

Racionalização de Radicais e Questões Algébricas Relacionadas

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Há poucos dias fui procurado por um aluno que, com o fim do ano letivo, voltou a pensar numa questão que há um ano o desafiava. Tratava-se de uma questão de vestibular do ITA (Questão 1, abaixo) sobre racionalização de denominador. Por ser este tipo de questão considerado difícil e por não ser abordado de maneira sistemática nos livros-textos em circulação, parece-me conveniente fazer algumas reflexões sobre o assunto, as quais nos levarão a considerações interessantes acerca da teoria de polinômios de uma ou várias variáveis. Chegaremos a um procedimento geral para resolver este tipo de problema e, como aplicação do mesmo círculo de idéias, veremos um método para determinar um polinômio anulador de certos números algébricos, primeiro passo para encontrar o polinômio minimal.

Questão 1: Racionalizar o denominador da expressão

$$U \frac{6}{1 + \sqrt{7} + \sqrt[3]{9}}.$$

Este tipo de questão foi muito popular antes do advento das calculadoras de bolso, quando, por exemplo, era muito mais fácil dividir $\sqrt{2}$ por 2 do que 1 por $\sqrt{2}$. Pretendemos mostrar que o assunto ainda é interessante.

O que significa racionalizar uma expressão?

Se $f = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é um polinômio em $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ com coeficientes inteiros, sendo cada α_k a raiz r_k -ésima de um

número natural, racionalizar a expressão f é encontrar outra expressão $g \in \mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ não nula e tal que $fg \in \mathbf{Z}$. A fim de obter inspiração sobre como tratar o caso geral vamos começar examinando um caso bem simples.

Questão 2: Racionalizar a expressão $f(\alpha) = 1 + \alpha$, onde $\alpha^3 = 5$. Por razões tipográficas não escrevemos α em forma de raiz.

Solução: A maneira usual de racionalizar esta expressão é empregando a fórmula

$$(1 + \alpha)(1 - \alpha + \alpha^2) = 1 + \alpha^3 = 6.$$

Fatorando o primeiro membro, a fórmula acima pode ser reescrita como

$$(1 + \alpha)(1 + \omega\alpha)(1 + \omega^2\alpha) = 6,$$

onde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Portanto a expressão $f(\alpha)$ foi racionalizada multiplicando-a pelo fator $g(\alpha) = f(\omega\alpha)f(\omega^2\alpha)$.

Consideremos agora um caso um pouco mais complicado.

Questão 3: Racionalizar a expressão $f(\alpha) = 1 + \alpha + 3\alpha^2$, onde $\alpha^3 = 5$.

Solução: Aqui a mesma idéia funciona. Ainda com $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\omega\alpha)f(\omega^2\alpha) &= \\ &= (1 + \alpha + 3\alpha^2)(1 + \omega\alpha + 3\omega^2\alpha^2)(1 + \omega^2\alpha + 3\omega\alpha^2) \\ &= (1 + \alpha + 3\alpha^2)(-14 + 44\alpha - 2\alpha^2) = 636. \end{aligned}$$

Vamos, agora, tentar entender porque obtivemos acima um resultado independente de α e de ω .

Exemplo 4: Para $f(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2$ ($a, b, c \in \mathbf{Z}$) e $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, calculemos

$$f(\alpha)f(\omega\alpha)f(\omega^2\alpha) = (a + b\alpha + c\alpha^2) \cdot \\ \cdot [a^2 + ab(\omega + \omega^2)\alpha + (ac(\omega + \omega^2) + b^2)\alpha^2 + bc(\omega + \omega^2)\alpha^3 + c^2\alpha^4].$$

De $0 = \omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1)$ segue que $\omega + \omega^2 = -1$ e, portanto,

$$f(\alpha)f(\omega\alpha)f(\omega^2\alpha) = \\ = (a + b\alpha + c\alpha^2)[a^2 - ab\alpha + (b^2 - ac)\alpha^2 - bc\alpha^3 + c^2\alpha^4] \\ = a^3 + (b^3 - 3abc)\alpha^3 + c^3\alpha^6.$$

Nesta fórmula notamos dois fatos surpreendentes. Em primeiro lugar, todos os coeficientes são polinômios em a , b e c e, portanto, inteiros. Em segundo lugar, na última linha só aparecem potências de α^3 . É fácil explicar este último fato:

Lema. Sejam $F(x) \in \mathbf{C}[x]$ e $\omega = e^{\frac{2\pi i}{r}}$, com $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$. Então $F(x) \in \mathbf{C}[x^r]$ se e somente se $F(\omega x) = F(x)$.

