

# Hipersuperfícies Invariantes de Curvatura Média Constante

Nubem Airton Cabral Medeiros  
e  
Jaime Bruck Ripoll

## 0. Introdução.

É usual nos cursos de graduação em matemática, principalmente nas disciplinas de cálculo e geometria, falar-se nas superfícies de revolução. A razão é que tais superfícies são muito úteis para construção de exemplos, esclarecendo muitos conceitos importantes da teoria.

Fato bem menos conhecido, entretanto, é que as superfícies de revolução são casos particulares de superfícies invariantes por um subgrupo a um parâmetro de isometrias do  $\mathbf{R}^3$  (adiante explicamos com maiores detalhes o que isto significa). Como exemplo, existem também as superfícies helicoidais, dentre as quais o helicóide é um exemplo clássico.

A grande vantagem de uma superfície ser invariante por um subgrupo a um parâmetro de isometrias provém do fato de que suas propriedades podem ser obtidas a partir do estudo da sua "curva geradora", como acontece com as superfícies de revolução. Isto foi utilizado já por Delaunay em 1841 para obter exemplos de superfícies de Curvatura Média constante em  $\mathbf{R}^3$  ([6]).

Bem mais recentemente, esta idéia de considerar superfícies invariantes por subgrupos de isometrias foi desenvolvida e generalizada por Back, do Carmo e Hsiang, em [4], constituindo a assim chamada Geometria Equivariante. Através da Geometria Equivariante resolveram-se problemas importantes da Geometria Diferencial como, por exemplo, a questão formulada por Hopf em

dimensão maior ou igual a 4 (veja [14] ou a segunda seção deste trabalho).

A teoria da Geometria Equivariante tem sido utilizada principalmente na obtenção e descrição de exemplos de hipersuperfícies de Curvatura Média constante. Neste trabalho buscamos ilustrar a técnica desenvolvida nesta teoria, primeiramente considerando os casos simples das superfícies de Curvatura Média constante em  $\mathbf{R}^3$  invariantes por um subgrupo a um parâmetro de isometrias, isto é, as superfícies de revolução, helicoidais e translacionais. Damos então uma descrição dessas superfícies através do estudo de suas curvas geradoras. Em particular, descrevemos o resultado clássico de C. Delaunay que fornece uma maneira "prática" e elegante de obterem-se as curvas geradoras das superfícies de revolução de Curvatura Média constante. Comentamos algumas generalizações atuais deste método.

Explicamos a seguir o resultado importante de W.Y. Hsiang que estabelece a existência, via Geometria Equivariante, de hipersuperfícies compactas difeomorfas a esferas 3-dimensionais de Curvatura Média constante em  $\mathbf{R}^4$  não congruentes a esferas euclidianas.

Na última parte, discutimos algumas questões sobre hipersuperfícies de Curvatura Média constante em  $\mathbf{R}^4$  e mencionamos resultados recentes sobre o uso da Geometria Equivariante na construção de exemplos de superfícies de Curvatura Média constante em espaços de Geometria Não-Euclidiana (Esférica e Hiperbólica).

## 1. Superfícies Invariantes de Curvatura Média Constante em $\mathbf{R}^3$ .

Vamos inicialmente recordar ao leitor o conceito de Curvatura Média de uma superfície em  $\mathbf{R}^3$  (veja [7], para maiores detalhes). Ao procurarmos medir a "curvatura" de uma superfície em  $\mathbf{R}^3$  em um ponto da superfície, uma maneira intuitiva consiste em tomarmos um campo de vetores normal à superfície em torno do ponto e medir, usando derivadas, a variação deste campo no ponto. É assim que procedemos aqui.

Seja uma superfície  $S$  em  $\mathbf{R}^3$  e  $p$  um ponto de  $S$ . Tomamos, numa vizinhança de  $p$  em  $S$ , um campo de vetores  $\eta$  unitário e normal a  $S$  (estamos assumindo vivermos num *universo diferenciável*).

Se  $v$  é um vetor tangente à  $S$  em  $p$ , definimos a derivada  $\frac{d\eta}{dv}$  de  $\eta$  na direção de  $v$  da seguinte maneira: tomamos uma curva diferenciável  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\dot{\alpha}(0) = v$ . Então

$$\frac{d\eta}{dv} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} (\eta \circ \alpha)(t)|_{t=0}$$

Verifica-se que  $d\eta/dv$  independe da curva  $\alpha$  escolhida. Além disso,  $d\eta/dv$  depende linearmente de  $v$ .

Como  $n$  é unitário,  $\langle \eta(\alpha(t)), \eta(\alpha(t)) \rangle = 1, \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , de tal forma que, derivando em relação a  $t$  esta igualdade, obtemos:

$$\left\langle \frac{d\eta}{dv}, \eta \right\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d\eta}{dv} \in T_p(S).$$

Temos definido, então, uma aplicação linear

$$\begin{array}{ccc} d\eta: T_p(S) & \rightarrow & T_p(S) \\ v & \mapsto & \frac{d\eta}{dv}. \end{array}$$

Por definição,

$$H(p) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \text{ traço} (d\eta)$$

é a *Curvatura Média* de  $S$  em  $p$ .

Observamos que  $H: S \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definida a menos de sinal, pois se tomamos  $-\eta$  no lugar de  $\eta$ , o traço da aplicação linear acima troca de sinal. Para nós isto não traz nenhum inconveniente pois:

**DEFINIÇÃO:** Dizemos que  $S$  tem *Curvatura Média* constante  $H \geq 0$  se  $|H(p)| = H, \forall p \in S$ .

Um problema altamente não trivial e fundamental da Geometria Diferencial é o de obterem-se exemplos de superfícies de *Curvatura Média* constante. Os primeiros exemplos foram construídos por volta do final do século XVIII: é o caso dos planos ( $H = 0$ ), esferas ( $H > 0$ ), helicóides e catenóides ( $H = 0$ ).

Um fato notável (embora bastante compreensível atualmente) é que enquanto novos exemplos de superfícies mínimas (isto é, superfícies de Curvatura Média constante igual a zero) foram paulatinamente sendo encontradas, os únicos exemplos disponíveis de superfícies de Curvatura Média constante positiva, de que temos notícia, até 1985, eram exemplos invariantes por um subgrupo a um parâmetro de isometrias e um exemplo construído por Blaine Lawson, por volta de 1970 (voltamos a comentar este exemplo na seção d), p. 54). Até essa data, estava em pé a famosa questão levantada por H. Hopf que perguntava: *são as esferas redondas as únicas superfícies compactas de Curvatura Média constante em  $\mathbf{R}^3$* ? Nesse ano de 1985, num trabalho fundamental devido a Wente [33], foram obtidos novos exemplos de superfícies compactas de Curvatura Média constante imersas em  $\mathbf{R}^3$ , homeomorfas a toros, respondendo negativamente à questão de H. Hopf.

As superfícies invariantes, entretanto, são importantes não só por razões históricas mas por servirem ainda de motivação a novos exemplos e conjecturas. Por exemplo, em um trabalho recente, Kapouleas construiu novas superfícies de Curvatura Média constante tomando pedaços de superfícies de revolução de  $H = c^{te}$  e mostrando que estes pedaços podiam ser adequadamente conectados de forma a originarem superfícies diferenciáveis e completas ([19]). (Em [34], Brian White mostra, de uma maneira informal e muito atraente, como são feitas tais construções.) Mas o uso das superfícies invariantes de Curvatura Média constante não fica só nisso: famílias a 1-parâmetro de tais superfícies têm sido utilizadas na demonstração de teoremas de caracterização de superfícies de  $H = c^{te}$  (veja [24], [11]).

