Matemática Universitária Nº 13, junho de 1991, 95–104

Sobre os Três Primeiros Critérios, da Hierarquia de De Morgan, para Convergência ou Divergência de Séries de Termos Positivos

Hamilton Luiz Guidorizzi

1. Introdução.

Quando se deseja estudar uma série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ de termos positivos com relação a convergência ou divergência o primeiro critério que em geral se aplica, por sua simplicidade, é o teste da razão. Sabe-se, entretanto, que tal critério não decide quando

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1. \tag{1}$$

O que fazer neste caso? Uma alternativa seria aplicar o teste da raiz, infelizmente, (1) implica $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ (veja **[2]**) e, portanto, o teste da raiz também não decide. Pois bem, um critério que pode decidir situações em que (1) ocorre é o critério de Raabe; assim quando (1) acontece aplica-se o teste de Raabe. E quando o de Raabe não decide? Neste caso, um caminho indicado é aplicar o critério que ocupa a terceira posição na hierarquia de critérios de De Morgan (Augustus De Morgan 1806–1871). Evidentemente, as duas primeiras posições são ocupadas, respectivamente, pelos critérios da razão e de Raabe.

Como em **[1]**, indicaremos, respectivamente, por τ_o, τ_1 e τ_2 os critérios que ocupam a primeira, segunda e terceira posições em tal hierarquia. Como veremos, a idéia básica que conduz ao estabelecimento de τ_1 e τ_2 é a mesma que nos leva ao critério da razão: obtém-se o critério da razão por comparação com a série geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n$, $\alpha > 0$, o de Raabe por comparação com a série harmônica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, e o critério τ_2 por comparação com a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n[\ln n]^\alpha}$, $\alpha > 0$. Observamos que as duas últimas séries acima mencionadas são convergentes para $\alpha > 1$ e divergentes para $\alpha \leq 1$. (Veja **[2]**).

Em todo o nosso trabalho, o seguinte critério desempenhará um papel fundamental.

Critério de comparação de 2ª espécie. Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos positivos. Suponhamos que exista um natural n_o tal que, para $n \geq n_o$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}. \tag{2}$$

Nestas condições, temos:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ convergente.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ divergente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ divergente.

Para provar tal critério é só observar que (2) é equivalente a

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

e daí, para todo $n \geq n_o$,

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n_o}}{b_{n_o}}$$

ou seja

$$a_n \leq \frac{a_{n_o}}{b_{n_o}} b_n$$

e agora é só aplicar o critério de comparação. (Veja **[2]**).

Para finalizar a seção, queremos ressaltar que o objetivo deste trabalho é apenas o de sugerir um caminho, e que parace bastante natural, de apresentar os critérios τ_1 e τ_2. (Para um relato completo sobre os critérios da hierarquia de De Morgan veja [1], capítulo XXVI.)

2. O Critério de Raabe.

CRITÉRIO DE RAABE: Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos e suponhamos que exista finito ou infinito o limite

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L.$$

Temos:

a) $L>1$ ou $L=+\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.

b) $L<1$ ou $L=-\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

c) $L=1$ o critério nada revela.

DEMONSTRAÇÃO: Em primeiro lugar vamos demonstrar b). Como $L<1$ ou $L=-\infty$, segue da definição de limite que existe um natural n_o tal que para $n\geq n_o$,

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leq 1.$$

Daí, para $n\geq n_o$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

onde $c_n=\frac{1}{n-1}$. Como a série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}$ é divergente, pelo critério de comparação de 2ª espécie, segue que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente. Para provar a) vamos precisar da desigualdade

$$(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x,\quad x\geq -1\quad \text{e}\quad \alpha>1 \tag{3}$$

(Para verificar (3) é só observar que a função $f(x)=(1+x)^\alpha$, $x\geq -1$, com $\alpha>1$, tem a concavidade voltada para cima e que

$y = 1 + \alpha x$ é a reta tangente no ponto (0,1).) Vamos, então, à prova de a). Seja $\alpha > 1$, com $\alpha < L$ se L for finito. Pela definição de limite, existe n_o tal que, para $n \geq n_o$,

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > \alpha.$$

Daí, para $n \geq n_o$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{\alpha}{n}.$$

