

# Fundamentos Matemáticos da Tomografia Computadorizada: Métodos de Expansão em Séries

Alfredo N. Iusem e Alvaro R. De Pierro

IMPA

Estrada Dona Castorina, 110  
22460 Rio de Janeiro, RJ

IMECC - UNICAMP  
Caixa Postal 6065  
13081 Campinas, SP

## 1. Os modelos matemáticos.

No artigo *Fundamentos Matemáticos da Tomografia Computadorizada: Métodos de Transformação* (Matemática Universitária nº 11), do qual este trabalho é uma segunda parte, foi descrito com certo detalhe o modelo físico da Tomografia Computadorizada, que retomamos aqui. Temos uma região limitada  $S$  de  $\mathbf{R}^2$  (que representa, por exemplo, uma secção plana do corpo humano) na qual está definida uma função  $f(x, y)$  que indica o *coeficiente de atenuação linear* (ou simplesmente *atenuação*) de raios  $X$  no ponto  $(x, y)$ , ou seja a fração da intensidade de um raio  $X$  que é absorvida num quadrado de lado  $dx$  com centro em  $(x, y)$ . Como tecidos diferentes têm atenuações diferentes, o conhecimento de  $f$  permite reconhecer a forma e tamanho dos órgãos presentes na secção  $S$ .

Em geral, é impossível medir  $f(x, y)$  num ponto interior de  $S$  sem intervenções cirúrgicas, mas é possível sim medir, com um detector de partículas, a fração total de intensidade atenuada ao

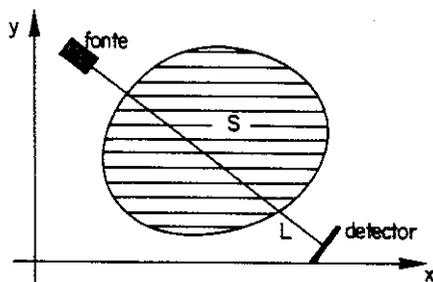


Fig. 1

longo da trajetória de um raio  $L$  que atravessa a região  $S$ , ou seja determinar a integral retilínea:

$$\varphi(L) = \int_L f(s) ds. \quad (1)$$

Vale a pena salientar que este modelo supõe muitas aproximações da realidade física. Os raios não são na verdade retas mas feixes, ou seja cones, a atenuação é função do comprimento de onda, e não é possível conseguir raios totalmente monocromáticos (ou seja de um único comprimento de onda), fenômenos de difração desviam as partículas de sua trajetória retilínea, etc. É preciso então, na prática, corrigir o valor medido de  $\varphi(L)$  para preservar a equação (1), levando em conta tais fatores perturbatórios. Isto, porém, não modifica essencialmente o modelo matemático descrito.

No artigo anterior mostrou-se que, conhecido  $\varphi(L)$  para toda reta  $L$  que atravessa  $S$ , é possível determinar a função  $f$  através da transformada inversa de Radon. Neste artigo estudamos uma abordagem alternativa. Supomos que a região  $S$  está contida num retângulo dividido em muitos quadrinhos chamados "pixels" (picture elements) e aceitamos que  $f$  é constante em cada pixel. A aproximação é razoável se os pixels são suficientemente pequenos.

Numeramos os pixels de 1 a  $n$  e chamamos  $x_j$  ao valor de  $f$  no pixel  $j$ . Agora a nossa incógnita não é uma função  $f(x, y)$  mas o vetor  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Também supomos que o número de raios é finito (como acontece na realidade). Se  $L_1, \dots, L_m$  são os raios cujas atenuações medimos, chamamos  $\varphi(L_i)$  (atenuação

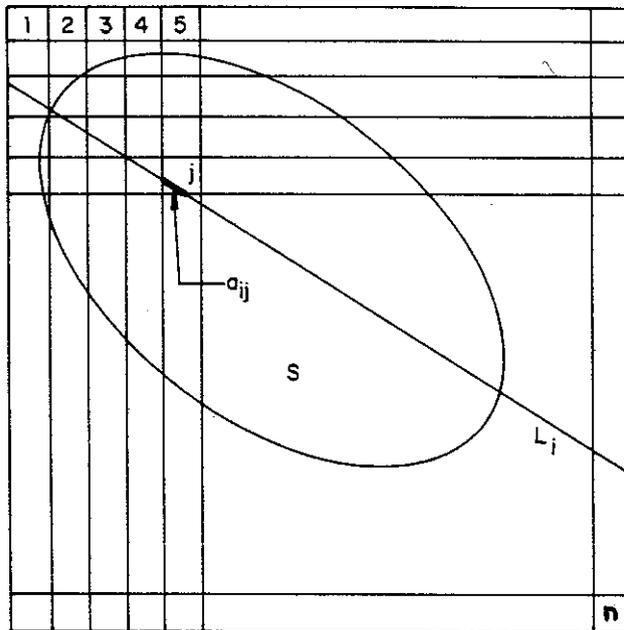


Fig. 2

total do  $i$ -ésimo raio) de  $b_i$ . A integral em (1) passa a ser a soma das integrais sobre cada pixel atravessado pelo raio  $L$ . É imediato então que (1) se reescreve como:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (1 \leq i \leq m) \quad (2)$$

onde  $a_{ij}$  é o comprimento da interseção do  $i$ -ésimo pixel ( $a_{ij}$  é zero se o raio  $i$  não passa pelo pixel  $j$ ). Em notação matricial:

$$Ax = b \quad (3)$$

onde  $A = \{a_{ij}\} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $b = \{b_i\} \in \mathbf{R}^m$ ,  $x = \{x_j\} \in \mathbf{R}^n$ . Se associamos aos valores de  $x_j$  tons de cinza entre o branco e o preto, a coloração numa tela de cada pixel com esses tons faz de cada vetor  $x$  uma imagem. O vetor  $x$  solução de (2) é a *imagem reconstruída*. Os erros e aproximações mencionadas sugerem que uma representação mais realista é:

$$b - \varepsilon \leq Ax \leq b + \varepsilon \quad (4)$$

onde  $b$  é o vetor das atenuações medidas e  $\varepsilon \in \mathbf{R}^n$  é um vetor de erros. Trocando o sinal da desigualdade esquerda de (4) podemos reescrever (4) como:

$$\bar{A}x \leq \bar{b} \quad (5)$$

com  $\bar{A} \in \mathbf{R}^{2m \times n}$ ,  $\bar{b} \in \mathbf{R}^{2m}$ , definidos em forma natural.

Por variados motivos, é freqüente que tanto (3) quanto (5) tenham soluções múltiplas. Neste caso pode se procurar a solução de (3) ou (5) que minimize uma certa funcional  $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ , ou seja resolver:

$$\begin{aligned} \min h(x) \\ \text{sujeito a } Ax = b \end{aligned} \quad (6)$$

ou:

$$\begin{aligned} \min h(x) \\ \text{sujeito a } \bar{A}x \leq \bar{b} \end{aligned} \quad (7)$$

Dois formas interessantes para  $h$  são

$$h(x) = \|x - x^o\|^2 \quad (x^o \in \mathbf{R}^n) \quad (8)$$

$$h(x) = - \sum_{j=1}^n x_j \log x_j \quad (9)$$

O motivo para usar (8) é que em tomografia médica em geral é conhecida uma certa imagem "normal"  $x^o$  (ou seja, a imagem corespondente ao caso em que o paciente não tem "nada estranho lá dentro"). Se o paciente está fazendo a tomografia é porque se espera (ou se teme) que  $x \neq x^o$ , mas mesmo assim é quase certo que  $x_j \simeq x_j^o$  para a grande maioria dos pixels  $j$  (se  $x_j$  é muito diferente de  $x_j^o$  para todo  $j$ , certamente o paciente já morreu e a tomografia é desnecessária). Parece então razoável procurar a imagem  $x$  compatível com as medições (ou seja satisfazendo (3) ou (5)) mais próxima a  $x^o$ , isto é usar (6) ou (7) com  $h$  como em (8). O motivo para usar (9) é que nesse caso obtemos a solução de máxima entropia, que em certo sentido é a mais provável (ver em [8] um modelo estatístico que justifica matematicamente esta afirmação).