No que se segue, explicaremos mais detalhadamente no que constituem as superfícies invariantes em  $\mathbf{R}^3$ .

Começamos lembrando alguns conceitos básicos de Álgebra Linear.

Uma *transformação ortogonal* em  $\mathbf{R}^3$  é uma aplicação linear  $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  satisfazendo

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

para todos  $u, v \in \mathbf{R}^3$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno Euclidiano usual. Uma *translação* em  $\mathbf{R}^3$  é uma aplicação do tipo

$p \mapsto p + a$ , onde  $a$  é um vetor fixo em  $\mathbf{R}^3$ . Uma *isometria* em  $\mathbf{R}^3$  é, por definição, qualquer aplicação obtida através da composição de transformações ortogonais com translações. É fácil ver que o conjunto  $\text{ISO}(\mathbf{R}^3)$  das isometrias do  $\mathbf{R}^3$  forma um grupo com a operação de composição de funções.

Um subgrupo  $\mathcal{G}$  de  $\text{ISO}(\mathbf{R}^3)$  é dito um *subgrupo a um parâmetro de isometrias do  $\mathbf{R}^3$*  se existe uma aplicação contínua  $\Phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{G}$  que seja um homomorfismo de grupos (em relação à estrutura aditiva dos reais), ou seja:

$$\Phi(r + s) = \Phi(r) \circ \Phi(s),$$

onde "o" indica composição de aplicações.

Uma superfície  $S \subset \mathbf{R}^3$  é dita *invariante* se existe um subgrupo a um parâmetro de isometrias  $\mathcal{G}$  que deixa  $S$  invariante, isto é,  $g(S) = S$ ,  $\forall g \in \mathcal{G}$ . Dizemos também que  $S$  é  $\mathcal{G}$ -invariante.

Lembramos que duas superfícies  $S_1, S_2$  em  $\mathbf{R}^3$  são ditas congruentes quando existe uma isometria  $h \in \text{ISO}(\mathbf{R}^3)$  tal que  $h(S_1) = S_2$ . Do ponto de vista da Geometria Diferencial, duas superfícies congruentes são indistinguíveis.

Observamos agora que se dois subgrupos  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  de  $\text{ISO}(\mathbf{R}^3)$  são conjugados, isto é, se existe  $h \in \text{ISO}(\mathbf{R}^3)$  tal que  $\mathcal{G}_1 = h \circ \mathcal{G}_2 \circ h^{-1}$ , então toda superfície  $\mathcal{G}_1$ -invariante é congruente a uma superfície  $\mathcal{G}_2$ -invariante. De fato: se  $\mathcal{G}_1 = h \circ \mathcal{G}_2 \circ h^{-1}$  e  $S_1$  é  $\mathcal{G}_1$ -invariante, então tomamos  $S_2 \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1}(S_1)$ . É claro que  $S_1$  e  $S_2$  são congruentes. Além disso,  $S_2$  é  $\mathcal{G}_2$ -invariante, pois se  $g_2 \in \mathcal{G}_2$ , então  $g_2(S_2) = g_2(h^{-1}(S_1)) = h^{-1} \circ (h \circ g_2 \circ h^{-1})(S_1) = h^{-1}(S_1) = S_2$ , já que  $h \circ g_2 \circ h^{-1} \in \mathcal{G}_1$  e  $S_1$  é  $\mathcal{G}_1$ -invariante.

Usando-se resultados básicos de Álgebra Linear, podemos obter uma descrição dos subgrupos a 1-parâmetro de isometrias do  $\mathbf{R}^3$  a menos de conjugação. No que se segue damos uma breve idéia de como isso pode ser feito.

O grupo das isometrias  $\text{ISO}(\mathbf{R}^3)$  pode ser identificado com o grupo  $G(4)$  das matrizes reais  $4 \times 4$  do tipo

$$\begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $A$  é uma matriz ortogonal  $3 \times 3$  (isto é, a matriz de uma transformação ortogonal relativa à base canônica do  $\mathbf{R}^3$ ),  $a$  é uma

vetor  $3 \times 1$  e  $0$  é a matriz nula  $1 \times 3$ . De fato: não é difícil mostrar que toda isometria  $F \in \text{ISO}(\mathbf{R}^3)$  determina unicamente uma transformação ortogonal  $T$  e um vetor  $a \in \mathbf{R}^3$  tal que  $F(u) = T(u) + a, \forall u \in \mathbf{R}^3$ . Obtemos imediatamente então um isomorfismo entre  $\text{ISO}(\mathbf{R}^3)$  e  $G(4)$  através da aplicação

$$F \xrightarrow{\varphi} \begin{bmatrix} [T] & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $[T]$  é a matriz de  $T$  na base canônica do  $\mathbf{R}^3$ .

Observe que, dados  $F \in \text{ISO}(\mathbf{R}^3)$  e  $v \in \mathbf{R}^3, v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $F(v) =$  três primeiras coordenadas do produto matricial

$$\varphi(F) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos, de passagem, que embora esta representação do grupo de isometrias do  $\mathbf{R}^3$  não seja muito conhecida, ela é bastante útil quando queremos operar explicitamente com tais aplicações.

A idéia então para obtermos os subgrupos a 1-parâmetro de isometrias do  $\mathbf{R}^3$  a menos de conjugação é, primeiro, “reduzir” as matrizes de  $G(4)$  a uma “forma canônica”. Isto pode ser feito (mas não o será aqui) e o que se obtém é que toda matriz de  $G(4)$  é conjugada (por um elemento de  $G(4)$ ) a uma matriz do tipo

$$\Phi_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}^3.$$

É fácil ver que dados  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , o subconjunto

$$\mathcal{G}_{\alpha, \beta} = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \alpha t & \sin \alpha t & 0 & 0 \\ -\sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}$$

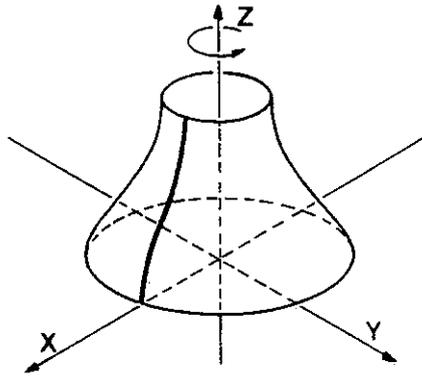


Figura 1.

é um subgrupo a 1-parâmetro de isometrias do  $\mathbf{R}^3$ . Decorre disto e da forma canônica das matrizes de  $G(4)$  que todo subgrupo a 1-parâmetro de isometrias do  $\mathbf{R}^3$  é conjugado a um  $\mathcal{G}_{\alpha,\beta}$ , para certos  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ .

