Matemática Universitária Nº 14, dezembro de 1992, 51–67

Resolubilidade das Equações Diferenciais Parciais Lineares

Paulo Domingos Cordaro

O propósito desta nota é apresentar um ligeiro apanhado histórico de um dos problemas mais básicos da teoria das equações diferenciais parciais lineares: decidir sobre a resolubilidade local de uma equação diferencial parcial (EDP) linear. Na medida do possível ilustraremos os resultados e técnicas mais importantes através de exemplos, esperando que com isto o leitor adquira alguma idéia de como esta bonita teoria foi desenvolvida. Para formular o problema iniciamos introduzindo algumas notações e definições.

Um *operador diferencial parcial linear* (ODPL) em um aberto Ω de $\mathbf{R}^N$ é um operador da forma

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha. \qquad (1)$$

Aqui $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbf{Z}_+^N$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ e

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_N^{\alpha_N}, \qquad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

(i denota a unidade imaginária). Os coeficientes a_α serão assumidos infinitamente diferenciáveis em Ω e a valores complexos. O inteiro m denomina-se *ordem de* $P(x,D)$ se para algum α com $|\alpha| = m$ a função a_α não se anula identicamente em Ω.

Diremos que $P(x,D)$ *é resolúvel no ponto* $x_o \in \Omega$ se para toda $f \in C^\infty(\Omega)$ for possível determinar uma solução fraca da equação

$$P(x,D)u = f \qquad (2)$$

em alguma vizinhança (possivelmente dependente de f) de x_o. É possível demonstrar, via Teorema de Baire, que $P(x,D)$ é resolúvel em x_o se, e somente se, existir uma vizinhança aberta U de x_o em Ω tal que

$$P(x,D)\mathcal{D}'(U) \supseteq C_c^\infty(U)$$

onde $\mathcal{D}'(U)$ [resp. $C_c^\infty(U)$] denota o espaço das distribuições [resp. funções-teste] sobre U. Esta formulação é mais conveniente para o estudo do problema.

Por exemplo, todos os operadores com coeficientes constantes são resolúveis em todo ponto de $\mathbf{R}^N$. De fato, foi demonstrado independentemente por Malgrange [**9**] e Ehrenpreis [**2**] que todo ODPL com coeficientes constantes $P(D)$ não identicamente nulo admite uma solução fundamental, isto é, existe uma distribuição E sobre $\mathbf{R}^N$ tal que

$$P(D)E = \delta,$$

onde δ denota a medida de Dirac em $\mathbf{R}^N$.

Então se para $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ definirmos $u = E \star f$ teremos

$$P(D)u = P(D)(E \star f) = (P(D)E) \star f = \delta \star f = f$$

em $\mathbf{R}^N$. Note que neste caso a solução obtida é infinitamente diferenciável.

Para o estudo de problemas envolvendo equações diferenciais parciais lineares é conveniente introduzir as noções de *símbolo* e *símbolo principal* de um ODPL. Dado $P(x,D)$ as funções

$$P(x,\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

$$P_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

denominam-se, respectivamente, símbolo e símbolo principal do operador. Aqui estamos escrevendo, para $\xi \in \mathbf{R}^n$ e $\alpha \in \mathbf{Z}_+^N$,

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_N^{\alpha_N}.$$

Dizemos que $P(x,D)$ *é elíptico no ponto* x_o se

$$P_m(x_o,\xi) = 0, \qquad \xi \in \mathbf{R}^N \Longrightarrow \xi = 0.$$

Por exemplo o operador de Laplace $\Delta = -\sum_{j=1}^{N} D_j^2$ é elíptico em todo ponto de $\mathbf{R}^N$.

É fácil verificar que se $P(x, D)$ é elíptico em x_o então ele o será em toda uma vizinhança de x_o.

Todo operador elíptico em x_o é resolúvel em x_o e, de fato, todas as soluções de (2) são infinitamente diferenciáveis. Tais resultados já podem, hoje, ser considerados clássicos e para uma exposição destes, com referências históricas, o leitor deve consultar [4].

