + \cdots + \omega_{n-1}^2 \leq 1/3$, e igual a zero para $\omega_1^2 + \cdots + \omega_{n-1}^2 \geq 1/2$. Multiplicando o integrando de (10) por $\varphi + (1 - \varphi)$, separamos $V(x, \rho)$ em dois termos, V_φ e $V_{1-\varphi}$, correspondentes aos fatores φ e $1 - \varphi$ respectivamente. Ao primeiro destes aplicamos o teorema 6 de [**2**] diretamente e obtemos:

$$V_\varphi(x, \rho) = \left(\frac{2\pi}{\rho|x|}\right)^{\frac{n-1}{2}} \widehat{h}\left(\rho\frac{x}{|x|}\right) e^{i[\rho|x| + (n-1)\pi/4]} + O(|x|^{-(n+1)/2}).$$

O mesmo procedimento é adotado no estudo de $V_{1-\varphi}$: introduzimos um novo fator ψ para isolar uma vizinhança de $\omega = -\eta$ e obter a contribuição deste ponto à integral (10). O termo restante será uma integral sobre um domínio compacto, onde a fase não tem pontos estacionários, logo o Lema 5 de [**2**] é aplicável. Assim, adotando a convenção usual de que

$$(\pm i)^{1/2} = e^{\pm i\pi/4},$$

obtemos, para (10),

$$\begin{aligned} V(x, \rho) = {} & \left(\frac{2\pi i}{\rho|x|}\right)^{\frac{n-1}{2}} \widehat{h}\left(\frac{\rho x}{|x|}\right) e^{i\rho|x|} \\ & \left(\frac{-2\pi i}{\rho|x|}\right)^{\frac{n-1}{2}} \widehat{h}\left(\frac{-\rho x}{|x|}\right) e^{-i\rho|x|} + R_0(x, \rho), \end{aligned} \tag{11}$$

desenvolvimento este que é válido para $|x| > 0$, onde

$$|R_0(x, \rho)| \leq C_0|x|^{-(n+1)/2}, \tag{12}$$

C_0 sendo uma constante que, em geral, depende da função h. Substituindo, em seguida, esta expressão em (9), chegamos ao seguinte resultado, válido para $|x| > 0$:

$$\begin{aligned} v(x,t) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_a^b \widehat{h}\left(\frac{\rho x}{|x|}\right) e^{i\rho(|x|-ct)}(i\rho)^{\frac{n-1}{2}} d\rho \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_a^b \widehat{h}\left(\frac{-\rho x}{|x|}\right) e^{-i\rho(|x|+ct)}(-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} d\rho \\ & + R_1(x,t), \end{aligned} \tag{13}$$

onde, em virtude de (12),

$$\begin{aligned} |R_1(x,t)| &= \frac{1}{(2n)^{n/2}} \left| \int_a^b e^{-i\rho ct} R_0(x,t)\rho^{n-1} d\rho \right| \\ &\leq \frac{C_0}{(2\pi)^{n/2}|x|^{\frac{n+1}{2}}} \int_a^b \rho^{n-1}\, d\rho = \frac{(b^n - a^n)C_0}{(2\pi)^{n/2} n |x|^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $x \neq 0$,

$$|R_1(x,t)| \leq \frac{C_1}{|x|^{\frac{n+1}{2}}}, \tag{14}$$

sendo

$$C_1 = \frac{(b^n - a^n)C_0}{(2\pi)^{n/2} n}$$

uma constante que pode depender da função h, mas não de x ou de t.

O primeiro termo de (13) é precisamente

$$\frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} F\left(|x| - ct, \frac{x}{|x|}\right),$$

onde

$$F(r,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \widehat{h}(\rho\eta) e^{i\rho r}(i\rho)^{\frac{n-1}{2}} d\rho. \tag{15}$$

Quanto ao segundo termo, uma simples mudança na integração em ρ permite identificá-lo com

$$\frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} G\left(|x| + ct, \frac{x}{|x|}\right),$$

onde

$$G(r,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{-a} \widehat{h}(\rho\eta) e^{i\rho r} (-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} d\rho. \tag{16}$$

Portanto, com ajuda das funções introduzidas em (14) e (15), podemos escrever (13) na forma

$$\begin{aligned} v(x,t) = {} & \frac{F(|x| - ct, x/|x|)}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{G(|x| + ct, x/|x|)}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \\ & + R_1(x,t). \end{aligned} \tag{17}$$

Assim escrita, a função $v(x,t)$ exibe claramente sua estrutura: seu primeiro termo é uma *onda divergente*, de perfil F e "amplitude" $|x|^{-(n-1)/2}$, que se propaga radialmente, com velocidade c; o segundo termo é uma *onda convergente* de perfil G e que também se propaga radialmente, com velocidade $-c$; e o termo restante, $R_1(x,t)$, é desprezível quando $|x| \to \infty$, visto que decai mais rapidamente que os anteriores.