Voltando, agora, ao universo das superfícies de Curvatura Média constante, temos três casos a considerar:

**a) Superfícies de Revolução de Curvatura Média Constante**

As superfícies de Revolução de Curvatura Média constante são, por definição, as superfícies  $\mathcal{G}_{\alpha,0}$ -invariantes,  $\alpha \neq 0$ , de  $H = c^{te}$ . Estas superfícies são obtidas, como se sabe, fazendo-se a revolução de uma curva no plano  $x - z$  em torno do eixo  $z$ , por exemplo. (fig. 1)

Sendo  $\alpha \neq 0$ , temos necessariamente  $\mathcal{G}_{\alpha,0} = \mathcal{G}_{1,0}$ . Então

**PROPOSIÇÃO 1.** *Seja  $\gamma$  uma curva no semiplano  $x - z$ ,  $x > 0$ , dada pelas equações paramétricas  $x = x(s)$ ,  $z = z(s)$ , sendo  $s$  o parâmetro comprimento de arco, ou seja,  $\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = 1$ . Seja  $S$  a superfície  $\mathcal{G}_{1,0}$ -invariante gerada por  $\gamma$  (isto é,  $S = \mathcal{G}_{1,0}(\gamma)$ ). Então  $S$  tem Curvatura Média constante  $H \geq 0$  se, e somente se,  $\gamma$  satisfaz à seguinte equação diferencial:*

$$\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x} + \frac{\dot{z}}{x} + 2H = 0. \quad (*)$$

PROVA: Suponhamos que  $S$  tenha Curvatura Média constante  $H$ . Em particular, a Curvatura Média de  $S$  num ponto  $(\gamma(s) = (x(s), 0, z(s)))$  é  $H$ . Sabemos que  $H$  é dada pelo traço da aplicação

$$d\eta: T_{\gamma(s)}(S) \rightarrow T_{\gamma(s)}(S) \\ v \mapsto \frac{d\eta}{dv},$$

onde  $\eta$  é um campo de vetores unitário normal à  $S$  numa vizinhança de  $\gamma(s)$ .

Observamos que uma base (ortogonal) de  $T_{\gamma(s)}(S)$  é dada por  $\{\dot{\gamma}(s), h(s)\}$ , onde  $h(s) = \left. \frac{d}{dt} \Phi_t(\gamma(s)) \right|_{t=0}$ , com

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de  $d\eta$  naquela base é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x} & 0 \\ 0 & \frac{\dot{z}}{x} \end{bmatrix},$$

pois

$$d\eta(\dot{\gamma}(s)) = (\ddot{z}, 0, -\ddot{x}) = (\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x})\dot{\gamma}(s)$$

e

$$d\eta(h(s)) = (0, -\dot{z}, 0) = \frac{\dot{z}}{x} h(s).$$

Obs.: o vetor normal  $\eta$  escolhido, num ponto  $\Phi_t(\gamma(s))$ , foi

$$(\dot{z}(s) \cos t, -\dot{z}(s) \sin t, -\dot{x}(s)).$$

Reciprocamente, suponhamos que  $\gamma$  satisfaça (\*). Então  $S$  tem Curvatura Média  $H$  nos pontos de  $\gamma$ . Isto já é suficiente para concluirmos que  $S$  tem Curvatura Média constante igual a  $H$ , pois todo ponto de  $S$  é obtido de um ponto de  $\gamma$  mediante uma isometria do  $\mathbf{R}^3$  que deixa  $S$  invariante. Se o leitor, no entretanto, não estiver convencido, convém que faça os cálculos. ■

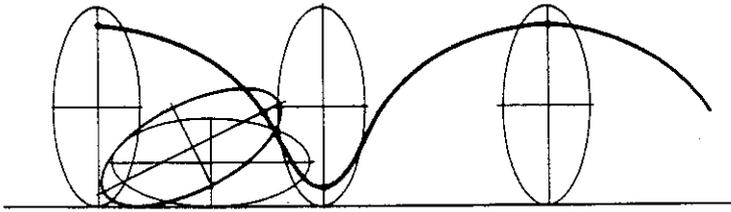


Figura 2.

A equação (\*) não pode ser integrada em termos de funções elementares, mas pode em termos de funções elípticas. Charles Delaunay, em 1841, obteve tais integrais reparametrizando convenientemente as curvas geradoras. Com isso ele conseguiu mostrar o seguinte curioso resultado:

**TEOREMA:** (Charles Delaunay). *A curva plana descrita por um dos focos de uma cônica quando esta rola sobre uma reta, sem deslizar, gera uma superfície de revolução de Curvatura Média constante. Além disso, toda superfície de revolução com Curvatura Média constante é obtida desta maneira.*

Este “método” de construir curvas geradoras de superfícies de revolução com Curvatura Média constante tem sido motivo de interesse de vários matemáticos. Num artigo no AMM de 1931, Yates mostrou como construir um aparelho capaz de gerar mecanicamente tais curvas ([32]). D. Hilbert e Cohn-Vossen em seu fascinante livro “Geometry and the Imagination” ([5]) redescrivem o aparelho de Yates colocando o assunto num contexto de interesse mais geral. Recentemente, W.Y. Hsiang introduziu os conceitos de hipersuperfícies rotacionais generalizadas em  $\mathbf{R}^n$  ([15]), e mostrou que as curvas geradoras destas hipersuperfícies podem ser obtidas por processo semelhante. M. do Carmo e M. Dajczer introduziram em [8] superfícies de revolução em espaços de Geometria Hiperbólica e Esférica. Mais recentemente ainda, Eells ([10]) retomou o método de rolamento, analisando outras propriedades das superfícies de revolução e I. Sterling, em sua Tese de Doutorado

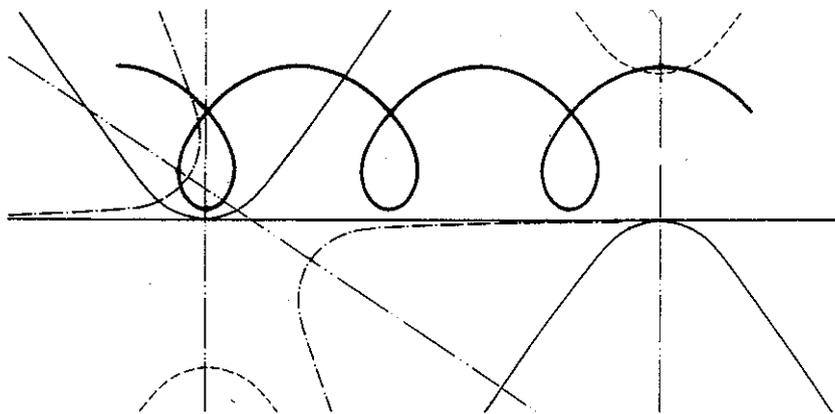


Figura 3.

(veja [31]), mostrou que o método de Delaunay também funciona para superfícies nos espaços estudados em [8].

#### b) Superfícies Helicoidais de Curvatura Média Constante

As superfícies Helicoidais de Curvatura Média constante são, por definição, as superfícies  $\mathcal{G}_{\alpha,\beta}$ -invariantes, com  $\alpha, \beta \neq 0$ , de  $H = c^{te}$ . Observe que  $\mathcal{G}_{\alpha,\beta} = \mathcal{G}_{1,\delta}$ , onde  $\delta = \frac{\alpha}{\beta}$ . Superfícies  $\mathcal{G}_{1,\delta}$ -invariantes são também chamadas superfícies helicoidais de passo  $\delta$ .