Somos então naturalmente levados a considerar, a seguir, ODPL's cujos símbolos principais podem se anular e analisar a resolubilidade das equações por eles definidas. Isto motiva a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1: *Diremos que $P(x, D)$ é de tipo principal em x_o se*

$$\xi \neq 0, \quad P_m(x_o, \xi) = 0 \Longrightarrow \nabla_\xi P_m(x_o, \xi) \neq 0.$$

Observe que a identidade de Euler

$$\xi . \nabla_\xi P_m(x_o, \xi) = m P_m(x_o, \xi)$$

mostra que $P(x, D)$ é de tipo principal em x_o se, e somente se, a função $\xi \mapsto \nabla_\xi P_m(x_o, \xi)$ não se anula no complementar da origem de $\mathbf{R}^N$. Em particular, um ODPL de primeira ordem

$$L(x, D) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x) D_j + a_o(x)$$

é do tipo principal em x_o se, e somente se,

$$\sum_{j=1}^{N} |a_j(x_o)| \neq 0.$$

Heuristicamente os operadores de tipo principal são aqueles em que os termos de ordem menor que m podem, no estudo, ser desprezados. O leitor deve observar que este não é, em geral, o caso. Por exemplo, tanto o operador do calor no plano

$$P_1(x, D) = iD_1 + D_2^2$$

quanto o operador de Schrödinger

$$P_2(x, D) = D_1 + D_2^2$$

possuem o mesmo símbolo principal ($= \xi_2^2$) mas tem comportamento distinto quanto, por exemplo, à regularidade de suas soluções.

Em 1955 Hörmander obteve em sua tese [**5**] o primeiro resultado de resolubilidade para uma classe de ODPL's de tipo principal:

TEOREMA 1: *Se $P(x, D)$ tiver símbolo principal real e for de tipo principal em x_o então $P(x, D)$ é resolúvel em x_o.*

A técnica utilizada por Hörmander consiste em obter uma desigualdade "a priori" envolvendo o chamado transposto formal de $P(x, D)$ e concluir então a resolubilidade do operador via um argumento de dualidade. Daremos, a seguir, uma ilustração de tal método.

DEFINIÇÃO 2: *Dado um ODPL em Ω, $P(x, D)$, seu transposto formal é o ODPL em Ω que satisfaz a identidade*

$$\int (P(x, D)\varphi)\,\psi\,dx = \int \varphi({}^tP(x, D)\psi)\,dx$$

quaisquer que sejam $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Denotaremos por $L^2(\Omega)$ o espaço de Hilbert das (classes de equivalência de) funções mensuráveis sobre Ω tais que $\int |f|^2\,dx < \infty$. A norma neste espaço será denotada por $\|\ \ \|$.

PROPOSIÇÃO 1: *Suponha que exista uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\varphi\| \leq C\,\|{}^tP(x, D)\varphi\| \tag{3}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Então $P(x, D)L^2(\Omega) \supseteq L^2(\Omega)$. Em particular $P(x, D)$ é resolúvel em todo ponto de Ω.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos

$$E = \{{}^tP(x, D)\varphi : \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}$$

como subespaço topológico de $L^2(\Omega)$.

Para cada $f \in L^2(\Omega)$ o funcional linear $E \to \mathbf{C}$ definido por

$$ {}^tP(x,D)\varphi \mapsto \int f\,\varphi\,dx $$

está bem definido e é contínuo uma vez que a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (3) implicam

$$ \left|\int f\,\varphi\,dx\right| \leq C\,\|f\|\,\|{}^tP(x,D)\varphi\|\,. $$

Pelo Teorema de Hahn-Banach este funcional pode ser estendido a $L^2(\Omega)$ continuamente. Aplicando o Teorema de Riesz a esta extensão concluimos a existência de um elemento $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$ \int f\,\varphi\,dx = \int u({}^tP(x,D)\varphi)\,dx $$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Logo $P(x,D)u = f$ no sentido de distribuições e a proposição fica, portanto, demonstrada.

A segunda metade da década de 50 assiste o aparecimento de dois trabalhos cruciais sobre o tema. O primeiro deles apresenta o célebre exemplo de Hans Lewy [8]. Em 1956 Lewy mostrou que o operador de primeira ordem

$$ L(x,D) = iD_1 - D_2 + 2(x_1 + ix_2)D_3 $$

não é resolúvel em ponto algum de $\mathbf{R}^3$. Na realidade o resultado é ainda mais forte: existe $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ para a qual a equação $L(x,D)u = f$ não tem solução em aberto algum (não vazio) de $\mathbf{R}^3$.