Demonstração: Seja $F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_sx^s$. Então $F(\omega x) = c_0 + c_1\omega x + c_2\omega^2x^2 + \dots + c_s\omega^sx^s$. Portanto os polinômios $F(x)$ e $F(\omega x)$ são iguais se e somente se $c_k\omega^k = c_k$ para todo k . A igualdade $c_k\omega^k = c_k$ ocorre em dois casos, para $\omega^k = 1$ ou para $c_k = 0$. Levando em conta que $\omega^k = 1$ só para k múltiplo de r , concluímos que $F(\omega x) = F(x)$ é equivalente a $c_k = 0$ se k não é múltiplo de r , isto é, $F(x) \in \mathbf{C}[x^r]$. ■

Corolário. Sejam $f(x) \in \mathbf{C}[x]$, $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$, e $\omega = e^{\frac{2\pi i}{r}}$. Definamos $p(x) = f(\omega x)f(\omega^2x) \dots f(\omega^{r-1}x)$. Então o polinômio $p(x)$ é tal que o produto $F(x) = f(x)p(x)$ está em $\mathbf{C}[x^r]$.

Vejamos a explicação para o segundo fato destacado no Exemplo 4:

Proposição 1. Sejam $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$, $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$ e $\omega = e^{\frac{2\pi i}{r}}$. Seja $p(x)$ definido por $p(x) = f(\omega x)f(\omega^2x) \dots f(\omega^{r-1}x)$. Então $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$.

Demonstração: Sejam $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$, $r \in \mathbf{N}$ e ω como no enunciado. Definimos o polinômio G em $r - 1$ variáveis por

$$G(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_{r-1}).$$

G é um polinômio simétrico, isto é, $G(x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \dots, x_{\sigma_{r-1}}) = G(x_1, x_2, \dots, x_{r-1})$, para qualquer permutação na ordem das variáveis. Embora não se use aqui este fato, observemos que um polinômio em n variáveis é simétrico se são iguais os coeficientes de $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ e de $x_{\sigma_1}^{k_1} x_{\sigma_2}^{k_2} \dots x_{\sigma_n}^{k_n}$.

Lembremos o seguinte resultado de [1], à pág. 79:

Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos. Se R é um anel comutativo com unidade então todo polinômio simétrico em n variáveis com coeficientes em R , $F \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ pode ser escrito de maneira única como $F = f(s_1, s_2, \dots, s_n)$, onde f é polinômio com coeficientes em R e s_1, s_2, \dots, s_n são os polinômios simétricos elementares em n variáveis, dados por

$$s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

$$s_3 = \sum_{j_1 < j_2 < j_3} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3}$$

...

$$s_n = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Aplicando este resultado ao polinômio G definido acima, temos que existe um polinômio H em $r - 1$ variáveis com coeficientes em \mathbf{Z} tal que

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) &= \\ &= f(x_1)f(x_2) \dots f(x_{r-1}) = H(s_1, s_2, \dots, s_{r-1}). \end{aligned}$$

Mas nosso polinômio $p(x)$ satisfaz

$$p(x) = G(\omega x, \omega^2 x, \dots, \omega^{r-1} x).$$

Vejamos então o que acontece com as funções simétricas ao substituirmos cada x_j por $\omega^j x$. Indiquemos por $\bar{s}_k = s_k(\omega x, \omega^2 x, \dots, \omega^{r-1} x)$. É fácil ver que

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{r-1}) = 1 + s_1 + s_2 + \dots + s_{r-1}.$$

Fazendo a substituição $x_j = -\omega^j x$, obtém-se

$$\prod_{j=1}^{r-1} (1 - \omega^j x) = 1 - \bar{s}_1 + \bar{s}_2 - \dots + (-1)^{r-1} \bar{s}_{r-1}.$$