Tanto quanto sabemos, não existe na literatura nenhum trabalho descrevendo, sob o ponto de vista da Geometria Equivariante, as superfícies helicoidais de  $H = c^{te}$ . Entretanto elas já são conhecidas há longo tempo, pelo menos as mínimas [33]. Mais recentemente, M.P. do Carmo e M. Dajczer, usando métodos obtidos por Bour [3], determinaram explicitamente as superfícies helicoidais de Curvatura Média constante positiva [9].

Do ponto de vista da Geometria Equivariante, podemos tentar descrever tais superfícies através do estudo de suas curvas geradoras no plano  $x - y$ . De fato, podemos provar sem dificuldade que toda superfície  $\mathcal{G}_{1,\delta}$ -invariante é gerada por uma curva no plano  $x - y$  e temos:

PROPOSIÇÃO 2. Seja  $\gamma$  uma curva no semiplano  $x - y$ , dada pelas equações paramétricas  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , sendo  $s$  o parâmetro comprimento de arco. Seja  $S$  a superfície  $\mathcal{G}_{1,\delta}$ -invariante gerada por  $\gamma$ . Então  $S$  tem Curvatura Média constante  $H \geq 0$  se, e somente se,  $\gamma$  satisfaz à seguinte equação diferencial:

$$(x^2 + y^2 + \delta^2)(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) + (\dot{x}y - x\dot{y}) - \frac{2H}{\delta}(\delta^2 + (x\dot{x} + y\dot{y})^2)^{\frac{3}{2}} = 0, \quad (**)$$

sendo  $\delta$  e  $H$  constantes.

PROVA: Suponhamos que  $S$  tenha Curvatura Média constante  $H$ . Observamos que uma base de  $T_{\gamma(s)}(S)$  é dada por  $\{\dot{\gamma}(s), h(s)\}$ , onde  $h(s) = \left. \frac{d}{dt} \Phi_t(\gamma(s)) \right|_{t=0}$ , com

$$\Phi_t = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando os valores de  $a_{11}$  e de  $a_{22}$  da matriz de  $d\eta$  naquela base, encontramos

$$a_{11} = \frac{\langle d\eta(\dot{\gamma}), \dot{\gamma} \rangle \langle h, h \rangle - \langle \eta(\dot{\gamma}), h \rangle \langle \dot{\gamma}, h \rangle}{\langle h, h \rangle - \langle \dot{\gamma}, h \rangle^2},$$

ou seja,

$$a_{11} = \frac{-\delta}{(\delta^2 + (x\dot{x} + y\dot{y})^2)^{3/2}} ((x^2 + y^2 + \delta^2)(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}) + (\dot{x}y - x\dot{y})).$$

$$a_{22} = \frac{\langle d\eta(h), h \rangle - \langle d\eta(h), \dot{\gamma} \rangle \langle \dot{\gamma}, h \rangle}{\langle h, h \rangle - \langle \dot{\gamma}, h \rangle^2} = 0.$$

Obs.: o vetor normal  $\eta$  escolhido, num ponto  $\gamma(s)$ , foi  $\frac{1}{(\delta^2 + (x\dot{x} + y\dot{y})^2)^{1/2}} (-\delta\dot{y}, \delta\dot{x}, x\dot{x} + y\dot{y})$ . ■

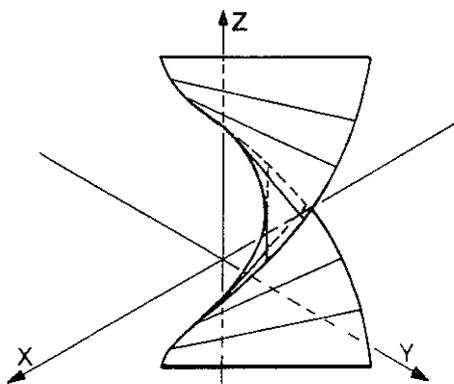


Figura 4.

É fácil verificar no caso  $H = 0$  (mínimo), qualquer reta passando pela origem é solução da equação acima (quando parametrizada por comprimento de arco). A superfície por ela gerada é o assim chamado **Helicóide** (fig. 4).

Usando-se uma ferramenta muito comum aos especialistas em superfícies mínimas, a *Representação de Weierstrass*, é possível mostrar que as soluções da equação diferencial (\*\*\*) acima (a menos de uma rotação em torno da origem) admitem a seguinte parametrização (veja [25]):

$$x_{\theta}(u) = \frac{1}{\cos \theta} [\cos \theta \cos(-u \sin \theta) \sinh(u \cos \theta) - \sin \theta \sin(-u \sin \theta) \cosh(u \cos \theta)]$$

$$y_{\theta}(u) = \frac{1}{\cos \theta} [-\cos \theta \sin(-u \sin \theta) \sinh(u \cos \theta) - \sin \theta \cos(-u \sin \theta) \cosh(u \cos \theta)],$$

onde  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

Um desenho típico de uma tal curva é:

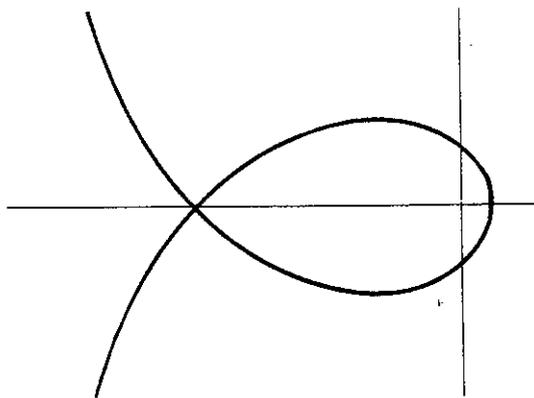


Figura 5.

Aparentemente, não é tão simples encontrarmos uma expressão para as superfícies de Curvatura Média positiva. Dado  $H > 0$ , uma solução é o círculo centrado em  $O$  e de raio  $1/H$ . A superfície gerada é um cilindro. Por outro lado, do Carmo e Dajczer provaram que qualquer outra solução (com o mesmo  $H$ ) tem que estar contida entre dois cilindros ao redor do eixo  $z$  com o cilindro de raio  $1/H$  compreendido entre eles. No nosso caso, isto significa que a curva geradora está num anel centrado na origem cortando o círculo de raio  $1/H$ .

O computador nos fornece as seguintes imagens (fig. 6).

Os desenhos sugerem que as curvas têm uma aparência “simpática”, pois apresentam um grande número de simetrias. Estas simetrias são reflexões das curvas geradoras sobre retas que passam pela origem e por pontos da curva que estão a uma distância crítica da origem.