O segundo trabalho mencionado é assinado por Hörmander [6] e apresenta uma clara explicação do fenômeno detectado por Lewy. Neste trabalho o autor demonstra uma condição necessária para a resolubilidade local de um ODPL, em um dado ponto x_o, envolvendo o comutador entre $P(x,D)$ e seu conjugado $\overline{P}(x,D)$:

$$ C(x,D) = \overline{P}(x,D)P(x,D) - P(x,D)\overline{P}(x,D). $$

Aqui, se $P(x,D)$ é como em (1), estamos escrevendo

$$ \overline{P}(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} \overline{a_\alpha(x)}D^\alpha. $$

Deve-se observar que $C(x, D)$ é um ODPL de ordem $\leq 2m - 1$, isto é, um operador da forma

$$C(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} c_\alpha(x) D^\alpha.$$

A condição necessária em questão é a seguinte:

TEOREMA 2: *Se $P(x, D)$ é resolúvel em x_o então*

$$P_m(x_o, \xi) = 0, \qquad \xi \in \mathbf{R}^N \Longrightarrow C_{2m-1}(x_o, \xi) = 0.$$

A não resolubilidade do operador de Hans Lewy é uma conseqüência imediata deste resultado. De fato, temos

$$L_1(x, \xi) = (2x_1\xi_3 - \xi_2) + i(2x_2\xi_3 + \xi_1)$$

e

$$\overline{L}(x, D)L(x, D) - L(x, D)\overline{L}(x, D) = -8D_3$$

donde

$$C_1(x, \xi) = -8\xi_3.$$

Assim, se para cada $x_o = (x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ em $\mathbf{R}^3$ tomarmos $\xi_1^o = -2x_2^o$, $\xi_2^o = 2x_1^o$, $\xi_3^o = 1$ teremos $L_1(x_o, \xi_o) = 0$ mas $C_1(x_o, \xi_o) = -8$, o que demonstra nossa afirmação.

A demonstração do Teorema 2 é muito interessante e portanto merece algumas palavras. A primeira parte consiste em demonstrar, por argumentos da teoria dos espaços localmente convexos, que a resolubilidade de $P(x, D)$ em x_o implica a validade de uma estimativa "a priori" envolvendo ${}^tP(x, D)$. Mais precisamente:

LEMA 1: *Seja $U \subseteq \Omega$ uma vizinhança aberta de x_o tal que $P(x, D)\mathcal{D}'(U) \supseteq C_c^\infty(U)$. Então dado V, aberto com fecho compacto contido em U, existem constantes $C > 0$, $k \in \mathbf{Z}_+$ tais que, quaisquer que sejam $f, v \in C_c^\infty(V)$, tem-se*

$$\left| \int f(x) v(x)\, dx \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha f| \sum_{|\beta| \leq k} \sup |D^\beta\, {}^tP(x, D) v| \quad (4)$$

A segunda parte, tecnicamente mais elaborada, consiste em demonstrar que a conclusão do Lema 1 não pode ser verdadeira sob a hipótese da existência de um vetor $\xi_o \in \mathbf{R}^N$ satisfazendo $P_m(x_o, \xi_o) = 0$ $C_{2m-1}(x_o, \xi_o) \neq 0$. Teremos a oportunidade, mais adiante, de retornar à discussão desta técnica que, por sinal, é ainda hoje utilizada quando se investigam condições necessárias para a resolubilidade de EDPL's.

A condição que resultou necessária e suficiente para a resolubilidade de um ODPL de tipo principal foi enunciada por Nirenberg e Treves no decorrer da década seguinte e pode-se com certeza afirmar que ela tem sua origem na análise, por eles feita, dos chamados operadores de Mizohata.

Denotemos as variáveis em $\mathbf{R}^2$ por (x,t). Para cada $\ell \in \mathbf{Z}_+$ consideremos o ODPL

$$M_\ell = M_\ell(x,t,D_x,D_t) = D_t - it^\ell D_x.$$

O símbolo principal de M_ℓ é a função em $\mathbf{R}^4$

$$\sigma_\ell(x,t,\xi,\tau) = \tau - it^\ell \xi.$$

Observe que se $t \neq 0$ então M_ℓ é elíptico em (x,t). Assim os únicos pontos que carecem de análise quanto à resolubilidade são aqueles da forma $(x,0)$. Uma vez que M_ℓ é invariante pelas translações $x \mapsto x + h$, podemos nos restringir ao caso em que o ponto em questão é a origem.

Agora $\overline{M}_\ell = D_t + it^\ell D_x$ e portanto

$$\overline{M}_\ell M_\ell - M_\ell \overline{M}_\ell = -2\ell t^{\ell-1} D_x$$

cujo símbolo principal é a função

$$\theta_\ell(x,t,\xi,\tau) = -2\ell\, t^{\ell-1}\, \xi.$$

Se $\ell = 1$ temos

$$\sigma_1(0,0,1,0) = 0, \qquad \theta_1(0,0,1,0) = -2$$

e portanto segue do Teorema 2 que M_1 não é resolúvel na origem. Agora, se $\ell \geq 2$ temos

$$\theta_\ell(0,0,\xi,\tau) = 0$$

para todo par (ξ, τ) e portanto, neste caso, aquele teorema não fornece informação alguma. Mas, para estes operadores, uma análise completa pode ser feita e de modo razoavelmente elementar.