Por outro lado, $\omega, \omega^2, \dots, \omega^{r-1}$ são as raízes do polinômio $\prod_{j=1}^{r-1} (1 - \omega^j x)$, pois cada ω^{r-j} anula o fator $1 - \omega^j x$. Portanto

$$\prod_{j=1}^{r-1} (1 - \omega^j x) = \frac{1 - x^r}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{r-1}.$$

Comparando estas duas expressões, concluímos que $\bar{s}_k = (-1)^k x^k$, $k = 0, 1, \dots, s-1$. Portanto

$$p(x) = H(-x, x^2, -x^3, \dots, (-1)^{r-1} x^{r-1}) \in \mathbf{Z}[x],$$

pois H tem coeficientes inteiros. ■

Neste ponto é interessante observar que na demonstração da Proposição 1 não foi essencial que os polinômios tivessem coeficientes em \mathbf{Z} . Os coeficientes poderiam estar num domínio A qualquer. Tomaríamos $K = \{\frac{a}{b}; a, b \in A, b \neq 0\}$ o corpo de frações de A e \bar{K} o fecho algébrico de K . Em \bar{K} tomaríamos um elemento ω , raiz r -ésima primitiva da unidade. Vamos precisar considerar, por exemplo, o caso em que $A = \mathbf{Z}[x]$. O mesmo raciocínio da Proposição 1 permite obter a

Proposição 2. Sejam A um domínio, K o corpo de frações de A , \bar{K} o fecho algébrico de K , $f(x) \in A[x]$, $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$ e $\omega \in \bar{K}$ raiz r -ésima primitiva da unidade. Então $p(x) = f(\omega x)f(\omega^2 x)\dots f(\omega^{r-1} x) \in A[x]$ e é tal que $F(x) = f(x)p(x) \in A[x^r]$.

Estamos agora em condições de racionalizar qualquer polinômio envolvendo radicais e com coeficientes inteiros. Em lugar de resolver a Questão 1, vejamos um exemplo mais ilustrativo.

Exemplo 5: Racionalizar a expressão $f(\alpha, \beta) = 1 + \alpha^2 + \alpha\beta + (3 + \alpha^2)\beta^2$, onde $\alpha^4 = 5$ e $\beta^3 = 1 + \alpha$.

Solução: Primeiro eliminamos β . Temos $f(\alpha, \beta) = \alpha_0 + \alpha_1\beta + \alpha_2\beta^2$, com $\alpha_k \in \mathbf{Z}[\alpha]$. Pela Proposição 2, se $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, o produto

$$p(\alpha, \beta) = (\alpha_0 + \alpha_1\omega\beta + \alpha_2\omega^2\beta^2)(\alpha_0 + \alpha_1\omega^2\beta + \alpha_2\omega\beta^2) \in \mathbf{Z}[\alpha, \beta]$$

e é tal que $F(\alpha) = f(\alpha, \beta)p(\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}[\alpha]$, pois $\beta^3 \in \mathbf{Z}[\alpha]$. Racionalizando $F(\alpha)$ obteremos um inteiro, pois $\alpha^4 \in \mathbf{Z}$.

Observemos que este exemplo mostra que nosso método nos permite racionalizar $f \in \mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ no caso mais geral em que $\alpha_1^{r_1} \in \mathbf{Z}$ e $\alpha_k^{r_k} \in \mathbf{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}]$ se $k \geq 2$.

Existe um outro método para racionalização de radicais que não usa números complexos (ver [2], pág. 197 e 198). Nosso método no entanto tem a vantagem de estabelecer um fato geral sobre polinômios, que pode ser aplicado em outras situações, como mostraremos a seguir.

É simples racionalizar uma expressão λ , se conhecemos um polinômio $p(x) \in \mathbf{Z}[x] \setminus \{0\}$ tal que $p(\lambda) = 0$. De fato, se $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ e, sem perda de generalidade, $a_n \neq 0$, então de $p(\lambda) = 0$ deduz-se que

$$\lambda(a_0\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}) = -a_n \in \mathbf{Z}.$$

O que nem sempre é fácil é descobrir um polinômio $p(x)$ tal que $p(\lambda) = 0$.