Dada uma curva geradora  $\gamma$ , seja  $G_\gamma$  o grupo gerado por tais simetrias.  $G_\gamma$  é um subgrupo do grupo circular  $S^1$ , e pode ser finito ou não. Ele será finito se, e somente se, a curva  $\gamma$  “fechar” depois de um número finito de voltas em torno da origem. Se ele não for finito, será denso em  $S^1$ . Isto significa que a curva geradora será densa no (menor) anel que a contém. Isto por sua vez implica

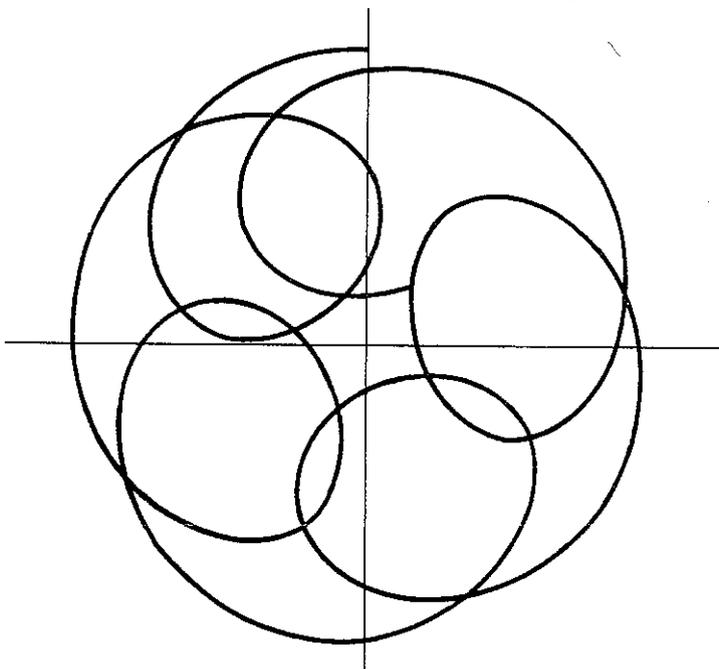


Figura 6.

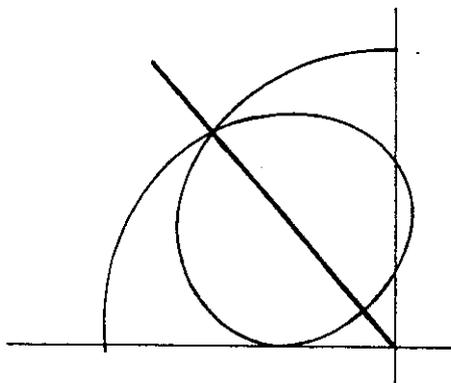


Figura 7.

que a superfície gerada será densa na região compreendida entre os dois cilindros.

Observamos que estas conclusões foram extraídas “empiricamente”, através dos desenhos do computador. Um problema, talvez nenhum pouco trivial, é o de dar uma prova matemática rigorosa para as afirmações acima.\*

Como ocorre com as superfícies de revolução, as superfícies helicoidais são importantes não apenas na medida em que fornecem exemplos de superfícies com Curvatura Média constante, mas na medida também em que constituem famílias (a 1-parâmetro, em geral) de superfícies de  $H = c^{te}$  que podem ser usadas como “obstrução” à construção de superfícies de  $H = c^{te}$  satisfazendo certas condições. Um exemplo de tal aplicação, no caso das helicoidais do  $\mathbf{R}^3$  pode ser visto em [25], onde a família de superfícies helicoidais mínimas é usada para caracterizar a porção do helicóide compreendida entre duas hélices como a única superfície fechada mínima admitindo como bordo tais hélices.

### c) Superfícies Translacionais de curvatura Média Constante

As superfícies Translacionais de Curvatura Média constante são, por definição, as superfícies  $\mathcal{G}_{0,\beta}$ -invariantes, com  $\beta \neq 0$ , de  $H = c^{te}$ . Para a teoria das superfícies de Curvatura Média constante em  $\mathbf{R}^3$ , tais superfícies não oferecem nenhuma contribuição, pois:

**PROPOSIÇÃO 3.** *Seja  $S$  uma superfície translacional com Curvatura Média constante. Então  $S$  é um plano ou um cilindro.*

**PROVA:** Suponhamos que  $S$  seja gerada por uma curva  $\gamma$  no plano  $x - y$  parametrizada por  $x = x(s)$  e  $y = y(s)$ , sendo  $t$  o parâmetro comprimento de arco. Verifica-se então que  $x(s)$  e  $y(s)$  satisfazem à equação  $\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = 2H$ . O membro esquerdo desta equação nada mais é do que a curvatura de  $\gamma$ . Como é bem sabido, curvas planas de curvatura constante só podem ser retas ou círculos, o que mostra a proposição.

---

\*Recebemos recentemente do prof. M.P. do Carmo uma cópia do trabalho [30], no qual os autores estudam este problema encontrando condições para que uma superfície helicoidal de Curvatura Média constante seja densa no anel cilíndrico que a contém.

d) **Alguns Comentários Finais a Propósito das Superfícies de Revolução de Curvatura Média Constante.**  
**A Conjectura de W. Meeks III**

Como já havíamos comentado anteriormente, foram construídos por Wente, em 1985, exemplos de superfícies compactas de Curvatura Média constante não congruentes à esfera redonda. No entanto, tais exemplos são todos não mergulhados, isto é, contêm auto-intersecções. Isto teria necessariamente de acontecer, pois por um teorema clássico de A.D. Alexandrov, *toda superfície compacta, mergulhada, de  $H = c^{te}$  é uma esfera redonda* ([1]).

Assim, nos perguntamos atualmente sobre o que pode ser dito a propósito das *superfícies completas mergulhadas de Curvatura Média constante*. Os únicos exemplos de tais superfícies, caso não-compacto, são os ondulóides, ou seja, aquelas superfícies de revolução que, segundo o “método de rolamento de Delaunay” ([6]), são geradas por curvas obtidas “rolando-se” uma elipse ao longo do bordo de um semi-plano, e a superfície de Blaine Lawson. Lawson constrói sua superfície da seguinte maneira: primeiro ele mostra a existência de uma porção compacta de superfície de Curvatura Média constante com bordo e cujo bordo são segmentos de reta. A seguir ele mostra que podemos refletir esta porção através destes segmentos de bordo de tal maneira que a superfície resultante é diferenciável, completa e mergulhada, estando contida entre dois planos.

A julgar por resultados recentes, não devem existir muitos outros exemplos: em [26], Ripoll prova que *uma superfície completa de  $H = c^{te}$  propriamente mergulhada contida num octante é, necessariamente, uma esfera redonda*. Em [22], W. Meeks avança bastante na caracterização de tais superfícies: em particular, ele prova que *não existem superfícies completas propriamente mergulhadas de  $H = c^{te}$  homeomorfas a uma esfera menos um ponto*. Ele prova também que *uma superfície completa de  $H = c^{te}$ , propriamente mergulhada, homeomorfa a uma esfera menos dois pontos tem que estar necessariamente a uma distância finita de uma reta*.

Estes teoremas conduzem à seguinte conjectura, devida a W. Meeks:

CONJECTURA: (W. Meeks III). *Uma superfície completa de  $H =$*

*c<sup>te</sup>, mergulhada e contida numa canaleta em  $\mathbf{R}^3$  é uma superfície de revolução.*

(Por canaleta, queremos dizer uma componente conexa do complementar da união de dois planos não paralelos do  $\mathbf{R}^3$ ).

Em um trabalho espetacular recente na direção da conjectura de Meeks, Korevaar, Kusner e Saloman provam que uma superfície completa de Curvatura Média constante propriamente mergulhada com dois fins (isto é, homeomorfa a uma superfície compacta menos dois pontos) é, necessariamente, de Delaunay ([20]).

## 2. Os exemplos de W.Y. Hsiang.

Até antes de 1985, a questão levantada por H. Hopf vinha desafiando os melhores matemáticos das quatro últimas décadas. O trabalho [14] de Hsiang, em 1982, embora não respondesse a esta questão, foi uma contribuição fundamental nesta direção.