PROPOSIÇÃO 2: *M_ℓ é resolúvel na origem se, e somente se, ℓ é par.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos primeiramente demonstrar que quando ℓ é ímpar então M_ℓ não é resolúvel na origem utilizando o Lema 1; mostraremos que dada qualquer vizinhança aberta V da origem a desigualdade (4) não é verdadeira para $P = M_\ell$, quaisquer que sejam os valores de C e k.

O primeiro passo consiste em provar que, quando ℓ é ímpar, existe uma solução da equação homogênea $M_\ell h = 0$ cuja parte real assume mínimo estrito na origem. Isto é bem simples: considere

$$Z_\ell(x,t) = x + i\,\frac{t^{\ell+1}}{\ell+1}\,. \tag{5}$$

É imediato verificar que $M_\ell Z_\ell = 0$ e portanto o mesmo é verdadeiro para a função

$$h(x,t) = -iZ_\ell + Z_\ell^2.$$

Temos

$$\operatorname{Re} h(x,t) = x^2 + \frac{t^{\ell+1}}{\ell+1}\left(1 - \frac{t^{\ell+1}}{\ell+1}\right).$$

Logo, como $\ell + 1$ é par, existirá $\delta > 0$ tal que $\operatorname{Re} h(x,t) > 0$ se $x \in \mathbf{R}$, $|t| < \delta$ e $(x,t) \neq (0,0)$.

A partir desta propriedade a demonstração de que M_ℓ não é resolúvel na origem se conclui facilmente. Suponhamos, sem perda de generalidade, que V tenha fecho compacto contido na faixa $\{|t| < \delta\}$. Tomaremos duas funções-teste χ, $\psi \in C_c^\infty(V)$, escolhidas do seguinte modo: a primeira, χ, deve ser identicamente igual a 1 em uma vizinhança aberta $W \subseteq V$ da origem.

Agora, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\operatorname{Re} h \geq \varepsilon$ em $V \backslash W$ ($\operatorname{Re} h$ tem mínimo estrito na origem!). Tomamos então $\psi \in C_c^\infty(W)$, $\psi \geq 0$, $\psi(0,0) > 0$, e de tal modo que $\operatorname{Re} h$ seja menor ou igual a $\varepsilon/2$ sobre o suporte de ψ.

Para $\tau \geq 1$ formamos, finalmente, as famílias

$$v_\tau(x,t) = \chi(x,t)e^{-\tau\, h(x,t)},$$
$$f_\tau(x,t) = \psi(x,t)e^{\tau\, h(x,t)}.$$

Como ${}^tM_\ell = -M_\ell$ e $M_\ell h = 0$ temos

$${}^tM_\ell v_\tau = (-M_\ell\chi)e^{-\tau\, h}$$

e portanto, uma vez que $M_\ell\chi = 0$ em W,

$$\sum_{j+p\leq k} \sup |D_x^j D_t^p({}^tM_\ell v_\tau)| \leq \text{constante } \tau^k e^{-\varepsilon\tau}. \tag{6}$$

Por outro, dada à definição de ψ,

$$\sum_{j+p\leq k} \sup |D_x^j D_t^p f_\tau| \leq \text{constante } \tau^k e^{\frac{\varepsilon}{2}\tau}. \tag{7}$$

Assim, se (4) fosse verdadeira obteríamos, de (6) e (7),

$$\left|\iint f_\tau(x,t)v_\tau(x,t)\,dxdt\right| \leq \text{constante } \tau^{2k}e^{-\frac{\varepsilon}{2}\tau}.$$

Mas

$$\iint f_\tau(x,t)v_\tau(x,t)\,dxdt = \iint \psi(x,t)\,dxdt \neq 0.$$

Fazendo $\tau \to \infty$ obtemos a contradição desejada.