Tendo em vista (3)

$$1 - \frac{\alpha}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha}, \quad n \geq 1.$$

Logo, para $n \geq n_o$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha}.$$

Mas

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

onde $b_n = \frac{1}{(n-1)^{\alpha}}$. Assim, para $n \geq n_o$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Como a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^{\alpha}}$, $\alpha > 1$, é convergente, pelo critério de comparação de 2ª espécie, a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente. Com relação a c), fica a cargo do leitor verificar que $\lim_{n \to +\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1$ quando $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ ou $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ e observar que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ é divergente e $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ é convergente. ∎

É interessante observar que o teste de Raabe decide sempre que o da razão decidir. De fato, como se verifica facilmente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = +\infty$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -\infty.$$

Além disto, o critério de Raabe pode decidir situações que o da razão não decide, como mostra o seguinte exemplo.

EXEMPLO: Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ onde

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

e, portanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Logo, o critério da razão não decide. Por outro lado,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2+5n}{4n^2+10n+6} = \frac{3}{2}.$$

Pelo critério de Raabe a série é convergente.

3. O Critério τ_2.

CRITÉRIO τ_2: Seja $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos e suponhamos que exista finito ou infinito o limite

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln n\left[1 - \frac{n}{n-1}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = L. \tag{4}$$

Temos

a) $L > 1$ ou $L = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente.

b) $L < 1$ ou $L = -\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente.

c) $L = 1$ o critério nada revela.

Demonstração: Vamos começar por b). Como $L < 1$ ou $L = -\infty$, existe n_o tal que, para $n \geq n_o$,

$$n \ln n \left[1 - \frac{n}{n-1} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] \leq 1.$$

Daí, para $n \geq n_o$,

$$\ln n \left[1 - \frac{n}{n-1} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] \leq \frac{1}{n}. \tag{5}$$

Para prosseguir, vamos precisar da desigualdade

$$\ln(1+x) \leq x, \qquad x > -1,$$

que deixamos para o leitor verificar. Daí

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n}, \qquad n > 1,$$

e, portanto,

$$\frac{1}{n} \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right), \qquad n > 1.$$

Daí e de (5) resulta, para $n \geq n_o$,

$$\ln n \left[1 - \frac{n}{n-1} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

e, portanto, para $n \geq n_o$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{(n-1)\ln(n-1)}{n \ln n}.$$

Fazendo $c_n = \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}$, resulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{c_{n+1}}{c_n} \qquad n \geq n_o.$$

Como a série $\sum_{n=2}^{+\infty} c_n$ é divergente, segue do critério de comparação de 2ª espécie que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é divergente. Vamos, agora, provar a).
Seja $\alpha > 1$, com $\alpha^2 < L$ se L for finito. Da definição de limite segue que existe um natural n_o tal que, para $n \geq n_o$,

$$n \ln n \left[1 - \frac{n}{n-1} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] > \alpha^2.$$

Daí, para $n \geq n_o$,

$$\frac{n}{n-1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{\alpha^2}{n \ln n}. \tag{6}$$

Como $\lim_{n \to +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = -1$ e $\alpha > 1$, existe um natural n_1 tal que, para $n \geq n_1$,

$$\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > -\alpha.$$

Daí e de (6) resulta, para $n \geq n_2$ onde $n_2 = \max\{n_o, n_1\}$,

$$\frac{n}{n-1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \alpha \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{n \ln n}.$$

Tendo em vista a desigualdade (3)

$$\frac{n}{n-1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(1 + \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{n \ln n}\right)^\alpha, \qquad n \geq n_2.$$

Portanto, para $n \geq n_2$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n-1}{n} \left[\frac{\ln(n-1)}{\ln n}\right]^\alpha.$$

Fazendo $b_n = \frac{1}{(n-1)[\ln(n-1)]^\alpha}$, $\alpha > 1$, teremos, para $n \geq n_2$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Como $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n$ é convergente, segue do critério de comparação de 2ª espécie que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ é convergente. Para completar a demonstração, deixamos para o leitor verificar que o limite (4) é igual a 1 quando

$$a_n = \frac{1}{n \ln n \ln \ln n} \quad \text{ou} \quad a_n = \frac{1}{n \ln n [\ln \ln n]^2}$$

e que $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ é divergente e $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln \ln n]^2}$ é convergente.