Observamos que a questão de Hopf se enuncia de maneira similar em  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 3$  a saber: "*toda hipersuperfície compacta de Curvatura Média constante em  $\mathbf{R}^n$  difere de uma esfera redonda  $(n - 1)$ -dimensional*

$$S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| = r\}$$

*por uma isometria do  $\mathbf{R}^n$ , para algum  $r > 0$ ?"*

Os exemplos de Hsiang mostram que a resposta a ela é falsa em  $\mathbf{R}^4$  (de fato, ele mostra que ela é falsa para mais valores de  $n$ , mas nós vamos considerar aqui apenas  $n = 4$ ).

A idéia de Hsiang é simples e consiste em procurar contra-exemplos dentro das hipersuperfícies invariantes por um grupo conveniente de isometrias do  $\mathbf{R}^4$ .

De maneira análoga ao espaço tridimensional, o grupo de isometrias do  $\mathbf{R}^4$  pode ser identificado com as matrizes reais  $5 \times 5$  do tipo

$$\begin{bmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $A$  é uma matriz ortogonal  $4 \times 4$ ,  $a$  é um vetor  $4 \times 1$  e  $0$  é a matriz nula  $1 \times 4$ .

Observamos, então, que

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & \sin s & 0 & 0 & 0 \\ -\sin s & \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos r & \sin r & 0 \\ 0 & 0 & -\sin r & \cos r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; t, r \in \mathbf{R} \right\}$$

é um subconjunto a 2-parâmetros de isometrias do  $\mathbf{R}^4$ . Este é o grupo escolhido por Hsiang.

Observamos que a ação de um elemento de  $G$  sobre um ponto de  $\mathbf{R}^4$  consiste em rotar, independentemente, as duas primeiras e as duas últimas coordenadas do ponto. Desta forma, toda órbita de  $G$  (isto é, subconjuntos da forma  $G(p) = \{g(p) \mid g \in G\}$ ) contém um único ponto do tipo  $(x, 0, y, 0)$ , com  $x, y \geq 0$ . Assim, existe uma correspondência biunívoca entre o "quarto" de plano:

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, 0, y, 0) \mid x, y \geq 0\}$$

e o conjunto das órbitas de  $G$ .

Se um ponto de  $P$  está sobre o eixo  $x$ , isto é,  $P$  é da forma  $(x, 0, 0, 0)$ , então a órbita dele é o círculo de raio  $\|x\|$ . O análogo acontece para pontos sobre o eixo  $y$ . Em especial, a órbita da origem é formada apenas pela origem. Se o ponto é da forma  $p = (x, 0, y, 0)$ , com  $x, y > 0$ , então a órbita de  $p$  é um toro, ou seja, o produto cartesiano de dois círculos (de raios  $\|x\|$  e  $\|y\|$ ).

Uma curva de  $P$  determina uma hipersuperfície  $G$ -invariante em  $\mathbf{R}^4$ , e temos o seguinte resultado:

**PROPOSIÇÃO 4.** *Seja  $\gamma$  uma curva em  $P$  de equações paramétricas  $x = x(s)$  e  $y = y(s)$ , sendo  $s$  o parâmetro comprimento de arco ( $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ ). Então  $\gamma$  gera uma hipersuperfície de Curvatura Média constante  $H \geq 0$  se, e somente se, satisfaz à seguinte equação diferencial:*

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} - \frac{\dot{y}}{x} + \frac{\dot{x}}{y} + 3H = 0. \quad (***)$$

**PROVA:** Como no caso de superfícies, a Curvatura Média de uma hipersuperfície  $M$  em um ponto  $p$  é definida através do traço da aplicação linear

$$\begin{array}{ccc} d\eta: T_p(M) & \rightarrow & T_p(M) \\ v & \mapsto & \frac{d\eta}{dv}, \end{array}$$

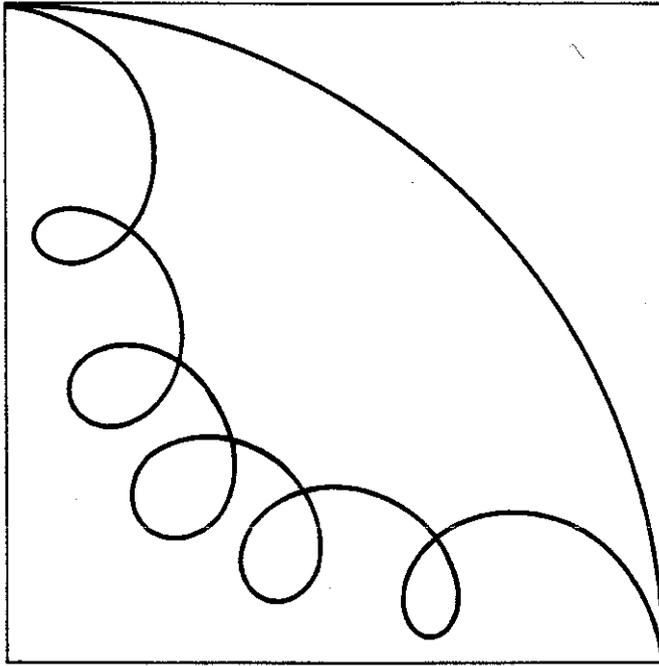


Figura 8.

isto é,  $H(p) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{3} \text{traço } d\eta$ .

Uma parametrização da hipersuperfície  $M$  gerada por  $\gamma$  é dada por

$$f(t, r, s) = (x(s) \cos t, -x(s) \sin t, y(s) \cos r, -y(s) \sin r).$$

Um vetor unitário normal a  $M$ , nos parâmetros  $t, r, s$ , é dado por

$$\eta(t, r, s) = (\dot{y} \cos t, -\dot{y} \sin t, -\dot{x} \cos r, \dot{x} \sin r).$$

Observamos que os vetores  $T, h_t, h_r$  formam uma base (ortonormal) do espaço tangente a  $M$  em cada ponto, onde

$$\begin{aligned} T &= \frac{\partial f}{\partial s} = (\dot{x} \cos t, -\dot{x} \sin t, \dot{y} \cos r, -\dot{y} \sin r), \\ H_t &= \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial t} = (-\sin t, -\cos t, 0, 0) \quad \text{e} \\ h_r &= \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial r} = (0, 0, -\sin r, -\cos r). \end{aligned}$$

Calculando a matriz de  $d\eta$  nesta base, encontramos

$$a_{11} = \langle d\eta(T), T \rangle = - \left\langle \eta, \frac{\partial f^2}{\partial s^2} \right\rangle = \dot{x}\dot{y} - \ddot{x}\dot{y};$$

$$a_{22} = \langle d\eta(h_t), h_t \rangle = \frac{1}{x^2} \left\langle d\eta \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right), \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = -\frac{1}{x^2} \left\langle \eta, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right\rangle = \frac{\dot{y}}{x}$$

$$a_{33} = \langle d\eta(h_r), h_r \rangle = \frac{1}{y^2} \left\langle d\eta \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right), \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = -\frac{1}{y^2} \left\langle \eta, \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right\rangle = -\frac{\dot{x}}{y}.$$

Por fim, calculamos  $-3H = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ , o que nos dá a fórmula esperada.

Obs.: Diretamente, verificamos que o círculo

$$x(s) = R \cos \left( \frac{s}{R} \right), \quad y(s) = R \sin \left( \frac{s}{R} \right)$$

satisfaz à equação diferencial acima para  $H = \frac{1}{3R}$ .

