Matemática Universitária Nº 12, dezembro de 1990, 97–102

Derivação de Séries de Potências num Primeiro Curso de Cálculo*

R. Vyborny

15 Rialana Street
Kenmore, Queensland, Australia 4069

INTRODUÇÃO

As séries de potências são um instrumento importante na Análise e muitas demonstrações em cursos elementares de Análise podem ser simplificadas quando se é permitido derivar séries de potências termo a termo. Por exemplo, a série do logaritmo de $1 + x$ pode ser obtida mais facilmente pela integração termo a termo da série de potências de $1/(1+x)$ do que pela aplicação do Teorema de Taylor com resto. A função exponencial pode ser facilmente apresentada, juntamente com suas propriedades, como série de potências solução da equação diferencial $y = y'$ (satisfazendo a condição inicial $y = 1$ em $x = 0$).

As séries de potências eram bastante populares na virada do século, mas com o passar do tempo elas foram sendo relegadas a segundo plano nos currículos; e isto por duas razões: em primeiro lugar, as funções não analíticas começaram a desempenhar um papel mais importante, e em segundo lugar uma demonstração rigorosa geralmente era feita com base no teorema sobre derivação termo a termo de séries, o qual, por sua vez, apoiava-se no conceito de convergência uniforme, que era considerado fora do alcance do

*Este trabalho foi escrito durante visita do autor à Universidade de Brasília, o qual agradece a hospitalidade do Prof. David G. Costa.

estudante médio. A propósito, E. Landau – que certamente não exageraria dificuldades – diz em seu livro [2] que a demonstração do teorema sobre derivação de séries é um dos mais difíceis em todo o livro. Existem, todavia, pelo menos três demonstrações simples sobre derivação de séries de potências que evitam o conceito de convergência uniforme. Uma é devida a Apostol [1], outra pode ser encontrada no livro de análise complexa de Narashimhan [3], a terceira é dada pelo presente autor [4] e é sobre esta que faremos uma expansão aqui. Acreditamos que a dificuldade de ensinar isto num primeiro curso de cálculo é comparável à que encontramos no ensino de outros tópicos consagrados, como a regra da cadeia. Nossa demonstração é válida tanto para variáveis reais como complexas, donde, no que segue, nem sempre especificaremos se variáveis como x ou h etc. são reais ou complexas. A letra n sempre designará um número natural.

Demonstração do teorema

Suponhamos que $f(x) = \sum\limits_0^\infty c_n x^n$ seja absolutamente convergente em $|x| < R$ (R podendo ser $+\infty$). Suponha por um momento que $g(x) = \sum\limits_0^\infty n c_n x^{n-1}$ também seja convergente em $|x| < R$. Desejamos provar que $f'(x) = g(x)$, o que nos leva naturalmente a considerar a diferença

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) = \sum_0^\infty c_n \left[\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1} \right]. \quad (1)$$

Para mostrar que esta diferença tende a zero com $h \to 0$, estabelecemos primeiro o seguinte

Lema. *A desigualdade*

$$\left| (x+h)^n - x^n - h n x^{n-1} \right| \leq \frac{|h|^2}{H^2} \left(|x| + H \right)^n \qquad (2)$$

é válida quaisquer que sejam os números complexos x e h, com $|h| \leq H$.

Para a demonstração basta utilizar o binômio de Newton:

$$\left|(x+h)^n - x^n - hnx^{n-1}\right| \leq |h|^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^{k-2}$$

$$\leq \frac{|h|^2}{H^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |H|^k \leq \frac{|h|^2}{H^2} (|x| + H)^n.$$

Seja agora $|x| < R$. Podemos escolher H positivo tal que $|x| + H < R$. De (1) e (2) segue facilmente que, para $|h| < H$,

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| \leq \frac{|h|}{H^2} \sum c_n(|x| + H)^n.$$

Fazendo $h \to 0$, a demonstração estará completa se mostrarmos

i) que a série $\sum\limits_{0}^{\infty} |c_n| (|x| + H)^n$ converge;

ii) que a série $\sum\limits_{0}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ converge em $|x| < R$.