Mostraremos a seguir que quando ℓ é par então M_ℓ é resolúvel na origem. A idéia aqui é muito simples: uma vez que os coeficientes de M_ℓ são independentes de x, é natural aplicar a transformada de Fourier nesta variável à equação

$$M_\ell u = f \tag{8}$$

para transformá-la em uma EDO na variável t. Suponha que $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^2)$. Obtemos

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\xi,t) + \xi t^\ell\, U(\xi,t) = F(\xi,t)$$

que por sua vez é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial t}\{e^{\xi\, b(t)}\, U(\xi,t)\} = e^{\xi\, b(t)}\, F(\xi,t).$$

Aqui U e F denotam, respectivamente, as transformadas de Fourier de u e f na variável x e

$$b(t) = \frac{t^{\ell+1}}{\ell+1}.$$

Portanto

$$U(\xi,t) = \int_{a(\xi)}^{t} e^{\xi(b(s)-b(t))}\, F(\xi,s)\, ds. \tag{9}$$

Uma vez que o nosso intuito é encontrar uma solução para a equação (8) devemos determinar $a(\xi)$ de modo que $U(\xi,t)$ seja "temperada" em ξ. Se isto for possível então

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\, U(\xi,t)\, d\xi \tag{10}$$

será a solução procurada. É neste ponto que a paridade de ℓ entra de modo crucial. Observe que quando ℓ é par a função b é crescente em $\mathbf{R}$ e, conseqüentemente, $(b(s)-b(t))\xi \leq 0$ se $s \leq t$ e $\xi > 0$ ou $s \geq t$ e $\xi < 0$. Logo, se definirmos $a(\xi) = -\infty$ se $\xi > 0$, $a(\xi) = +\infty$ se $\xi < 0$, a seguinte propriedade é conseqüência de (9): dados $\rho > 0$, $n,k \in \mathbf{Z}_+$ existe $C > 0$ tal que

$$\left|\xi^n \frac{\partial^k U}{\partial t^k}(\xi,t)\right| \leq C, \quad \forall\,(\xi,t) \in \mathbf{R}^2, \quad |t| \leq \rho.$$

Deste modo, se substituirmos (9) em (10) obteremos uma solução de classe C^∞ de (8) que pode, ainda, ser expressa como

$$K(f)(x,t) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{t}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\right\} e^{i(Z_\ell(x,t)-Z_\ell(y,s))\xi} f(y,s)\, dy ds d\xi. \tag{11}$$

onde Z_ℓ é dada por (5). A demonstração da Proposição 2 está completa.

Para motivar a condição de resolubilidade de Nirenberg-Treves relembremos, primeiramente, o conceito de curvas bicaracterísticas.

Dada $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^N)$ e a valores reais as *curvas bicaracterísticas de* F são, por definição, as soluções das equações de Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_\xi F(x,\xi) \\ \\ \dot{\xi} = -\nabla_x F(x,\xi). \end{cases}$$

Um cálculo simples mostra que F é constante ao longo de suas curvas bicaracterísticas. Uma bicaracterística sobre a qual F se anula identicamente é chamada *bicaracterística nula de* F.

A seguinte observação é importante: se γ for uma bicaracterística de F tal que $\gamma(0) = (x_o,\xi_o)$ e se $G \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^N)$ então

$$(G \circ \gamma)'(0) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial \xi_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial G}{\partial \xi_j} \right)(x_o,\xi_o).$$

Retornemos, então, à condição necessária de Hörmander apresentada no Teorema 2.

Seja $P(x,D)$ um ODPL de tipo principal sobre Ω e escrevamos $P_m(x,\xi) = A(x,\xi) + iB(x,\xi)$, com A e B a valores reais. Um cálculo direto mostra que

$$C_{2m-1}(x,\xi) = 2\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi_j}\frac{\partial B}{\partial x_j} - \frac{\partial A}{\partial x_j}\frac{\partial B}{\partial \xi_j} \right)(x,\xi).$$

Suponha agora que $(x_o,\xi_o) \in \Omega \times (\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ seja tal que $P_m(x_o,\xi_o) = 0$. Como P é de tipo principal podemos assumir, digamos, que $\nabla_\xi A(x_o,\xi_o) \neq 0$. Tomemos, a seguir, a bicaracterística nula γ_A de A passando por (x_o,ξ_o) (note que esta curva não se reduz a um ponto, o mesmo sendo verdade para sua projeção em Ω). O Teorema 2 então afirma que se a restrição de B a γ_A tiver derivada ao longo de γ_A diferente de zero no ponto (x_o,ξ_o) então

$P(x, D)$ não é resolúvel em x_o. Observe que, sob a condição anterior, B necessariamente muda de sinal ao longo de γ_A no ponto (x_o, ξ_o).

Uma análise semelhante pode ser feita para os operadores de Mizohata M_ℓ.

