Matemática Universitária Nº **12**, dezembro de 1990, 95–96

Uma Simplificação Computacional em Sistemas Lineares de EDO's

Carlos Tomei

Departamento de Matemática
PUC/RJ

Um problema freqüente em Cálculo IV (e na vida real!) é a solução do sistema $v' = A\,v$, onde A é $n \times n$ constante e v é um vetor de n coordenadas, com a condição inicial v_o. Por razões provavelmente históricas, nunca apresentamos o processo computacionalmente mais simples para resolver esse problema. Não pretendo demonstrar a validade do processo (que segue de Jordan), apenas descrevê-lo.

Queremos calcular exp tA. Suponha para simplificar que A é 3×3 com autovalores distintos a, b e c. Seja p um polinômio de grau dois tal que p nos pontos a, b e c vale, respectivamente, exp ta, exp tb e exp tc. Para calcular p, basta resolver um sisteminha simples, cuja solução aliás é (Lagrange):

$$p(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} \exp ta + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \exp tb + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \exp tc.$$

Agora, o (primeiro) pulo de gato: exp $tA = p(A)$. Lembre-se: para calcular qualquer função de uma matriz, você não precisa diagonalizá-la (ou jordanizá-la), se você tiver o espectro da matriz. Em particular, você não tem que calcular a matriz de autovetores e sua inversa. O pulo de gato seguinte é notar que você não quer calcular essa matriz, e sim, o produto dessa matriz pela condição inicial v_o. Calcular $M.M.v$ se faz em duas etapas: $M.v$ e $M.(M.v)$. Assim, no caso 3×3, só existem duas operações matriciais a fazer: $A.v_o$ e $A.(A.v_o)$ – todas as outras são somas de vetores.

E se os autovalores têm multiplicidade? Duas trilhas: I) interpole expOtx por um polinômio que coincide com ela sobre o espectro de A até a multipliciddе correta das derivadas sobre o espectro – por exemplo, se o espectro de A é a, a e c, encontre um polinômio que coincide com a exponencial e sua derivada em a, e que coincida com a exponencial em c; II) resolva o caso geral (todos os autovalores diferentes), e depois tome limites para obter o espectro desejado (obrigado, Francisco!). No caso 3×3, a menos de erros de conta,

$$p(x) = \frac{(x-c)}{(a-c)^2}\,[2a - c - x + t(x-a)(a-c)]\exp ta + \frac{(x-a)}{(c-a)}\exp tc.$$

Mais duas observações. Se a matriz A for diagonalizável, basta fazer coincidir o polinômio interpolador com a exponencial sobre o espectro, sem preocupar-se com os ajustes das derivadas: isso pode reduzir o grau do polinômio substancialmente. Se a matriz tiver todos os seus autovalores iguais a, digamos c, a conta mais rápida é via Taylor: $\exp tA = \exp tc \exp(tA - tc)$, onde $tA - tc$ é nilpotente.