Observe que i) segue da escolha de H e ii) é uma simples conseqüência do Lema. De fato, segue de (2), com $h = H$, que

$$\left|(|x| + H)^n - x^n - Hnx^{n-1}\right| \leq (|x| + H)^n.$$

Por outro lado,

$$\left|(x+H)^n - x^n - Hnx^{n-1}\right| = \left|Hnx^{n-1} - [(x+H)^n - x^n]\right|$$
$$\geq Hn\,|x|^{n-1} - |(x+H)^n - x^n| \geq Hn\,|x|^{n-1} - (|x| + H)^n - |x|^n.$$

Daqui e da desigualdade anterior obtemos

$$Hn\,|x|^{n-1} \leq 2(|x| + H)^n + |x|^n$$

e, conseqüentemente,

$$\left|nc_n x^{n-1}\right| \leq \frac{1}{H}[2\,|c_n|\,(|x| + H)^n + |c_n|\,|x|^n]. \qquad (3)$$

A série cujo termo geral é o segundo membro de (3) converge pela suposta convergência de $\sum\limits_{0}^{\infty} c_n x^n$ se $|x| < R$ e pela escolha de H.

Pelo teste de comparação, segue-se que a série da função g também converge em $|x| < R$. Fica assim provado o

Teorema sobre derivação termo a termo de uma série de potências. *Se a série de potências* $f(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$ *converge absolutamente para* $|x| < R$, *então o mesmo é verdade da série* $\sum_1^\infty n c_n x^{n-1}$ *e* $f'(x) = g(x)$ *em* $|x| < R$.

INTEGRAÇÃO

Combinando o teorema anterior com o teorema fundamental do Cálculo, obtemos o

Teorema sobre integração de séries de potências termo a termo. *Se a série de potências* $\sum_0^\infty c_n x^n$ *converge absolutamente em* $|x| < R$, *então*

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_0^\infty \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

no domínio $|x| < R$.

Observação. O conceito de raio de convergência permitiria substituir, nos dois teoremas, a hipótese da convergência absoluta da série de f em $|x| < R$ pela hipótese de que essa série tem raio de convergência positivo (possivelmente infinito).

Desenvolvimentos em séries de potências como

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \tag{4}$$

ou

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \tag{5}$$

ambos válidos em $|x| < 1$, são conseqüências imediatas desse teorema. Observe que ambos esses desenvolvimentos (4) e (5) são válidos também para $x = 1$. Costuma-se invocar o Teorema de Abel para estender a validade dessas séries para $x = 1$, mas isto não é necessário, como bem ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 1. *O desenvolvimento* (4) *é válido também para* $x = 1$.

Para a demonstração, seja

$$r_N = \sum_{N+1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Sabemos que numa série alternada, cuja seqüência dos termos é decrescente, o resto não excede, em valor absoluto, o primeiro termo desprezado; portanto,

$$|r_N| \leq \frac{|x|^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1},$$

donde obtemos

$$\left| \log(1+x) - \sum_{1}^{N} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right| \cdot |r_N| \leq \frac{1}{N+1}. \tag{6}$$

Agora é só fazer $x \to 1$ em (6) para completar a demonstração.

Exemplo 2.

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\, dx = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{7}$$

Para demonstrar isto, seja $0 < x < 1$. Com (4) e o teorema de integração termo a termo obtemos

$$\int_0^x \frac{\log(1+t)}{t}\, dt = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Como

$$\sum_{N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{N+1},$$

temos

$$\left| \int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} - \sum_{1}^{N} \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{N+1}. \tag{8}$$

Finalmente, basta fazer $x \to 1$ em (8) para obtermos (7).

Bibliografia

1. Apostol, T., *Termwise Differentiation of Power Series*, American Mathematical Monthly **59** (1952), 323–326.
2. Landau, E.G., "Differential and Integral Calculus," Chelsea, 1985.
3. Narashimhan, R., "Complex Analysis in One Variable," Birkhauser, 1985.
4. Vyborny, R., *Differentiation of Power Series*, American Mathematical Monthly **94** (1987), 369–370.