Lembremos que o símbolo principal de M_ℓ é a função $\sigma_\ell(x, t, \xi, \tau) = \tau - it^\ell \xi$. Assim $\sigma_\ell(x_o, t_o, \xi_o, \tau_o) = 0$, $(\xi_o, \tau_o) \neq (0, 0)$ se, e somente se, $t_o = \tau_o = 0$, $\xi_o \neq 0$. A bicaracterística nula de $\mathrm{Re}\, \sigma_\ell = \tau$ que passa por $(x_o, 0, \xi_o, 0)$ é dada por $s \mapsto (s, x_o, 0, \xi_o)$ e a restrição de $\mathrm{Im}\, \sigma_\ell$ a esta curva é a função $s \mapsto s^\ell \xi_o$, que muda de sinal em $s = 0$ se, e somente se, ℓ é ímpar.

Estas considerações motivam a seguinte definição:

Definição 3: *Diremos que o* ODPL $P(x, D)$ *satisfaz a condição* $(\mathcal{P})$ *no ponto* $(x_o, \xi_o) \in \Omega \times (\mathbf{R}^N \backslash \{0\})$ *se existirem uma vizinhança aberta* $\mathcal{O}$ *de* (x_o, ξ_o) *em* $\Omega \times (\mathbf{R}^N \backslash \{0\})$ *e um número complexo* z *tais que:*

1. $\nabla_\xi \mathrm{Re}(zP_m)(x, \xi) \neq 0, \ \forall (x, \xi) \in \mathcal{O}$.
2. *A restrição de* $\mathrm{Im}(zP_m)$ *a qualquer bicaracterística nula de* $\mathrm{Re}(zP_m)$ *em* $\mathcal{O}$ *não muda de sinal.*

   Diremos que $P(x, D)$ *satisfaz a condição* $(\mathcal{P})$ *em* Ω *se* $P(x, D)$ *satisfizer a condição* $(\mathcal{P})$ *em todo ponto de* $\Omega \times (\mathbf{R}^N \backslash \{0\})$.

Em 1970 Nirenberg e Treves enunciaram a condição $(\mathcal{P})$, mostraram que esta é invariante sob multiplicação do operador por funções que não se anulam e conjeturaram que para um ODPL de tipo principal ser resolúvel em todo de um aberto Ω seria necessário e suficiente que a propriedade $(\mathcal{P})$ fosse verificada em Ω.

Não é difícil verificar que se $P(x, D)$ for elíptico em x_o ou se $\mathrm{Im}\, P_m \equiv 0$ em uma vizinhança de x_o então $P(x, D)$ satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ em uma vizinhança de x_o. Esta observação, juntamente com as considerações que precedem a Definição 3, fazem com que a conjetura seja compatível com os resultados que mencionamos até então. Além disto, até aquela data, a suficiência da condição $(\mathcal{P})$ havia sido demonstrada nos casos $m = 1$ **[10]** e $N = 2$ **[12]** e a necessidade e suficiência de $(\mathcal{P})$ verificada para ODPL's cujos coeficientes a_α, com $|\alpha| = m$, são funções analíticas reais [11].

A conjetura de Nirenberg-Treves resultou verdadeira em geral. A suficiência da condição $(\mathcal{P})$ foi demonstrada por R. Beals e C. Fefferman [1] em 1972 enquanto que a necessidade foi demonstrada por Moyer em 1980 (já no contexto dos operadores pseudodiferenciais) ([4]).

Resta, ainda, uma pergunta natural a ser respondida: para operadores de tipo principal satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$ é sempre possível determinar soluções infinitamente diferenciáveis para a equação (2)? A demonstração de Beals e Fefferman não esclarecia este ponto uma vez que a técnica utilizada foi a de estimativas "a priori" como na Proposição 1. Em 1976, porém, Treves [**13**] obteve o seguinte resultado:

TEOREMA 3: *Seja $L(x,D)$ um* ODPL *de tipo principal e de primeira ordem sobre o aberto Ω. Suponha que os coeficientes de $L(x,D)$ sejam analíticos e que a condição $(\mathcal{P})$ esteja satisfeita em uma vizinhança do ponto $x_o \in \Omega$.*

Então existem uma vizinhança aberta U de x_o em Ω e um operador linear contínuo

$$K : C_c^\infty(U) \to C^\infty(U)$$

tais que $L(x,D)K = I$, a identidade em $C_c^\infty(U)$.