∎

Observação: Como

$$n \ln n \left[1 - \frac{n}{n-1} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \frac{n}{n-1} \ln n \left[n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right]$$

o limite (4) pode ser substituido por

$$\lim_{n \to +\infty} \ln n \left[n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right] = L.$$

Olhando para a observação acima, verificamos rapidamente que o critério τ_2 decide sempre que o de Raabe decidir. Além disto, o critério τ_2 pode decidir situações que o de Raabe não decide como mostra o próximo exemplo.

Exemplo: Sejam α, β, γ e δ números reais quaisquer não pertencentes ao conjunto dos números inteiros estritamente negativos. Estude a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ com relação a convergência e divergência onde

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n-1)}.$$

Solução: Observamos, inicialmente, que a partir de um n_o todos os termos da série terão o mesmo sinal, positivo ou negativo. Podemos supor, sem perda de generalidade, que seja positivo. Temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(\delta+n)} = \frac{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}{n^2 + (\gamma+\delta)n + \gamma\delta}.$$

Assim $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Logo, o critério da razão nada revela. Apliquemos, então, o critério de Raabe.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\gamma+\delta-\alpha-\beta)n^2 + (\gamma\delta-\alpha\beta)n}{n^2+(\gamma+\delta)n+\gamma\delta} \\ &= \gamma+\delta-\alpha-\beta.\end{aligned}$$

Portanto, a série converge para $\gamma+\delta-\alpha-\beta > 1$ e diverge para $\gamma+\delta-\alpha-\beta < 1$. O critério de Raabe nada revela se $\gamma+\delta-\alpha-\beta = 1$. Finalmente vamos aplicar τ_2. Tendo em vista a observação anterior, o limite (4) é igual a

$$\lim_{n\to+\infty} \ln n \frac{(\gamma+\delta-\alpha-\beta-1)n^2 + (\gamma\delta-\alpha\beta-\gamma-\delta)n - \gamma\delta}{n^2+(\gamma+\delta)n+\gamma\delta}$$

que é $+\infty$ se $\gamma+\delta-\alpha-\beta > 1$, 0 se $\gamma+\delta-\alpha-\beta = 1$ e $-\infty$ se $\gamma+\delta-\alpha-\beta < 1$. Pelo critério τ_2, a série converge se

$$\gamma+\delta-\alpha-\beta > 1$$

e diverge se

$$\gamma+\delta-\alpha-\beta \leq 1.$$

Consideremos, agora, a série de termos positivos $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e suponhamos que a partir de um natural n_o tenhamos

$$n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \alpha - \frac{\theta_n}{n^\lambda} \tag{7}$$

onde θ_n é uma seqüência limitada e $\lambda > 0$ um real fixo. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \ln n \frac{\theta_n}{n^\lambda} = 0 \qquad \text{(confira)}$$

resulta, tendo em vista a observação anterior, que a série será convergente se $\alpha > 1$ e divergente se $\alpha \leq 1$. Este resultado foi descoberto por Gauss e é conhecido como critério de Gauss. (Observe que (7) é equivalente a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\lambda}} \;)$$

Um outro lindo critério descoberto por Gauss e que deixamos para o leitor verificar é o seguinte: se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ for uma série de termos positivos e se a partir de um natural n_o

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^k + b_1 n^{k-1} + b_2 n^{k-2} + \cdots + b_k}{n^k + c_1 n^{k-1} + c_2 n^{k-2} + \cdots + c_k}$$

então a série será convergente se $c_1 - b_1 > 1$ e divergente se $c_1 - b_1 \leq 1$. (Sugestão: aplique τ_2.)

Para encerrar, sugerimos ao leitor enunciar e provar o critério τ_3 (τ_4, τ_5,... etc.).

Bibliografia

1. Chrystal, G., "Algebra - An elementary text-book," part II, 6ª edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1952.
2. Guidorizzi, H.L., "Um Curso de Cálculo," vol. 4, LTC Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1988.

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
C.P. 20 570 (Ag. Iguatemi)
CEP 01 498
São Paulo