5. A Solução Assintótica.

Vamos mostrar agora que o primeiro termo em (17),

$$v^{\infty}(x,t) = \frac{F(|x| - ct, x/|x|)}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}, \tag{18}$$

é a contribuição mais importante à função $v(x,t)$ para valores grandes de t. Provaremos isto no sentido da norma do espaço $L^2(\mathbf{R}^n)$, dada por

$$\|f\| = \left(\int |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

onde f é uma função de quadrado integrável, isto é, $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Mais precisamente, provaremos o seguinte

Teorema. $\lim_{t\to\infty} \|v(\cdot,t) - v^{\infty}(\cdot,t)\| = 0.$

Para estabelecermos este resultado necessitaremos dos seguintes lemas.

Lema 1. *A função F definida em (15) pertence ao espaço $\Omega = L^2(\mathbf{R} \times S^{n-1})$. Sua norma, cujo quadrado é dado por*

$$\|F\|_\Omega^2 = \int_{|\omega|=1} \int_{-\infty}^{\infty} |F(r,\omega)|^2 dr\, d\omega,$$

é tal que $\|F\|_\Omega = \|h\|$.

DEMONSTRAÇÃO: A definição (15) mostra claramente que $F(r,\omega)$ como função de r, é a inversa, pela transformada de Fourier, da função de ρ que é igual a

$$(-i\rho)^{\frac{n-1}{2}} \widehat{h}(\rho\omega)$$

quando $a < \rho < b$ e zero para ρ fora desse intervalo. Pelo teorema de Plancherel ([8] p. 153), as normas de uma função e de sua transformada são iguais, logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(r,\omega)|^2 dr = \int_a^b \rho^{n-1} |\widehat{h}(\rho\omega)|^2 d\rho.$$

Integrando na esfera unitária $|\omega| = 1$, obtemos

$$\|F\|_\Omega^2 = \int |\widehat{h}(p)|^2 dp = \int |h(x)|^2 dx = \|h\|^2,$$

donde $\|F\|_\Omega = \|h\|$, que é o resultado desejado.

Lema 2. *Fixado o número $R > 0$,*

$$\int_{|x|\leq R} |v(x,t)|^2 dx \ \text{ e } \int_{|x|\leq R} |v^\infty(x,t)|^2 dx$$

tendem a zero com $t \to \infty$.

DEMONSTRAÇÃO: Introduzindo coordenadas polares em (7), (como fizemos para obter (9) e (10)), $v(x,t)$ assume a forma

$$v(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|\omega|=1} \int_a^b e^{i\rho(x.\omega - ct)} \widehat{h}(\rho\omega) \rho^{n-1} d\rho\, d\omega.$$

A seguir integramos por partes em ρ, observando que

$$e^{-i\rho ct} = \frac{-1}{ict}\frac{\partial}{\partial\rho}(e^{-i\rho ct});$$

lembrando também que $\widehat{h}(p)$ tem suporte no intervalo (a, b), obtemos

$$v(x,t) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{ict}\int_{|\omega|=1}\int_a^b e^{-i\rho ct}\frac{\partial}{\partial\rho}[e^{-i\rho x.\omega}\widehat{h}(\rho\omega)\rho^{n-1}]d\rho\, d\omega.$$

Ora, é fácil verificar daqui que existe uma constante C tal que $|v(x,t)| \leq C/t$, independentemente de x. Com isto fica provada a primeira parte do lema.

Para provar a segunda parte, começamos com a definição (18) e, novamente, usamos coordenadas polares. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq R}|v^{\infty}(x,t)|^2dx &= \int_0^R\int_{|\omega|=1}|F(\rho - ct,\omega)|^2d\omega\, d\rho\\ &= \int_{-ct}^{R-ct}\int_{|\omega|=1}|F(r,\omega)|^2d\omega\, dr.\end{aligned}$$

O Lema 1 nos permite concluir que esta expressão tende a zero com $t \to \infty$, o que completa a demonstração do Lema 2.

Lema 3. *O segundo termo em* (17),

$$G(|x| + ct, x/|x|)/|x|^{\frac{n-1}{2}}$$

é dominado por $C/|x|^{\frac{n+1}{2}}$, *onde* $x \neq 0$, $t > 0$ e C *é uma constante.*

DEMONSTRAÇÃO: Observando que

$$e^{i\rho r} = \frac{1}{ir}\frac{\partial}{\partial\rho}(e^{i\rho r})$$

e integrando por partes em (16), resulta

$$G(r,\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}\, r}\int_{-b}^{-a} e^{i\rho r}\frac{\partial}{\partial\rho}[\widehat{h}(\rho\omega)(-\rho)^{\frac{n-1}{2}}]d\rho.$$

Como esta integral é limitada, concluimos que

$$|G(r,\omega)| \leq \frac{C}{r},$$

onde C é uma constante. Portanto,

$$\frac{G(|x|+ct, x/|x|)}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{C}{|x|^{\frac{n-1}{2}}(|x|+ct)} \leq \frac{C}{|x|^{\frac{n+1}{2}}},$$

já que $t > 0$. Isto completa a demonstração.