Na seção 2.6 discutiremos as vantagens e desvantagens práticas desta abordagem comparada com os métodos de transformação. Podemos no entanto adiantar já uma vantagem deste

modelo: se se dispõe de informação adicional (alguns valores de  $x_j$ , limites superiores ou inferiores dos mesmos, simetrias, etc.) não há problema em incorporá-la nesta formulação, adicionando linhas em (3) ou (5), na medida em que seja possível representá-la como equações ou desigualdades lineares nos  $x_j$ . Isto é consideravelmente mais difícil (ou mesmo impossível) nos métodos de transformação.

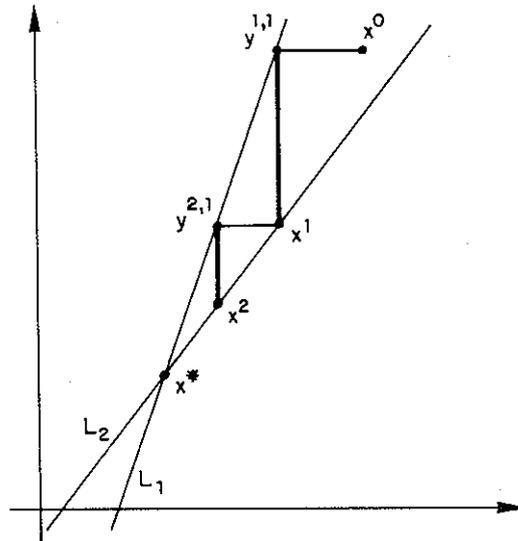
## 2. Métodos.

### 2.1. Introdução.

Colocado o problema na forma (3) ou (5) esta seção pareceria absolutamente dispensável. (3) é um simples sistema de equações lineares, e existem variados métodos que calculam soluções exatas de (3) num número finito de operações: eliminação gaussiana (escalonamento de  $A$ ) por exemplo. O mesmo acontece com (5) que pode ser resolvido usando qualquer algoritmo de Programação Linear, como a fase I do Simplex, o algoritmo de Karmarkar, etc. (ver [9]).

A situação, porém, é mais complexa, como conseqüência das características da matriz  $A$ . Para que a aproximação seja boa, ou seja para obtermos imagens nítidas, o número  $n$  de pixels tem que ser grande, talvez de ordem  $10^5$  ou maior. O número  $m$  de raios costuma ser pelo menos de ordem  $10^4$ . Assim,  $A$  tem normalmente uns  $10^9$  coeficientes. Mas acontece que a grande maioria são zero: se os  $n$  pixels formam um quadrado, é fácil ver na figura 2 que nenhum raio atravessa mais de  $2\sqrt{n}$  pixels, o que implica que a *densidade* de  $A$  (proporção de coeficientes não nulos) é de ordem  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Naturalmente, só são armazenados os coeficientes não nulos. O número deles, mesmo assim, é elevado. Acontece que os métodos acima mencionados alteram paulatinamente a matriz  $A$  introduzindo valores não nulos onde originariamente há zeros. Tal fenômeno é chamado de *fill-in*. Existem métodos sofisticados de escolha de pivôs para reduzir tanto quanto possível o fill-in, mas não se pode esperar a solução de um sistema de densidade baixa com um fill-in de menos de 100% (ou seja duplicando o número de coeficientes não nulos). Essa situação é tolerável para matrizes grandes mas nem tanto (digamos de ordem  $10^3 \times 10^3$ ), mas resulta insuportável nas dimensões que estamos considerando.

Foi assim que os matemáticos foram procurar os velhos



**Fig.3: Método de Gauss-Seidel**

*métodos iterativos* que não têm este inconveniente. Estes métodos não calculam uma solução exata, e sim geram uma seqüência  $\{x^k\} \subset \mathbf{R}^n$  que, espera-se, converge a um ponto  $x^*$  solução do sistema (3) ou (5).

## 2.2. Os métodos de Gauss-Seidel e Jacobi.

Começamos descrevendo os métodos de Gauss-Seidel e Jacobi, de começo do século XIX. As figuras 3 e 4 representam ambos os algoritmos para um sistema como (3) com  $A$  não singular de tamanho  $2 \times 2$ .

No algoritmo de Gauss-Seidel, com  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , tomamos um ponto inicial  $x^0 \in \mathbf{R}^n$  e modificamos a 1ª componente para satisfazer a 1ª equação (deixando as outras fixas), obtendo o ponto  $y^{1,1}$ ; logo modificamos a 2ª componente de  $y^{1,1}$  para satisfazer a 2ª equação (deixando as outras fixas), obtendo  $y^{1,2}$  e continuamos assim até obter  $y^{1,m}$ , que é chamado de  $x^1$ , o segundo iterado. Repetimos o procedimento com  $x^1$  no lugar de  $x^0$ , obtendo  $x^2$ , e assim geramos a seqüência  $\{x^k\}$ . No caso de Jacobi,  $y^{1,1}$  é obtido da mesma forma, mas para calcular  $y^{1,2}, \dots, y^{1,m}$  não ajustamos,

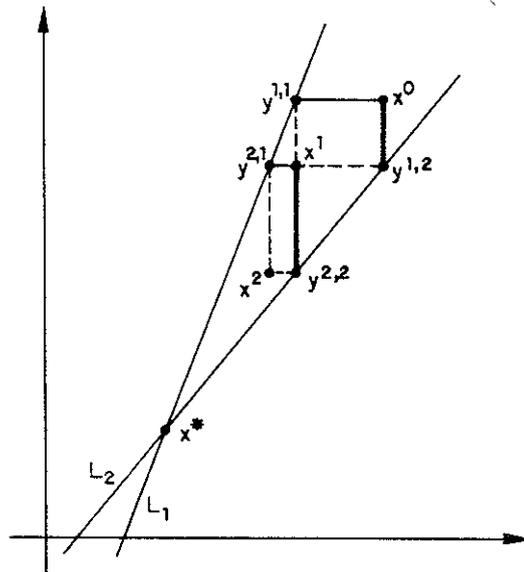


Fig. 4: Método de Jacobi

como em Gauss-Seidel, os vetores  $x^{1,j}$  já calculados, e sim que procedemos sempre a partir de  $x^0$ ; assim  $y^{1,j}$  tem só a  $j$ -ésima componente diferente de  $x^0$ . O segundo iterado,  $x^1$ , se obtém tomando a componente modificada de cada  $y^{1,j}$ , ou seja  $x_j^1 = y_j^{1,j}$ . Também neste caso o procedimento se repete com  $x^1$  no lugar de  $x^0$  para obter  $x^2$ , etc.

Antes de discutir a convergência destes métodos, observamos que, pelo menos nas figuras 3 e 4, a seqüência de Gauss-Seidel parece se aproximar da única solução  $x^*$  muito mais rapidamente que a de Jacobi. Isto é verdade em geral, mas o algoritmo de Jacobi tem uma vantagem compensatória: os vetores auxiliares  $y^{k,j}$  (com  $k$  fixo) do método de Gauss-Seidel têm que ser calculados *em seqüência* já que o cálculo de cada um deles requer o anterior. Já o método de Jacobi, em princípio, permite o cálculo *simultâneo* dos  $y^{k,j}$  (com  $k$  fixo). Assim, num computador com processadores paralelos o método de Jacobi pode ser mais eficiente que o de Gauss-Seidel. Esta distinção entre algoritmos *sequenciais* (como Gauss-Seidel) e *paralelos* (como Jacobi) se mantém quando

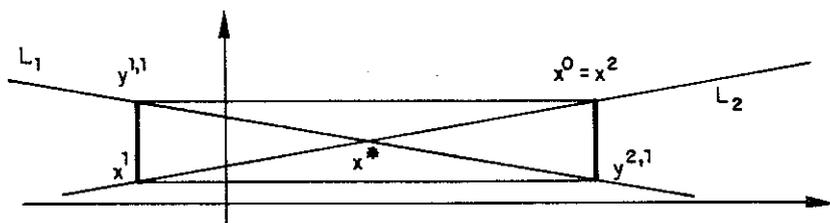


Fig. 5

passamos a métodos mais sofisticados.