Vejamus um método de achar um polinômio $p(x) \in \mathbf{Z}[x] \setminus \{0\}$ que anule uma expressão $\lambda \in \mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, onde $\alpha_1^{r_1} \in \mathbf{Z}$ e $\alpha_j^{r_j} \in \mathbf{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}]$, se $j \geq 2$. Vamos estudar o caso particular $\lambda = \alpha + \beta$, onde $\alpha^3, \beta^3 \in \mathbf{Z}$. O caso geral é análogo. O polinômio $f(x) = x - \alpha - \beta$ se anula para $x = \lambda$, mas seus coeficientes não são inteiros. Considerando $f(x)$ como polinômio em β com coeficientes em $\mathbf{Z}[\alpha, x]$, temos, pela Proposição 2, que

$$G = \prod_{j=0}^2 (x - \alpha - \omega^j\beta) \in \mathbf{Z}[\alpha, x].$$

Novamente, considerando G como polinômio em α com coeficientes em $\mathbf{Z}[x]$, temos que $F(x) = G(\alpha)G(\omega\alpha)G(\omega^2\alpha) \in \mathbf{Z}[x]$. Como $f(x) = x - \alpha - \beta$ é um fator de $F(x)$, é claro que $F(\lambda) = 0$. Os cálculos são simples:

$$1). \text{ Para } f(\beta) = t - \beta, \text{ temos } f(\beta)f(\omega\beta)f(\omega^2\beta) = (t - \beta)(t - \omega\beta)(t - \omega^2\beta) = t^3 - \beta^3.$$

2). Substituindo acima t por $x - \alpha$, obtemos

$$G = \prod_{k=0}^2 (x - \alpha - \omega^k \beta) = (x - \alpha)^3 - \beta^3 = x^3 - \beta^3 - 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 - \alpha^3.$$

3). Para $g(\alpha) = c - d\alpha + e\alpha^2 - \alpha^3$, calculamos $g(\alpha)g(\omega\alpha)g(\omega^2\alpha) = c^3 - (d^3 - 3cde + 3c^2)\alpha^3 + (3c - 3de + e^3)\alpha^6 - \alpha^9$. Aqui só precisamos calcular o termo constante e os termos em α^3, α^6 e α^9 . Os demais, sabemos de antemão que se anulam.

4). Aplicando o resultado do item precedente com $c = x^3 - \beta^3$, $d = 3x^2$ e $e = 3x$, depois de simplificações imediatas, obtém-se

$$F(x) = (x^3 - \alpha^3 - \beta^3)^3 - 27x^3\alpha^3\beta^3.$$

Em outras palavras, dados $a, b \in \mathbf{Z}$, o polinômio $p(x) = (x^3 - a - b)^3 - 27abx^3$ satisfaz $p(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = 0$. O polinômio minimal de $\lambda = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ é um divisor de $p(x)$. Nem sempre é o próprio $p(x)$. Por exemplo, se o produto ab for um cubo perfeito, isto é, $ab = \gamma^3$, com $\gamma \in \mathbf{Z}$, verifica-se que o fator $x^3 - a - b - 3\gamma x$ de $p(x)$ já anula λ . Um outro exemplo é quando $a = 16$ e $b = 54$, pois neste caso, como $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{250}$, [3, pág. 195], o polinômio minimal de λ é $x^3 - 250$.

Agradeço ao Prof. Derek Hacon da PUC/RJ que leu uma versão preliminar deste trabalho e deu valiosas sugestões.

BIBLIOGRAFIA

1. B.L. van der Waerden, "Modern Algebra," Frederick Ungar Publ. Co., New York, 1949.
2. G. Chrystal, "Algebra, An Elementary Text-Book," Part I, 6th. Edition, Chelsea Publ. Co., New York, 1952.
3. N. Bourbaki, "Éléments de Mathématique, Livre II, Algèbre," chap. 4 et 5, Hermann, Paris, 1959.

Instituto de Matemática - UFRGS
Caixa Postal 15091
91501 - Porto Alegre, RS