A hipersuperfície gerada por ele nada mais é que a conhecida Esfera Euclidiana de dimensão 3 e raio  $R$ ,  $S^3(R)$ . Verifiquemos isso. Temos

$$M = G(\gamma) = \left\{ \left( R \cos \left( \frac{s}{R} \right) \cos t, R \cos \left( \frac{s}{R} \right) \sin t, \right. \right. \\ \left. \left. R \sin \left( \frac{s}{R} \right) \cos r, R \sin \left( \frac{s}{R} \right) \sin r \right) \right\}$$

com  $t, r, s \in \mathbf{R}$ .

Então

$$\left[ R \cos \left( \frac{s}{R} \right) \cos t \right]^2 + \left[ R \cos \left( \frac{s}{R} \right) \sin t \right]^2 + \left[ R \sin \left( \frac{s}{R} \right) \cos r \right]^2 \\ + \left[ R \sin \left( \frac{s}{R} \right) \sin r \right]^2 = R^2,$$

ou seja,  $G(\gamma) \subset S^3(R)$ .

Por outro lado, se  $(x, y, z, w) \in S^2(R)$ , então  $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, \sqrt{z^2 + w^2}, 0)$  que é um elemento de  $\gamma$  e  $(x, y, z, w)$  é obtido de

$(\sqrt{x^2 + y^2}, 0, \sqrt{z^2 + w^2}, 0)$  rotando-se as duas primeiras e as duas últimas coordenadas, de modo que  $S^3 \subset G(\gamma)$ , ou seja,  $S^3 = G(\gamma)$ .

Através de uma análise detalhada da equação diferencial (\*\*\*) , Hsiang pode provar o seguinte

**TEOREMA:** *Para cada valor positivo de  $H$  e para cada natural  $n$  existe uma curva solução de (\*\*\*) começando no eixo  $x$  e terminando no eixo  $y$  e tendo  $n$  "laços".*

As hipersuperfícies geradas pelas curvas acima são compactas e homeomorfas a esferas tridimensionais. No entanto, é claro que não são congruentes a esferas Euclidianas (*esferas redondas*).

### 3. Comentários Finais.

O problema de obterem-se exemplos de hipersuperfícies de Curvatura Média constante é, em sua expressão mais direta, um problema de Equações Diferenciais Parciais (EDP). Como se sabe, não existem métodos gerais que nos forneçam soluções de uma dada EDP, sendo tal problema, em geral, bastante complicado. No entanto, se nos restringirmos àquelas soluções que representam hipersuperfícies invariantes por subgrupos de isometrias do espaço, e se esse subgrupo é escolhido de tal maneira que a hipersuperfície seja obtida pela ação do subgrupo sobre uma curva da hipersuperfície, então nós estaremos reduzindo o problema de EDP para um problema de EDO (Equações Diferenciais Ordinárias) que é, em geral, incomparavelmente mais fácil e para o qual existem muitas técnicas simples disponíveis.

Os subgrupos que devemos escolher são aqueles cujas órbitas de maior dimensão tenham co-dimensão 2, ou seja, a dimensão do espaço menos a dimensão de tais órbitas é 2. Toda hipersuperfície invariante por um tal grupo "é gerada" por uma curva.

Tais subgrupos (no caso da Geometria Euclidiana e no caso de subgrupos compactos) estão totalmente classificados em [21] e, de um modo geral, quanto maior a dimensão do espaço, maior o número de tais subgrupos. Até o momento, são relativamente poucos os trabalhos descrevendo as hipersuperfícies de Curvatura Média constante invariantes por tais subgrupos. Por exemplo, no caso daqueles apresentados por Hsiang, onde o grupo considerado é  $S^1 \times S^1$ , ainda não se tem uma descrição de todas as curvas geradoras.

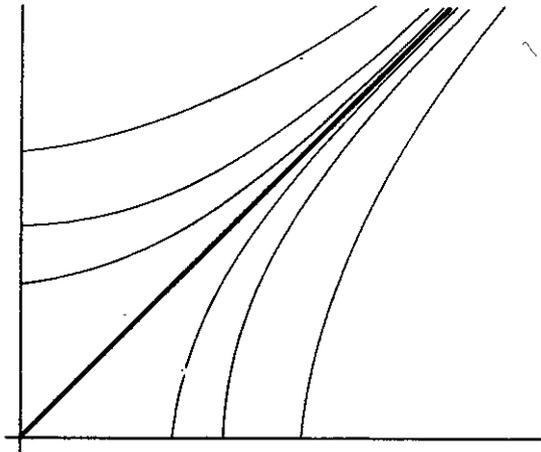


Figura 9.

Hilário de Alencar, em sua Tese de Doutorado ([A1]), se ocupou em descrever as curvas geradoras de hipersuperfícies mínimas ( $H = 0$ ). Ele mostrou o resultado interessante de que as curvas geradoras “folheiam” o quarto de plano  $P$ , como no desenho abaixo.

No entanto, a reta bissetriz gera uma hipersuperfície com uma “singularidade” na origem. Tal hipersuperfície é chamada de *Cone Mínimo em  $\mathbf{R}^4$* , tendo por equação  $x^2 + y^2 = z^2 + w^2$ .

Esta família de curvas produz uma família de hipersuperfícies mínimas do  $\mathbf{R}^4$ , uma delas com uma singularidade, o Cone Mínimo, que “folheia” o  $\mathbf{R}^4$ .

O caso de  $H > 0$ , parte está escrito no trabalho de Hsiang, mas ainda existem casos interessantes a serem estudados. Veja, por exemplo, que se tomamos a semi-reta  $y \equiv a$  então a hipersuperfície gerada tem Curvatura Média constante  $H = 1/3a$ . Tal hipersuperfície nada mais é que o produto  $\mathbf{R}^2 \times S^1 = \{(x, y, z, w) \mid (x, y) \in \mathbf{R}^2, z^2 + w^2 = 1\}$ .

Este exemplo simples mostra que o análogo da conjectura de Meeks em dimensão 4 é falso, e surge a questão: *são as hipersuperfícies de revolução e  $S^1 \times S^1$ -invariantes em  $\mathbf{R}^4$  as únicas superfícies completas de Curvatura Média constante mergulhadas*

*contidas numa "canaleta" do  $\mathbf{R}^4$ ?*

Antes de encerrarmos este trabalho, gostaríamos de comentar, *en passant*, que atualmente muito tem sido estudado sobre hipersuperfícies invariantes em Geometrias Não-Euclidianas. Por exemplo, como havíamos mencionado, superfícies de Revolução podem ser construídas, de maneira similar às superfícies de Revolução em  $\mathbf{R}^3$ , nos espaços de geometria esférica ( $S^3$ ) e hiperbólica ( $H^3$ ). Superfícies de Revolução Esférica de  $H = c^{te}$  estão descritas em [16], [8], [27], [28]. Superfícies de Revolução Hiperbólica estão em [16] e [12]. Superfícies Helicoidais, que fazem sentido em Geometrias Esférica e Hiperbólica, estão em [21] no caso mínimo Esférico, e em [29] no caso mínimo Hiperbólico.