A respeito da convergência, a situação não é muito satisfatória. Embora em casos como os das figuras 3 e 4 temos convergência, esta não é invariante por transformações ortogonais, ou seja por rotações dos eixos coordenados. Por exemplo, no caso da figura 5, é evidente que o algoritmo de Gauss-Seidel entra em "loop".

O motivo é que as projeções são tomadas paralelamente aos eixos, que de certa forma são alheios à geometria do problema. Os teoremas de convergência destes métodos exigem que o *raio espectral* da matriz de iteração associada com  $A$  (ou seja o máximo dos módulos dos autovalores) seja menor que 1.

### 2.3. Os métodos de Kaczmarz e Cimmino.

O problema mencionado desaparece nos métodos de Kaczmarz (1938) e Cimmino (1937), que podem ser vistos como versões mais sofisticadas dos métodos de Gauss-Seidel e Jacobi, com projeções ortogonais sobre os hiperplanos definidos pelas equações do sistema.

Doravante,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\| \cdot \|$  indicam o produto escalar e a norma usuais em  $\mathbf{R}^n$ . Em geral, dado um hiperplano  $H = \{y \in \mathbf{R}^n : \langle a, y \rangle = \beta\}$  (com  $a \in \mathbf{R}^n$ ,  $\beta \in \mathbf{R}$ ) e um ponto  $x \in \mathbf{R}^n$ , o ponto de  $H$  mais próximo a  $x$  é  $\pi_H(x)$ , definido por:

$$\pi_H(x) = x - \frac{(\langle a, x \rangle - \beta)a}{\|a\|^2} \quad (10)$$

Então o algoritmo de Kaczmarz para o sistema  $Ax = b$  (com

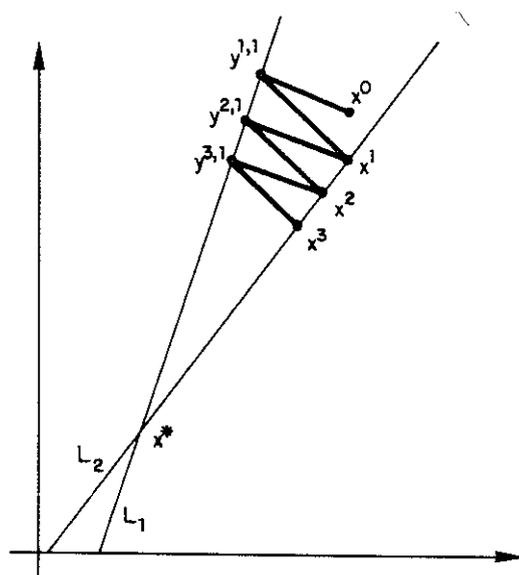


Fig. 6: Método de Kaczmarz

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , chamando as linhas de  $A$  de  $a^i$ ) pode ser descrito como:

Inicialização:

$$x^0 \in \mathbb{R}^n \quad (11)$$

Passo iterativo: Dado  $x^k$ , defina  $y^{k+1,0} = x^k$  e calcule sequencialmente:

$$y^{k+1,i} = y^{k+1,i-1} - \frac{(\langle a^i, y^{k+1,i-1} \rangle - b_i) a^i}{\|a^i\|^2} \quad (1 \leq i \leq m) \quad (12)$$

$$x^{k+1} = y^{k+1,m} \quad (13)$$

ou seja, obtemos  $x^{k+1}$  projetando *sequencialmente*  $x^k$  sobre todos os hiperplanos  $H_i = \{y : \langle a^i, y \rangle = b_i\}$  que determinam o sistema  $Ax = b$ .

No caso de Cimmino, tomamos pesos  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) satisfazendo:

$$\lambda_i > 0 \quad (1 \leq i \leq m) \quad (14)$$

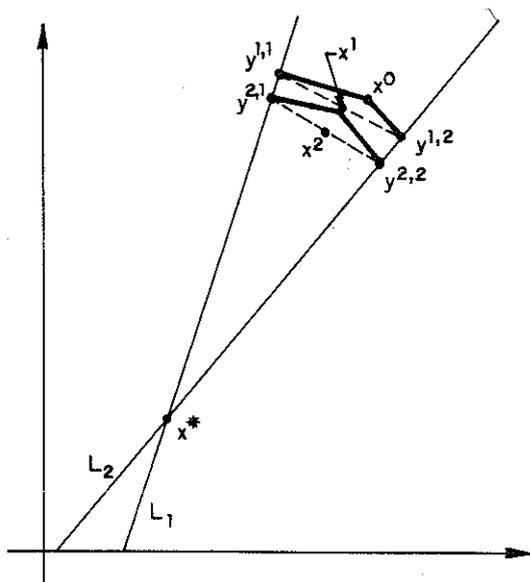


Fig. 7: Método de Cimmino

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \quad (15)$$

e projetamos  $x^k$  sobre todos os hiperplanos  $H_i$ , obtendo as projeções  $y^{k+1,i}$ .  $x^{k+1}$  é a média de  $y^{k+1,1}, \dots, y^{k+1,m}$  com pesos  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Formalmente:

Inicialização:

$$x^0 \in \mathbb{R}^n \quad (16)$$

Passo iterativo: Dado  $x^k$ :

$$x^{k+1} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left[ x^k - \frac{(\langle a^i, x^k \rangle - b_i) a^i}{\|a^i\|^2} \right]$$

ou, equivalentemente:

$$x^{k+1} = x^k - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{(\langle a^i, x^k \rangle - b_i) a^i}{\|a^i\|^2} \quad (17)$$

Note-se que o método de Kaczmarz é sequencial e o de Cimmino paralelo, com a notação da seção 2.2.

## 2.4. Desigualdades.

Vejam os métodos estendidos a um sistema de desigualdades  $Ax \leq b$  (ou seja  $\langle a^i, x \rangle \leq b_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ), onde  $a^i$  são as linhas de  $A$ ). Dados  $A \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  consideramos o semi-espaço  $T = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle a, y \rangle \leq \beta\}$ . É imediato que dado  $x \in \mathbb{R}^n$  o ponto  $\pi_T(x)$  mais próximo a  $x$  em  $T$  pode ser calculado da seguinte forma: se  $\langle a, x \rangle \leq \beta$  então  $x \in T$  e  $\pi_T(x) = x$ . Se  $\langle a, x \rangle > \beta$  então  $\pi_T(x)$  é o ponto mais próximo a  $x$  no hiperplano  $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle a, y \rangle = \beta\}$  ou seja  $\pi_T(x) = \pi_H(x)$ , dado por (10). Isto pode ser resumido como:

$$\pi_T(x) = x - \frac{1}{\|a\|^2} \max\{0, \langle a, x \rangle - \beta\}a \quad (18)$$

Então os passos iterativos dos algoritmos de Kaczmarz e Cimmino para *desigualdades* ficam:

Kaczmarz:

$$y^{k+1,0} = x^k \quad (19)$$

$$y^{k+1,i} = y^{k+1,i-1} - \frac{1}{\|a^i\|^2} \max\{0, \langle a^i, y^{k+1,i-1} \rangle - b_i\}a^i \quad (1 \leq i \leq m) \quad (20)$$

$$x^{k+1} = y^{k+1,m} \quad (21)$$

Cimmino:

$$x^{k+1} = x^k - \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\|a^i\|^2} \max\{0, \langle a^i, x^k \rangle - b_i\}a^i \quad (22)$$

onde as projeções são feitas sobre os semi-espaços  $T_i = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle a^i, y \rangle \leq b_i\}$ .