Demonstração do teorema: Observemos que

$$\begin{aligned} \|v(\cdot,t) - v^\infty(\cdot,t)\|^2 &= (\int_{|x|\leq R} + \int_{|x|\geq R})|v(x,t) - v^\infty(x,t)|^2 dx \\ &\leq 2\int_{|x|\leq R}(|v(x,t)|^2 + |v^\infty(x,t)|^2)dx \\ &+ \int_{|x|\geq R}|v(x,t) - v^\infty(x,t)|^2 dx. \qquad (19) \end{aligned}$$

De (17) e (18) segue–se que

$$v - v^\infty = \frac{G}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} + R_1.$$

Em face de (14) e do Lema 3, esta última expressão é dominada, para $t > 0$, por $C/|x|^{\frac{n+1}{2}}$. Portanto, com $t > 0$ e $x \neq 0$,

$$|v(x,t) - v^\infty(x,t)|^2 \leq \frac{C}{|x|^{n+1}}.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $R > 0$ tal que (observe que, em coordenadas polares, $dx = d\omega|x|^{n-1}d|x|$)

$$\int_{|x|\geq R}|v(x,t) - v^\infty - (x,t)|^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Fixado R, invocamos o Lema 2 para encontrar T tal que para $t > T$ o primeiro termo do último membro de (19) também seja menor que $\varepsilon^2/2$. Concluimos então que, para $t > T$,

$$\|v(\cdot,t) - v^\infty(\cdot,t)\| < \varepsilon,$$

o que completa a demonstração do teorema.

Observações Finais

1. Até agora temos feito a hipótese de que os dados iniciais (3) pertençam ao conjunto D descrito no início da Seç.4. Mas os resultados obtidos, como a fórmula (17) e o teorema da Seção 5, podem ser facilmente estendidos a dados iniciais mais gerais. Para isto notamos, pelo Lema 1, que a aplicação $h \to F$ é uma isometria do espaço $L^2(\mathbf{R}^n)$ no espaço $L^2(\mathbf{R} \times S^{n-1})$. Como D é denso em $L^2(\mathbf{R}^n)$, podemos estender os resultados obtidos a elementos h neste espaço por um procedimento clássico e freqüente de "extensão por continuidade" ([6], p. 33).

2. Os mesmos resultados referidos no número anterior se estendem à solução $u(x,t)$ de (2)-(3), bastando levar em conta a relação (6). Neste caso, é claro que $u^\infty(x,t)$ é simplesmente a parte real de $v^\infty(x,t)$.

3. O teorema da Seção 5 é também válido para a *energia* da solução u de (2)-(3). Designamos energia de u numa região R no instante t à expressão

$$E(u(\cdot,t),R) = \int_R (|\nabla u(x,t)|^2 + \frac{1}{c^2}|u_t(x,t)|^2)dx.$$

A *energia no espaço todo*, ou simplesmente "energia", é definida pela expressão anterior, tomando $R = \mathbf{R}^n$. Ela será indicada por $E(u(\cdot,t))$.

As soluções com $h \in D$ admitem energia finita, a qual é constante no tempo, isto é,

$$E(u(\cdot,t)) = E(u(\cdot,0)).$$

Essas soluções u podem ser ampliadas, ampliando-se o domínio D da função h, sem perder a propriedade de que a solução u tenha energia finita.

Para tais soluções, o teorema da Seção 5 permite provar que

$$E(u - u^\infty, R) \longrightarrow 0 \quad \text{com} \quad t \to \infty,$$

tanto no caso de uma região R qualquer, como no caso $R = \mathbf{R}^n$. Daqui segue também que

$$E(u, R) = E(u^\infty, R) + \varepsilon(R, t),$$

onde $\varepsilon(R,t) \longrightarrow 0$ com $t \to 0$, uniformemente em R, em particular com $R = re^n$.

A importância deste resultado reside no fato de que a energia de u pode ser estimada, assintoticamente com $t \to \infty$, pela energia de u^∞, que é uma onda divergente. Isto significa que a energia da solução aqui considerada é transportada, assintoticamente com $t \to \infty$, pela componente divergente da solução, ou seja, u^∞.

4. Todos esses resultados foram estendidos a sistemas hiperbólicos e às equações da Magnetodinâmica em [7] e [3] respectivamente.

Bibliografia

1. G. Ávila, "Cálculo 3 - Funções de Várias Variáveis," LTC Editora.
2. G. Ávila, *O Método da Fase Estacionária*, Matemática Universitária **9/10**.
3. G. Ávila, *Asymptotic Wave Functions and Energy Distribution in Magnetodynamics*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **379** (1987), 31–63.
4. D. G. Figueiredo, "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais," Projeto Euclides/IMPA.
5. F. John, "Partial Differential Equations," Springer-Verlag.
6. C. H. Wilcox, "Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains," Springer-Verlag.
7. C. H. Wilcox, *Asymptotic Wave Functions and Energy Distribution in Strongly Propagative Anisotropic Media*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **57** (1978), 275–321.
8. K. Yosida, "Functional Analysis," Springer-Verlag.