Observe que quando $L(x,D)$ é o operador de Mizohata M_ℓ, com ℓ par, provamos este resultado na demonstração da Proposição 2: o operador K é dado explicitamente em (11)!

A demonstração do Teorema 3 é construtiva; o operador K é obtido a partir de funções que fazem o papel de Z_ℓ em (11) e que são obtidas através do Teorema de Cauchy-Kovalevsky.

Posteriormente, em 1978, Hörmander [**7**] mostrou que de fato, quando o operador $P(x,D)$ satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ então (1) possui soluções locais em C^∞ se f for da mesma classe. A técnica por ele utilizada foi a chamada análise de propagação de singularidades. Neste caso a existência (semi-global) de soluções infinitamente diferenciáveis é conseqüência, uma vez mais, de um argumento de dualidade de Análise Funcional. Até a presente data não se sabe se um resultado como aquele enunciado no Teorema 3 para um ODPL de tipo principal qualquer satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$ é verdadeiro ou não.

Não poderíamos concluir esta nota sem mencionar algumas poucas palavras sobre a resolubilidade local para ODPL's com *características múltiplas*, isto é, operadores cujos símbolos principais

$P_m(x,\xi)$ admitem zeros $(x_o,\xi_o) \in \Omega \times (\mathbf{R}^N \backslash \{0\})$ que satisfazem $\nabla_\xi P_m(x_o,\xi_o) = 0$. Muito estudo foi feito nesta direção nas duas últimas décadas mas uma teoria geral ainda é muito difícil de divisar.

Não entraremos em maiores detalhes aqui; apenas finalizaremos apresentando alguns exemplos que ilustram o contraste com a teoria dos ODPL's de tipo principal.

Retornemos aos operadores de Mizohata M_ℓ e definamos o seguinte operador em $\mathbf{R}^2$:

$$P = P(x,t,D_x,D_t) = M_1\overline{M}_1 = D_t^2 + t^2 D_x^2 + D_x.$$

Como M_1 não é resolúvel na origem (Proposição 2) existe $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ tal que a equação $M_1 u = f$ não possui solução fraca em vizinhança alguma da origem e portanto, por maior razão, o mesmo é verdade para a equação $Pu = M_1\overline{M}_1 u = f$. Assim P não é resolúvel na origem apesar de ter como símbolo principal a função real $\tau^2 + t^2\xi^2$. O leitor deve comparar este exemplo com o resultado enunciado no Teorema 1. Na realidade vale o seguinte **[3]**: dado $a \in \mathbf{R}$, o operador $P + a\,D_x$ é resolúvel na origem se, e somente se, a não é um número inteiro par. Como era, portanto, de se esperar, não é possível decidir sobre a resolubilidade local de um ODPL com características múltiplas a partir somente de seu símbolo principal.

APÊNDICE

Neste apêndice discutiremos brevemente como a técnica apresentada na Proposição 1 pode ser utilizada para se demonstrar o Teorema de Malgrange-Ehrenpreis aludido anteriormente.

Em **[5]** Hörmander mostrou que todo ODPL com coeficientes constantes satisfaz (3) se Ω for um subconjunto aberto e limitado de $\mathbf{R}^N$, obtendo uma nova demonstração da resolubilidade local para esta classe de operadores. Um caso muito simples, porém instrutivo, é o seguinte: tomemos $N = 1$ e $P(D) = iD = \frac{d}{dx}$. Se $\Omega =]-a,a[$, com $a > 0$, o Teorema Fundamental do Cálculo fornece

$$\varphi(x) = \int_{-a}^{x} (P(D)\varphi)(t)\,dt, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\varphi(x)| \leq \int_{-a}^{a} |(P(D)\varphi)(t)|\, dt \leq \sqrt{2a}\, \|P(D)\varphi\|, \qquad x \in \Omega$$

e portanto, se elevarmos esta desigualdade ao quadrado e integrarmos sobre Ω obtemos

$$\|\varphi\|^2 \leq 4a^2 \|P(D)\varphi\|^2, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como ${}^tP(D) = -P(D)$, demonstramos (3) para o operador $P(D) = \frac{d}{dx}$. Assim, pela Proposição 1, toda $f \in L^2(\Omega)$ possui primitiva, no sentido de distribuições, em $L^2(\Omega)$.