## 2.5. Relaxação.

A idéia de *relaxação* é que as projeções de  $x^k$  sobre os semi-espaços indicam uma direção apropriada para o avanço do algoritmo, mas não há, estritamente, necessidade de que os vetores  $y^{k,j}$  sejam projeções exatas. Podemos ficar na metade do caminho ou ir um pouco além da projeção exata, ou seja, se  $\pi_T(x)$  é a projeção de  $x$  sobre o semi-espaço  $T$ , substituímos no algoritmo  $\pi_T(x)$  por um ponto  $\tilde{\pi}_T(x)$  na reta que passa por  $x$  e  $\pi_T(x)$ :

$$\tilde{\pi}_T(x) = \alpha \pi_T(x) + (1 - \alpha)x = x - \frac{\alpha}{\|a\|^2} \max\{0, \langle a, x \rangle - \beta\}a \quad (23)$$

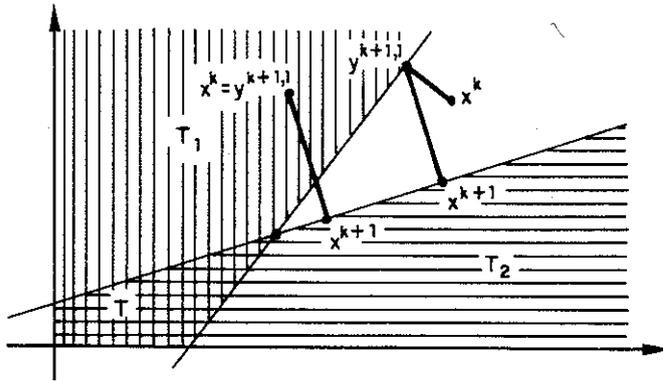


Fig. 8 : Método de Kaczmarz para desigualdades

Assim, os passos iterativos dos algoritmos de Kaczmarz e Cimmino relaxados ficam:

Kaczmarz:

$$y^{k+1,0} = x^k \quad (24)$$

$$y^{k+1,i} = y^{k+1,i-1} - \frac{\alpha}{\|a^i\|} \max\{0, \langle a^i, y^{k+1,i-1} \rangle - b_i\} a^i \quad (25)$$

$$x^{k+1} = y^{k+1,m} \quad (26)$$

Cimmino:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\|a^i\|} \max\{0, \langle a^i, x^k \rangle - b_i\} a^i \quad (27)$$

Veremos logo que para garantir a convergência dos algoritmos deve-se tomar  $0 < \alpha < 2$ . Quando  $\alpha = 1$ , recuperamos o algoritmo original (não relaxado). A experiência computacional mostra que a escolha de valores de  $\alpha$  diferentes de 1 pode acelerar consideravelmente a convergência. O algoritmo se diz *subrelaxado* se  $\alpha \in (0, 1)$  e *sobre-relaxado* se  $\alpha \in (1, 2)$ .

## 2.6. Métodos de ação de linha.

Todos os métodos das seções 2.2-2.5 evitam o problema do fill-in e podem ser caracterizados, em geral, pelas duas seguintes propriedades:

- a) A matriz  $A$  não é modificada no procedimento.

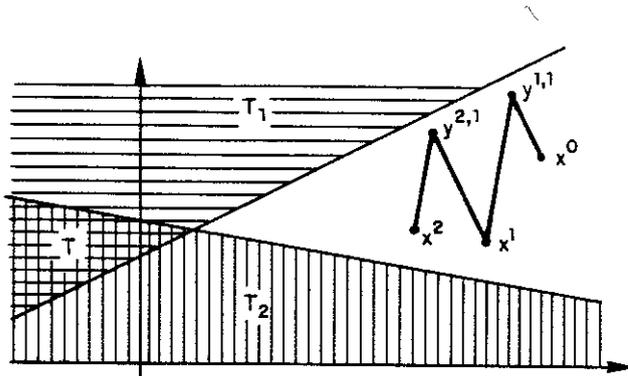


Fig.9: Método de Kaczmarz Subrelaxado

- b) Em cada passo usa-se só uma linha de  $A$  e um (ou uns poucos) vetores de dimensão  $n$ .

No caso do algoritmo de Kaczmarz calculamos  $y^{k,i}$  usando  $a^i$  e só um vetor:  $y^{k,i-1}$ . No caso de Cimmino precisamos além de  $a^i$ , dois vetores:  $x^k$  e a soma parcial  $\sum_{\ell=1}^{i-1} \frac{\lambda_{\ell}}{\|a^{\ell}\|^2} \max\{0, \langle a^{\ell}, x^k \rangle - b_{\ell}\} a^{\ell}$

Métodos que satisfazem a) e b) são ditos de *ação de linha* (row-action) e são especialmente adequados para aplicações em tomografia (ver [1]). São mais lentos que os métodos diretos (como

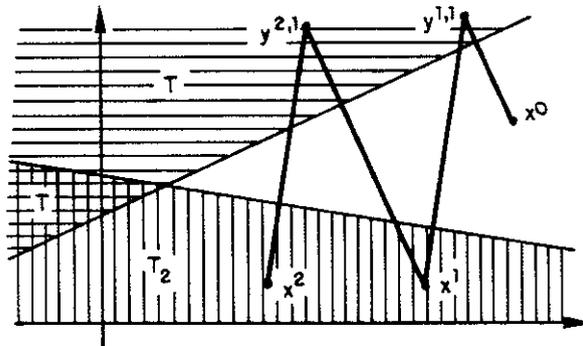


Fig.10: Método de Kaczmarz Sobrerelaxado

eliminação gaussiana) mas, como já explicamos, os métodos diretos não são aplicáveis no caso da tomografia devido ao fill-in.

Se compararmos estes métodos com os métodos de transformação, novamente a desvantagem dos métodos de ação de linha é a lentidão, mas eles são úteis em certas circunstâncias especiais: por exemplo quando não temos raios que cubram uma certa faixa de ângulos (isto acontece em tomografia industrial onde muitas vezes é impossível rodear com um anel de detectores o objeto, que pode ser, por exemplo, um avião). Nestes casos o cálculo da transformada inversa de Radon pode ser muito prejudicado, mas os efeitos negativos são bem menores para métodos de ação de linha. Também, o fato de produzir uma seqüência de aproximações à imagem procurada permite relizar ajustes ("suavizar a imagem") ao longo do procedimento (ver [7]). Além disso a lentidão, que poderia ser proibitiva em aplicações que exigem alta precisão, é um obstáculo menos grave em reconstrução de imagens: o número de tonalidades de cinza perceptíveis pelo olho humano não é muito grande, e um erro de 5% (ou até de 10%) pode ser tolerável. Em resumo, estes métodos compensam a sua lentidão com uma maior flexibilidade, se tornando úteis em situações onde a moldura rígida dos métodos de transformação impede a geração de boas imagens.

Vale a pena mencionar aqui as influências tecnológicas que motivaram os altos e baixos do prestígio dos métodos iterativos para sistemas lineares. Até o advento dos computadores, eles eram preferidos aos métodos diretos (tipo eliminação) devido a outra vantagem: são mais robustos. Se ao longo do processo iterativo um erro é cometido, o próprio método se encarrega de corrigí-lo: tudo é como se começássemos de novo com outro  $x^0$  (no pior dos casos, atrasaremos um pouco a convergência). Num método de eliminação qualquer erro estraga a solução, e qualquer um que tentou resolver à mão um sistema linear de 10 por 10 sabe que a probabilidade de cometer ao menos um erro é bem alta. A aparição dos computadores (que não erram) mudou o panorama; os métodos diretos monopolizaram a cena, foram incessantemente aprimorados com a introdução de melhores fatorizações matriciais e estratégias de escolha dos pivôs, e os métodos iterativos foram esquecidos, não se registrando avanço nenhum nos 20 anos seguintes aos trabalhos de Cimmino e Kaczmarz (houve também outros motivos coadjuvantes: o jovem e promissor Kaczmarz foi literalmente es-

magado, junto com boa parte da cavalaria polonesa, pelos tanques alemães em setembro de 1939; digamos também, para completar este parêntese de "trivia", que Cimmino ainda vive e trabalha em Roma). No começo da década de 70, um novo avanço tecnológico, o tomógrafo, tira estes métodos do esquecimento e os coloca novamente no palco. É interessante mencionar que após o primeiro algoritmo pouco prático de Cormack, que recebeu junto com Hounsfield o prêmio Nobel de Medicina pela invenção do tomógrafo, Herman e Bender redescobriram o algoritmo de Kaczmarz, que jazia esquecido nos anais da Academia Polonesa de Ciências, e o chamaram, por motivos hoje irrelevantes, de método de expansão em séries. Este algoritmo foi usado no primeiro tomógrafo comercial, fabricado pela empresa EMI. A nomenclatura ficou, embora seja mais preciso chamar estes métodos de *algébricos* ou *iterativos*. Os últimos 20 anos viram uma atividade razoavelmente intensa nesta área e o processo continua: os métodos iterativos na Tomografia e na Álgebra Linear são objeto de um número especial da revista *Linear Algebra and Its Applications* (volume 130, março de 1990) e de um simpósio internacional a ser realizado na Bélgica em abril de 1991.