Não conhecemos nenhum trabalho descrevendo as superfícies helicoidais de Curvatura Média constante positiva, nem em  $S^3$  nem em  $H^3$ . Em [25] está provado que toda superfície helicoidal mínima em  $H^3$  é mergulhada. É bastante interessante saber se existem exemplos mergulhados com Curvatura Média constante positiva. É de se esperar que tal aconteça para  $0 \leq H < 1$  (estamos admitindo tratar-se do espaço hiperbólico de Curvatura Seccional -1). Um caso especial que chama muito a atenção é o caso das helicoidais de Curvatura Média constante igual a 1. Conjecturamos que o bordo assintótico (veja [11] ou [25]) de tais superfícies é denso no bordo assintótico de  $H^3$ .

Na geometria Hiperbólica, ainda podemos considerar mais dois tipos de superfícies invariantes, a saber, superfícies Parabólicas e Hiperbólicas. Estas estão descritas em [13].

Além disso, são muitos os trabalhos caracterizando superfícies invariantes de  $H = c^{te}$  nas Geometrias Esférica e Hiperbólica e ainda restam muitos problemas interessantes em aberto.

Finalmente, gostaríamos de mencionar que a Geometria Equivariante vem sendo aplicada em outros problemas da Geometria Diferencial. Como exemplo, mencionamos o trabalho de Maria Luiza Leite que usou o grupo de isometrias da Geometria Esférica, via Geometria Equivariante, para descrever hipersuperfícies de Curvatura Escalar constante em  $S^4$ . Problemas Isoperimétricos (veja [21]) têm sido atacados também via Geometria Equivariante. Tal é o caso da Tese de Doutorado de P. Pedrosa (veja [23]) e artigos recentes de W. Hsiang.

## BIBLIOGRAFIA

1. Alexandrov, A.D., *Characteristic Property of Spheres*, Annali di Mat. Pura ed Appl., Bologna **58** (1962), 303-315.
2. Alencar, H., *Hipersuperfícies Mínimas de  $\mathbf{R}^{2m}$  Invariantes por  $SO(m) \times SO(m)$* , Tese de Doutorado, IMPA.
3. Bour, E., *Memoire sur le Deformation de Surfaces*, Journal de l'École Polytechnique **3** (1862), 1-148.
4. Back, P., do Carmo, M.P., Hsiang, W.Y., *Some Fundamental Equations on Equivariant Riemannian Geometry*, Pre-print.
5. Hilbert, D. e Cohn-Vossen, S., "Geometry and the Imagination," Chelsea. New York, 1952.
6. Delaunay, C., *Sur la Surface de Révolution dont la Courbure Moyenne est Constante*, Journal des Mathématiques Pures et Appliquées **6(1)** (1841), 309-320, Paris.
7. do Carmo, M.P., "Differential Geometry of Curves and Surfaces." Prentice-Hall, Englewood, New Jersey, 1976.
8. do Carmo, M.P. e Dajczer, M., *Helicoidal Surfaces with Constant Mean Curvature*, Tôhoku Mathematical Journal **34** (1982), 425-435.
9. do Carmo, M.P. e Dajczer, M., *Rotational Hypersurfaces in Spaces of Constant Curvature*, Transactions of the American Mathematical Society **277(2)** (1983), 685-709.
10. Eells, J., *The Surfaces of Delaunay*, Mathematical Intelligencer **9**, n. 1 (1987), 53-57.
11. Rosenberg, H. e Earp, S., *Some Remarks on Surfaces of Prescribed Mean Curvature*, pre-print.
12. Gomes, J. de M., *Sobre Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante no Espaço Hiperbólico*, Tese de Doutorado, Informes de Matemática, IMPA, Série F, Rio de Janeiro, 011, 1985.
13. Gomes, J. de M., Ripoll, J.B., Rodríguez, L., *Surfaces with Constant Mean Curvature in the Hyperbolic Space*, Informes de Matemática, IMPA, 1984.
14. Hitt, L. R. e Roussos, I. M., *Computer Graphics of Helicoidal Surfaces with Constant Mean Curvature*, An. Acad. bras. Ci. **63** (1991), 211-228.
15. Hsiang, W.Y., Yu, W.A., *New Examples of Constant Mean Curvature Immersions of  $(2k - 1)$ -Spheres into Euclidean  $2k$ -Space*, Annals of Mathematics **117** (1983), 609-625.
16. Hsiang, W.Y., *Generalized Rotational Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in the Euclidean Space*, Journal of Differential Geometry **17** (1982), 337-346, Providence.
17. Hsiang, W.Y., *On Generalization of Theorems of A.D. Alexandrov and C. Delaunay on Hypersurfaces of Constant Mean Curvature*, Duke Math. Journal **49(3)** (1983).
18. Hsiang, W.Y., Lawson, B., *Minimal Submanifolds of Low Cohomogeneity*, Journal of Differential Geometry **V.5(1 and 2)** (1971), 1-38.

19. Hitt, L.R.P., Roussos, I.M., *Computer Graphics of Helicoidal Surfaces with Constant Mean Curvature*, pre-print.
20. Kapouleas, N., *Complete Constant Mean Curvature Surfaces in Euclidean Three Space*, pre-print.
21. Korevaar, N., Kusner, R., Saloman, B., *The Structure of Complete Embedded Surfaces with Constant Mean Curvature*, pre-print.
22. Leite, M.L., *Rotational Hypersurfaces of Space Forms with Constant Scalar Curvature*, pre-print.
23. Meeks, W., *The Topology and Geometry of Embedded Surfaces of Constant Mean Curvature*, *Journal of Differential Geometry* **27** (1988), 539-552.
24. Pedrosa, R., *On the Uniqueness of Isoperimetric Regions in the Cylindrical Spaces*, Berkeley, 1988. [Thesis].
25. Ripoll, J.B., *A Note on Compact Surfaces with Constant Mean Curvature*, pre-print.
26. Ripoll, J.B., *Uniqueness of Plateau's Solution for a Pair of Helices*, [pre-print], *Informes de Pesquisa da Universidade de Heidelberg*, Alemanha.
27. Ripoll, J.B., *A Characterization of Spheres in Euclidean Space*, *Archiv of Mathematics* **51** (1988), 474-475.
28. Ripoll, J.B., *Superfícies Invariantes de Curvatura Média Constante em  $Q^3$* , Tese de Doutorado, Impa, 1986.
29. Ripoll, J.B., *Uniqueness of Minimal Rotational Surfaces in  $S^3$* , *American Journal of Mathematics* **111** (1989), 537-547.
30. Ripoll, J.B., *Helicoidal Minimal Surfaces in the Hyperbolic Space*, *Nagoya Mathematical Journal* **114** (1989), 65-75.
31. Sterling, I., *A Generalization of a Theorem of Delaunay to Rotational  $W$ -Hypersurfaces of  $\sigma_1$ -Type in  $H^{n+1}$* , *Pacific Journal of Mathematics* **127**(1) (1987), 187-197.
32. Yates, R.C., "The Description of a Surface of Constant Curvature," December, 1931, *Amer. Math. Monthly*.
33. Wentz, *A Counter-Example in 3-Space to a Conjecture of H. Hopf*, *Pacific Journal of Mathematics* **121**(1) (1986), 193-243.
34. White, B., *Some Developments in Differential Geometry*, *The Mathematical Intelligencer* **9**, n. 1 (1989), 41-47.
35. Wunderlich, W., *Beitrag zur Kenntnis der Minimalschraubflächen*, *Comp. Math.* (1952), 297-311.

Instituto de Matemática - UFRGS  
 Av. Bento Gonçalves, 9500, Campus do Vale  
 91.500 - Porto Alegre - RS