### 3. Análise de convergência.

#### 3.1. O problema de viabilidade convexa.

Como acontece freqüentemente em Matemática, a análise de convergência destes algoritmos fica mais simples se consideramos um problema "a priori" mais complexo. Observe-se que, se  $H_i = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle a^i, y \rangle = b_i\}$ , resolver o sistema  $Ax = b$  é o mesmo que achar um ponto pertencente a  $H = \bigcap_{i=1}^m H_i$ . Analogamente, se  $T_i = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle a^i, y \rangle \leq b_i\}$ , resolver o sistema  $Ax \leq b$  é equivalente a achar um ponto  $x$  em  $T = \bigcap_{i=1}^m T_i$ . Generalizando estas situações, o *problema de viabilidade convexa* (PVC) consiste em, dados conjuntos convexos e fechados  $C_1, \dots, C_m \subset \mathbb{R}^n$ , achar  $x \in C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ . É claro que  $Ax = b$ ,  $Ax \leq b$  são casos particulares de PVC. Afirmamos que os algoritmos de Kaczmarz e Cimmino se estendem facilmente a este problema.

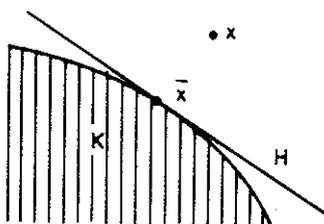


Fig. 11

Dado um conjunto fechado  $K \subset \mathbb{R}^n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  é sabido que existem pontos  $\bar{x}$  em  $K$  que minimizam a distância a  $K$  (ou seja  $\|\bar{x} - x\| \leq \|y - x\| \forall y \in K$ ). Se  $K$  é convexo (isto é, contém o segmento entre dois pontos quaisquer pertencentes a ele),  $\bar{x}$  é único. A função  $\pi_K: \mathbb{R}^n \rightarrow K$  definida como  $\pi_K(x) = \bar{x}$  é a *projeção ortogonal* sobre  $K$ . A unicidade de  $\bar{x}$  é uma das conseqüências do *Teorema de Separação de Convexos* (ver [12], Teorema 11.2), que diz (numa formulação fraca) que:

*Dados um convexo fechado  $K \subset \mathbb{R}^n$  e um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  que não pertence a  $K$  existe um hiperplano  $H$  que deixa  $x$  de um lado e  $K$  de outro.  $H$  pode ser escolhido de forma que passe por um ponto  $\bar{x}$  de  $K$  que minimiza a distância a  $x$ .*

Uma conseqüência imediata deste teorema é que o ângulo entre  $x$ ,  $\pi_K(x)$  e qualquer ponto  $z$  de  $K$  é obtuso.

Ou seja:

$$\langle z - \pi_K(x), x - \pi_K(x) \rangle \leq 0 \quad \forall z \in K, x \in \mathbb{R}^n \quad (28)$$

(Note-se que se  $x \in K$  então  $\pi_K(x) = x$  e temos igualdade em (28)). Como  $\text{Im}(\pi_K) = K$  podemos reescrever (28) da seguinte



Fig. 12

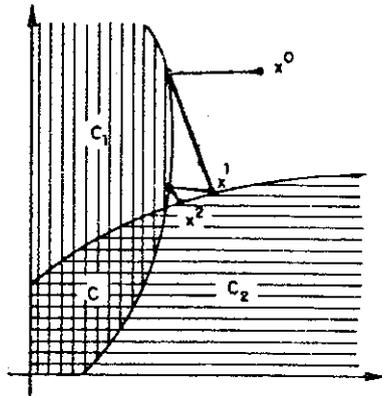


Fig.13: Kaczmarz sem Relaxação

forma:

$$\langle \pi_K(y) - \pi_K(x), x - \pi_K(x) \rangle \leq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (29)$$

Agora dado o PVC com convexos fechados  $C_1, \dots, C_m \subset \mathbb{R}^n$  podemos considerar as versões relaxadas *não lineares* dos algoritmos de Kaczmarz e Cimmino da seguinte forma: definimos  $P_i: \mathbb{R}^n \rightarrow C_i$  como  $P_i = \pi_{C_i}$  e, dado  $\alpha \in (0, 2)$ , definimos  $P_i^\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como:

$$P_i^\alpha(x) = (1 - \alpha)x + \alpha P_i(x). \quad (30)$$

Definimos também  $P, \bar{P}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como:

$$P(x) = (P_m^\alpha \circ \dots \circ P_2^\alpha \circ P_1^\alpha)(x) \quad (31)$$

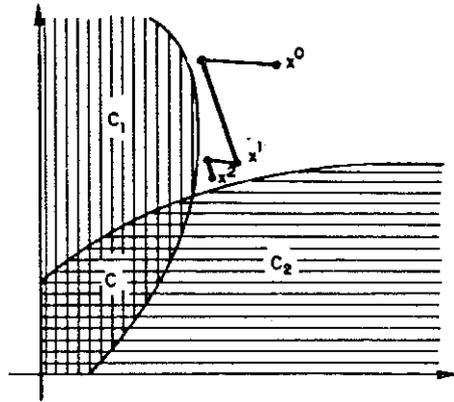
$$\bar{P}(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i^\alpha(x) \quad (32)$$

onde o indica composição de funções e os  $\lambda_i$  satisfazem (14), (15). Então o passo iterativo do algoritmo de Kaczmarz é dado por:

$$x^{k+1} = P(x^k) \quad (33)$$

e o de Cimmino por:

$$x^{k+1} = \bar{P}(x^k). \quad (34)$$



**Fig.14: Kaczmarz Subrelaxado**

Isto é, substituímos as projeções sobre os hiperplanos  $H_i$  ou semiespaços  $T_i$  por projeções sobre convexos fechados arbitrários  $C_i$ . Provaremos que as seqüências  $\{x^k\}$  geradas por (33), (34) convergem a pontos pertencentes a  $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ , ou seja as soluções de PVC. Assim, os algoritmos podem ser usados para resolver sistemas de desigualdades convexas:

$$g_i(x) \leq 0 \quad (1 \leq i \leq m) \quad (35)$$

com  $g_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  convexa (ou seja  $g_i(\gamma x + (1-\gamma)y) \leq \gamma g_i(x) + (1-\gamma)g_i(y)$  para todo  $x, y \in \mathbf{R}^n$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ ), tomando  $C_i = \{y \in \mathbf{R}^n : g_i(y) \leq 0\}$ , que, como se verifica facilmente, é convexo e fechado.

Vale a pena salientar que os algoritmos (33), (34) são de certa forma teóricos: para convexos  $C_i$  arbitrários não há fórmulas fechadas das projeções  $P_i$  (como (10) para hiperplanos e (18) para semi-espaços). No entanto, é possível provar que se substituímos as  $P_i$  por projeções aproximadas  $\tilde{P}_i$  (que na verdade são projeções exatas sobre hiperplanos que separam  $x$  de  $C_i$ ), calculáveis a partir dos gradientes das  $g_i$ , a convergência se preserva. Aqui nos preocuparemos somente com a convergência de (33), (34) e não com a implementação prática, já que no caso de interesse em tomografia de raios  $X$  os  $C_i$  são hiperplanos ou semi-espaços para os quais temos as fórmulas fechadas (10), (18), bem simples aliás. Mencionemos que há modelos matemáticos de tomografia de ultrassom onde aparecem convexos  $C_i$  não lineares.

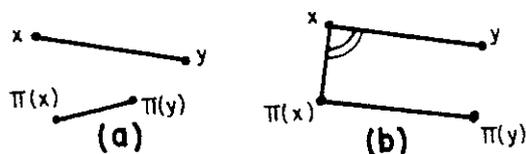


Fig.15

Dada uma iteração do tipo:

$$x^{k+1} = U(x^k) \quad (36)$$

com  $U: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  é fácil ver que se  $U$  é uma contração estrita (ou seja,  $\|U(x) - U(y)\| \leq \rho \|x - y\|$  para todo  $x, y \in \mathbf{R}^n$ ,  $\rho \in (0, 1)$ ) então  $\{x^k\}$  converge a um ponto fixo de  $U$ . A projeção  $\pi_k$  sobre um convexo não é uma contração estrita, mas o Teorema de Separação de Convexos nos permite provar a seguinte proposição, que resulta suficiente para estabelecer a convergência de (33), (34).

PROPOSIÇÃO 1: Seja  $\pi$  a projeção ortogonal sobre o convexo fechado  $K \subset \mathbf{R}^n$ . Então:

- i)  $\|\pi(x) - \pi(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n$ .
- ii) Se  $\|\pi(x) - \pi(y)\| = \|x - y\|$  então:
  - a)  $\pi(x) - \pi(y) = x - y$ ,
  - b)  $\langle y - x, \pi(x) - x \rangle = 0$ .

A figura 15 ilustra a Proposição 1: (c), (d) e (e) violam i), ii a), ii b) respectivamente. Provamos a proposição usando (29):

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0 \quad (37)$$

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (38)$$

Somando (37) e (38):

$$\begin{aligned} \|\pi(x) - \pi(y)\|^2 &\leq \langle x - y, \pi(x) - \pi(y) \rangle \\ &\leq \|x - y\| \|\pi(x) - \pi(y)\|. \end{aligned} \quad (39)$$

Se  $\|\pi(x) - \pi(y)\| = 0$ , i) é trivialmente certo; caso contrário dividimos (39) por  $\|\pi(x) - \pi(y)\|$  obtendo:

$$\|\pi(x) - \pi(y)\| \leq \|x - y\| \quad (40)$$

e i) está provado. Se:

$$\|\pi(x) - \pi(y)\| = \|x - y\| \quad (41)$$

então temos igualdades em (39) e resulta da igualdade direita que  $x - y$  e  $\pi(x) - \pi(y)$  são colineares, ou seja:

$$x - y = \sigma(\pi(x) - \pi(y)) \quad (42)$$

com  $\sigma \in \mathbf{R}$ . Usando (41) resulta  $\sigma = 1$ , isto é:

$$x - y = \pi(x) - \pi(y) \quad (43)$$

ou seja que ii a) está provado. Finalmente, a igualdade esquerda em (39) implica igualdade em (37), (38). No caso de (37):

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle = 0 \quad (44)$$

e ii b) é consequência imediata de (43), (44). ■

### 3.2. A classe $\mathcal{F}$ .

A Proposição 1 sugere considerar o conjunto  $\mathcal{F}$  das funções contínuas  $Q: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  tais que:

- 1)  $\|Q(x) - Q(y)\| \leq \|x - y\|$ .
- 2) Se  $\|Q(x) - Q(y)\| = \|x - y\|$  então:
  - a)  $Q(x) - Q(y) = x - y$ ,
  - b)  $\langle y - x, Q(x) - x \rangle = 0$ .

Deixamos ao leitor como exercício a seguinte propriedade de  $\mathcal{F}$ :

PROPOSIÇÃO 2:  $\mathcal{F}$  é fechada por composição e por combinações convexas. Isto é, se  $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{F}$  então  $Q_m \circ \dots \circ Q_2 \circ Q_1 \in \mathcal{F}$  e  $\sum_{i=1}^m \lambda_i Q_i \in \mathcal{F}$ , onde os  $\lambda_i$  satisfazem (14), (15).

Note-se que basta provar a proposição para  $m = 2$ . No caso das combinações convexas deve-se usar a convexidade da norma:

$$\left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i y^i \right\| \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \|y^i\| \text{ para todo } y^1, \dots, y^m \in \mathbb{R}^n.$$

A Proposição 1 diz que as projeções  $P_i$  sobre os convexos fechados  $C_i$  estão em  $\mathcal{F}$ . Um cálculo semelhante ao feito na Proposição 1, que deixamos também como exercício, mostra que as projeções relaxadas  $P_i^\alpha$  definidas em (30) também estão em  $\mathcal{F}$  se  $\alpha \in (0, 2)$  (para  $\alpha \in (0, 1)$  isto é consequência imediata da Proposição 2:  $P_i^\alpha = \lambda_1 I + \lambda_2 P_i$  com  $\lambda_1 = \alpha$ ,  $\lambda_2 = 1 - \alpha$  e  $I$  a função identidade;  $P_i$  está em  $\mathcal{F}$  pela Proposição 1 e a identidade pertence a  $\mathcal{F}$  trivialmente). Usando a Proposição 2, resulta que  $P, \bar{P}$  definidos em (31), (32) estão em  $\mathcal{F}$ . A convergência dos algoritmos de Kaczmarz e Cimmino (33), (34) é então consequência do:

TEOREMA 1: Sejam  $Q \in \mathcal{F}$  e  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Considere a seqüência  $x^{k+1} = Q(x^k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Seja  $F$  o conjunto de pontos fixos de  $Q$  ( $F = \{y \in \mathbb{R}^n : Q(y) = y\}$ ). Então  $\{x^k\}$  converge se e somente se  $F$  é não vazio, em cujo caso o limite  $x^*$  de  $\{x^k\}$  pertence a  $F$ .

PROVA: Se  $\{x^k\}$  converge a  $x^*$ , tomando limite com  $k \rightarrow \infty$  em  $x^{k+1} = Q(x^k)$ , e usando a continuidade de  $Q$ , temos  $x^* = Q(x^*)$  ou seja  $x^* \in F$  e  $F \neq \emptyset$ .

Suponhamos então  $F \neq \emptyset$  e provemos que  $\{x^k\}$  converge. Fixemos  $z \in F$ ; então  $Q(z) = z$  e usando a propriedade 1 da classe  $\mathcal{F}$ :

$$\|x^{k+1} - z\| = \|Q(x^k) - Q(z)\| \leq \|x^k - z\| \quad (45)$$

ou seja que a seqüência numérica  $\{\|x^k - z\|\}$  é decrescente. Iterando (45):

$$\|x^{k+1} - z\| \leq \|x^k - z\| \leq \dots \leq \|x^0 - z\| \quad (46)$$

isto é, a seqüência  $\{x^k\}$  está contida numa bola de centro em  $z$  e raio  $\|x^0 - z\|$ .  $\{x^k\}$  é portanto limitada e então existe uma

subseqüência convergente  $\{x^{j_k}\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) de  $\{x^k\}$ . Seja  $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{j_k}$ . Usando reiteradamente (45):

$$\begin{aligned} \|x^{j_{k+1}} - z\| &\leq \|x^{j_{k+1}} - z\| = \|Q(x^{j_k}) - Q(z)\| \\ &\leq \|x^{j_k} - z\| \end{aligned} \quad (47)$$

Tomando limites em (47) com  $k \rightarrow \infty$ :

$$\|x^* - z\| \leq \|Q(x^*) - Q(z)\| = \|Q(x^*) - z\| \leq \|x^* - z\| \quad (48)$$

ou seja:

$$\|Q(x^*) - Q(z)\| = \|x^* - z\| \quad (49)$$

Usando 2 a):

$$Q(x^*) - z = Q(x^*) - Q(z) = x^* - z \quad (50)$$

isto é:

$$Q(x^*) = x^* \quad (51)$$

Provamos assim que  $x^* \in F$ . Mas então podemos usar (45) com  $x^*$  no lugar de  $z$ : a seqüência numérica  $\{\|x^k - x^*\|\}$  é decrescente, não negativa e tem uma subseqüência  $(\{\|x^{j_k} - x^*\|\})$  convergente a 0. É imediato que a seqüência inteira converge a 0, ou seja  $\|x^k - x^*\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  o que equivale a  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$ . ■

### 3.3. Convergência dos algoritmos de Kaczmarz e Cimmino.

O Teorema 1 implica que os algoritmos de Kaczmarz e Cimmino convergem se os conjuntos de pontos fixos de  $P$  e  $\overline{P}$  são não vazios. Lembremos que o nosso objetivo é resolver PVC, ou seja achar  $x$  pertencente a  $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ . A análise fica fechada com:

PROPOSIÇÃO 3: Sejam  $F, \overline{F}$  os conjuntos de pontos fixos de  $P, \overline{P}$  definidos em (31), (32) respectivamente. Se  $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$  é não vazio então  $F = \overline{F} = C$ .

PROVA: Se  $z \in C$  então  $z \in C_i$  para todo  $i$ , isto é,  $P_i(z) = z$ . Então  $P_i^\alpha(z) = (1 - \alpha)z + \alpha P_i(z) = (1 - \alpha)z + \alpha z = z$ . Resulta imediatamente de (31), (32) que  $P(z) = \bar{P}(z) = z$ , isto é,  $z \in F$ ,  $z \in \bar{F}$  ou seja  $C \subset F$ ,  $C \subset \bar{F}$ . Temos que provar então as inclusões inversas. Tomemos  $P$ . Seja  $z \in F$ ,  $w \in C$  (suposto não vazio). Definamos  $R_j: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  como  $R_j = P_j^\alpha \circ \dots \circ P_2^\alpha \circ P_1^\alpha$  ou seja  $R_{j+1} = P_{j+1}^\alpha \circ R_j$ . Usando a propriedade 1 da classe  $\mathcal{F}$  para as projeções relaxadas  $P_j^\alpha$ , e o fato já provado de que  $C \subset F$ :

$$\begin{aligned} \|z - w\| &= \|P(z) - P(w)\| = \|P_m^\alpha(R_{m-1}(z)) - P_m^\alpha(R_{m-1}(w))\| \\ &\leq \|R_{m-1}(z) - R_{m-1}(w)\| \\ &= \|P_{m-1}^\alpha(R_{m-2}(z)) - P_{m-1}^\alpha(R_{m-2}(w))\| \\ &\leq \|R_{m-2}(z) - R_{m-2}(w)\| \leq \dots \leq \|R_1(z) - R_1(w)\| \\ &= \|P_1^\alpha(z) - P_1^\alpha(w)\| \leq \|z - w\| \end{aligned} \quad (52)$$

Como  $w \in C$ , temos  $w \in C_i$  para todo  $i$ , ou seja  $w = P_1(w) = \dots = P_m(w)$  o que implica  $w = P_1^\alpha(w) = \dots = P_m^\alpha(w)$  e também:

$$w = R_1(w) = \dots = R_m(w) \quad (53)$$

É imediato, olhando os extremos de (52) que temos igualdades ao longo de (52), e usando a propriedade 2 a) de  $\mathcal{F}$  para as  $P_i^\alpha$  temos também igualdade sem as normas. Usando (53):

$$P(z) - w = R_m(z) - w = \dots = R_1(z) - w = z - w \quad (54)$$

Isto é:

$$R_m(z) = \dots = R_1(z) = z \quad (55)$$

(55) implica:

$$P_m^\alpha(z) = \dots = P_1^\alpha(z) = z \quad (56)$$

De (56) e (30):

$$P_m(z) = \dots = P_1(z) = z \quad (57)$$

ou seja  $z \in C_i$  para todo  $i$ . Temos provado que  $z \in C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ ,

isto é  $F \subset C$ . A prova de  $\bar{F} \subset C$  é semelhante, usando novamente a convexidade da norma, e fica como exercício. ■

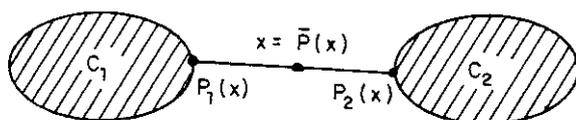


Fig. 16:  $F \neq \emptyset$ ,  $C = \emptyset$

Do Teorema 1 e a Proposição 3 resulta:

COROLÁRIO 1: Se  $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$  é não vazio então as seqüências geradas pelos algoritmos de Kaczmarz e Cimmino, (33) e (34) respectivamente, convergem, qualquer que seja o ponto inicial  $x^0$ , a um ponto de  $C$ .

#### 4. O caso inconsistente.

O leitor cuidadoso terá observado que a propriedade 2 b) da classe  $\mathcal{F}$  não foi utilizada até agora. Ela somente é relevante no caso em que  $C$  é vazio. Pode parecer esdrúxulo se preocupar pela convergência de uma seqüência criada para convergir à solução de um problema no caso em que o problema não tem solução, mas a questão tem certo interesse matemático. Sabemos que se  $F$  é não vazio a seqüência converge a um ponto de  $F$ , e que se  $C$  é não vazio, então  $F = C$ . Mas pode acontecer que  $C$  seja vazio e  $F$  não, como mostra o exemplo da figura 16 (onde  $m = 2$  e consideramos  $\bar{P}$  com  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$  e  $\alpha = 1$ ).

Interessa saber em que casos  $F$  é não vazio, e que propriedades têm os pontos de  $F$ , limites possíveis das seqüências dos algoritmos (33), (34). A questão tem também o seu lado prático. Suponhamos que a atenuação medida de um certo raio,  $b_i$ , registrou um valor totalmente disparatado (porque uma mosca, por exemplo, se interpôs entre a fonte e o detector) tornando o sistema  $Ax = b$  inviável. Seria lamentável (e um tanto desconfortável) que tão insignificante incidente levasse o algoritmo a divergir, ou então a convergir a um vetor que não tivesse nada a ver com a solução do sistema verdadeiro (que indicasse, por exemplo, que o paciente, perfeitamente saudável, tem um tumor que o levará à morte em três meses). Veremos que isso não acontece.

Começamos a análise deste caso definindo, dada  $Q \in \mathcal{F}$ , a função  $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  como:

$$g(x) = \|Q(x) - x\|^2 \quad (58)$$

Seja  $G$  o conjunto de mínimos de  $g$  e  $F$  o conjunto de pontos fixos de  $Q$ .

PROPOSIÇÃO 4: Se  $Q \in \mathcal{F}$  então  $G = F$ .

PROVA: É claro que  $F \subset G$  porque  $g$  é não negativa e  $g(z) = 0$  para todo  $z \in F$ . Vejamos que  $G \subset F$ . Seja  $z \in G$  e  $y = Q(z)$ . Como  $z$  é um mínimo de  $g$ , temos  $g(z) \leq g(y)$ , ou seja, usando a propriedade 1 da classe  $\mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned} \|Q(z) - z\|^2 &\leq \|Q(y) - y\|^2 = \|Q(Q(z)) - Q(z)\|^2 \\ &\leq \|Q(z) - z\|^2. \end{aligned} \quad (59)$$

De (59) resulta:

$$\|Q(Q(z)) - Q(z)\|^2 = \|Q(z) - z\|^2 \quad (60)$$

e usando a propriedade 2 a) da classe  $\mathcal{F}$ :

$$Q(y) - y = Q(Q(z)) - Q(z) = Q(z) - z. \quad (61)$$

De (61):

$$Q(y) - Q(z) = y - z \quad (62)$$

e usando finalmente a propriedade 2 b) da classe  $\mathcal{F}$  em (62):

$$0 = \langle y - z, Q(z) - z \rangle = \langle y - z, y - z \rangle = \|y - z\|^2 \quad (63)$$

e concluímos que  $y = z$ . Como  $y = Q(z)$ , fica provado que  $z = Q(z)$  ou seja  $z \in F$ . A conclusão é que  $G \subset F$ . ■

Portanto,  $F$  é não vazio se e somente se a função  $g$  tem mínimos. Precisamos agora algumas definições. Um *politopo* é o conjunto de soluções de um sistema da forma  $Ax \leq b$ , ou seja a interseção de um número finito de semi-espacos (os politopos limitados são ditos *poliedros*). Diremos que uma função  $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  é

*afim por partes politópicas* se existem politopos  $V_1, \dots, V_r$ , matrizes  $E^1, \dots, E^r \in \mathbf{R}^{n \times n}$  e vetores  $d_1, \dots, d_r \in \mathbf{R}^n$  tais que

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{i=1}^r V_i \text{ e}$$

$$h(x) = E_i x + d_i \quad \text{se } x \in V_i \quad (1 \leq i \leq r).$$

Seja  $\overline{\mathcal{F}}$  a classe de funções afins por partes politópicas. É claro que se  $h$  é afim então  $h \in \overline{\mathcal{F}}$  (tomando somente um politopo:  $\mathbf{R}^n$ ). Note-se que a projeção  $\pi_H$  sobre um hiperplano  $H$  dada por (10) é afim, ou seja  $\pi_H \in \overline{\mathcal{F}}$ . A projeção  $\pi_T$  sobre um semi-espaco  $T = \{y \in \mathbf{R}^n : \langle a, y \rangle \leq \beta\}$  também pertence a  $\overline{\mathcal{F}}$  considerando 2 politopos: o próprio  $T$  onde  $\pi_T(x) = x$  é  $T' = \{y \in \mathbf{R}^n : \langle a, y \rangle \geq \beta\}$  onde  $\pi_T = \pi_H$  com  $\pi_H$  dada por (10). É fácil ver que a classe  $\overline{\mathcal{F}}$  também é fechada por composição e combinação convexa (basta tomar uma nova partição em politopos consistentes das interseções dos politopos associados às funções que estão sendo compostas ou combinadas). Isto significa que as funções  $P, \overline{P}$  definidas em (31), (32) estão em  $\overline{\mathcal{F}}$  quando os conjuntos  $C_i$  são hiperplanos ou semi-espacos, ou seja quando o sistema é linear, do tipo  $Ax = b$  ou  $Ax \leq b$ . Como consequência as funções  $g(x) = \|P(x) - x\|^2$ ,  $\overline{g}(x) = \|\overline{P}(x) - x\|^2$  são neste caso *quadráticas por partes politópicas*, isto é, existem politopos  $V_1, \dots, V_r$  tais que  $\mathbf{R}^n = \bigcup_{j=1}^r V_j$  e  $g, \overline{g}$  são quadráticas em

cada  $V_i$ . O Teorema de Frank-Wolfe (ver [12], Corolário 27.3.1) diz que uma função quadrática limitada inferiormente num politopo atinge o seu mínimo no politopo (isto é trivial se o politopo é um poliedro, ou seja se ele é limitado, mas não é tão fácil assim para politopos ilimitados). Como  $g, \overline{g}$  são limitadas inferiormente por 0 em todo  $\mathbf{R}^n$ , elas atingem os seus mínimos em cada politopo, e portanto seus mínimos globais. Como consequência da Proposição 4 os conjuntos de pontos fixos de  $P$  e  $\overline{P}$  são não vazios, e segundo o Teorema 1 os algoritmos (33) e (34) convergem. Notamos que o argumento continua válido quando os conjuntos  $C_1, \dots, C_m$  são eles próprios politopos (e não somente hiperplanos ou semi-espacos), porque a projeção sobre um politopo é também afim por partes politópicas. A prova é um pouco enrolada, mas a figura 17 aclara

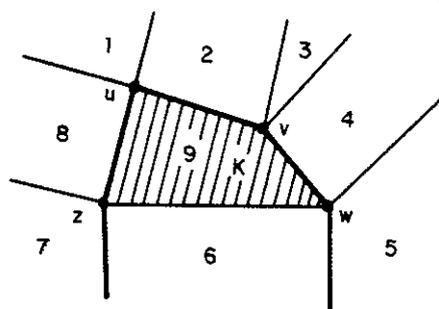


Fig. 17

a situação: a projeção  $\pi_K$  é igual à identidade em  $K$ , constante com valores  $u, v, w, z$  nas regiões 1, 3, 5, 7 respectivamente, e igual às projeções sobre as retas que passam por  $(u, v)$ ,  $(v, w)$ ,  $(w, z)$  e  $(z, u)$  nas regiões 2, 4, 6, 8 respectivamente. As 9 projeções são afins e as 9 regiões são polítopos. Poder-se-ia pensar que  $F$  é sempre não vazio, mas temos o seguinte contra-exemplo:

Na figura 18 a função  $g(x) = \|P(x) - x\|^2$  tende a 0 ao longo do eixo  $x$ , mas não atinge o valor 0, porque  $g(x) = 0$  implica  $P(x) = x$ , isto é,  $x \in C_1 \cap C_2$ . Neste caso, o algoritmo (33), como pode se ver, diverge.

Sabemos então que no caso linear ( $Ax = b$  ou  $Ax \leq b$ ) os algoritmos (33), (34) convergem sempre, mas que podemos dizer do limite de  $\{x^k\}$ ? No caso do algoritmo (34), com  $Ax \leq b$  pode-se provar que  $\{x^k\}$  converge a um ponto que minimiza a

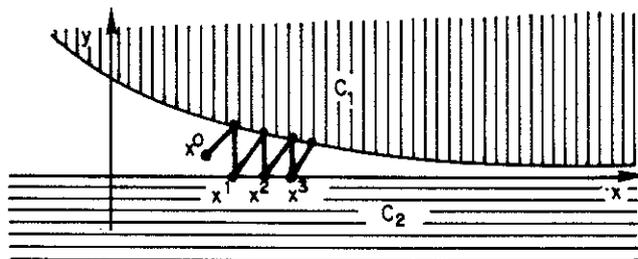


Fig. 18

função  $h(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|P_i(x) - x\|^2$ , isto é, a um ponto que minimiza uma média, com pesos  $\lambda_i$ , dos quadrados das distâncias aos semi-espacos  $T_i = \{y \in \mathbf{R}^n : \langle a^i, y \rangle \leq b_i\}$ , ou seja a uma solução de quadrados mínimos pesados do sistema  $Ax \leq b$ , quando o sistema é inconsistente (ver [4]).

### 5. Comentários finais.

Na seção 1 mencionamos que muitas vezes é desejável resolver o problema:

$$\begin{aligned} & \min h(x) \\ & \text{sujeito a } Ax \leq b \end{aligned} \quad (64)$$

Têm sido desenvolvidos vários métodos de ação de linha para este problema. O principal é o de Bregman (ver [5]). No caso em que  $h$  é da forma (8) o algoritmo de Bregman se reduz ao de Hildreth (ver [10], [11]). Outro caso especial do algoritmo de Bregman, quando  $h$  é da forma (9), produz o algoritmo ART (ver [2]). Todos estes algoritmos geram duas seqüências: uma em  $\mathbf{R}^n$ , dita *primal*, que converge a uma solução de (64), e outra em  $\mathbf{R}^m$ , dita *dual*, que converge a um vetor de multiplicadores de Lagrange associados ao limite da seqüência primal.

### BIBLIOGRAFIA

1. Censor, Y., *Row-Action Methods for Huge and Sparse Systems and Their Applications*, SIAM Review **23**, 4 (1981), 444-466.
2. Censor, Y., De Pierro, A., Elfving, T., Herman, G., Iusem, A., *On Iterative Methods for Linearly Constrained Entropy Maximization*, In Numerical Analysis and Mathematical Modeling, Banach Center Publications **24** (1989), 147-165.
3. Censor, Y., Lent, A., *Subgradient Projections*, Mathematical Programming **24** (1982), 233-235.
4. De Pierro, A., Iusem, A., *A Parallel Projections Method for Finding a Common Point of a Family of Convex Sets*, Pesquisa Operacional **5**, 1 (1985), 1-20.
5. De Pierro, A., Iusem, A., *A Relaxed Version of Bregman's Method for Convex Programming*, Journal of Optimization Theory and Applications **5** (1986), 421-440.
6. De Pierro, A., Iusem, A., *A Finitely Convergent Row-Action Method for the Convex Feasibility Problem*, Applied Mathematics and Optimization **17** (1988), 225-235.

7. De Pierro, A., Iusem, A., *On the Asymptotic Behavior of Some Alternate Smoothing Series Expansion Iterative Methods*, *Linear Algebra and Its Applications* **130** (1990), 3-24.
8. Elfving, T., *An Algorithm for Maximum Entropy Image Reconstruction from Noisy Data*, *Mathematical and Computational Modeling* **12**, 6 (1989), 729-745.
9. Iusem, A.,  *$P = NP$  ou as sutilezas da Complexidade Computacional*, *Matemática Universitária* **5** (1987), 33-60.
10. Iusem, A., De Pierro, A., *A Simultaneous Iterative Method for Computing Projections on Polyhedra*, *SIAM Journal on Control and Optimization* **25**, 1 (1987), 231-243.
11. Lent, A., Censor, Y., *Extensions of Hildreth's Row-Action Method for Quadratic Programming*, *SIAM Journal on Control and Optimization* **18**, 4 (1980), 444-454.
12. Rockafellar, R.T., "Convex Analysis," Princeton University Press, 1970.