É interessante observar que este resultado não pode ser globalizado. Mais precisamente: não existe $C > 0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\, dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |(P(D)\varphi)(x)|^2\, dx \tag{12}$$

seja verdadeira para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$. Isto é muito fácil ver: tomemos $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ não identicamente nula e definamos, para $\varepsilon > 0$, $\chi_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon x)$, $x \in \mathbf{R}$. Então $\chi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi_\varepsilon(x)|^2\, dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x)|^2\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(P(D)\chi_\varepsilon)(x)|^2\, dx = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |\chi'(x)|^2\, dx.$$

Se (12) fosse então verdadeira obteríamos

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x)|^2\, dx \leq \varepsilon C \int_{-\infty}^{\infty} |\chi'(x)|^2\, dx$$

e a contradição aparece se fizermos $\varepsilon \to 0$.

A globalização de (3) para um ODPL é possível se introduzirmos pesos nas normas L^2. Para $t \in \mathbf{R}^n$, $t = (t_1, \ldots, t_N)$, introduzimos a notação

$$E_t(x) = \exp\{t_1^2 x_1^2 + \cdots + t_N^2 x_N^2\}, \qquad x \in \mathbf{R}^N.$$

O teorema a seguir, devido a Treves [14], generaliza o resultado de Hörmander mencionado no início deste apêndice:

TEOREMA 4: *Sejam $P(D)$ um ODPL com coeficientes constantes sobre $\mathbf{R}^N$ e $t \in \mathbf{R}^N$ tal que $t_j \neq 0$ para todo $j = 1, \ldots, N$. Então existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\varphi(x)|^2 \, E_t(x) \, dx \leq C \int_{\mathbf{R}^N} |({}^tP(D)\varphi)(x)|^2 \, E_t(x) \, dx$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$.

Esta desigualdade nos permite demonstrar a resolubilidade global da equação $P(D)u = f$ contanto que sejam impostas condições de crescimento de f no infinito. De fato, uma adaptação muito simples da demonstração da Proposição 1 mostra que, sob as hipóteses do Teorema 4, $P(D)\mathcal{H}_t \supseteq \mathcal{H}_t$ onde $\mathcal{H}_t$ denota o espaço L^2 com relação à medida $E_t^{-1}(x)dx$.

De posse deste resultado podemos apresentar uma demonstração elementar do Teorema de Malgrange-Ehrenpreis. Tomemos, primeiramente, um inteiro positivo ℓ tal que $4\ell > N$. Então a função

$$G(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\ell}, \qquad \xi \in \mathbf{R}^N$$

pertence a $L^2(\mathbf{R}^N)$ e portanto o mesmo é verdade para $g = \mathcal{F}^{-1}G$, onde $\mathcal{F}^{-1}$ denota a transformada inversa de Fourier; além disto, aplicando $\mathcal{F}^{-1}$ à identidade $(1 + |\xi|^2)^\ell G(\xi) = 1$ resulta

$$(1 - \Delta)^\ell g = \delta.$$

Agora, como $L^2(\mathbf{R}^N) \subseteq \mathcal{H}_t$ qualquer que seja $t \in \mathbf{R}^N$, existe $v \in \mathcal{H}_t$ tal que $P(D)v = g$. Se definirmos, finalmente, $E = (1 - \Delta)^\ell v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ obtemos

$$P(D)E = P(D)(1 - \Delta)^\ell v = (1 - \Delta)^\ell P(D)v = (1 - \Delta)^\ell g = \delta,$$

concluindo a demonstração.

Bibliografia

1. Beals, R. e Fefferman, C., *On local solvability of linear partial differential equations*, Ann. of Math. **97** (1973), 482–498.
2. Ehrenpreis, L., *Solutions of some problems of division I*, Am. J. Math. **76** (1954), 883–903.
3. Gilioli, A. e Treves, F., *An example in the solvability theory of linear PDE's*, Am. J. Math. **96** (1974), 367–385.
4. Hörmander, L., "The analysis of linear partial differential operators," (4 volumes), Springer-Verlag, 1983.
5. Hörmander, L., *On the theory of general partial differential operators*, Acta Math. **94** (1955), 161–248.
6. Hörmander, L., *Differential equations without solutions*, Math. Ann. **140** (1960), 169–173.
7. Hörmander, L., *Propagation of singularities and semiglobal existence theorems for (pseudo-)differential operators of principal type*, Ann. of Math. **108** (1978), 569–609.
8. Lewy, H., *An example of a smooth linear partial differential equation without solution*, Ann. of Math. **66** (1957), 155–158.
9. Malgrange, B., *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **6** (1955-56), 271–355.
10. Nirenberg, L. e Treves, F., *Solvability of a first order linear partial differential equation*, Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), 123–138.
11. Nirenberg, L. e Treves, F., *On local solvability of linear partial differential equations, I. Necessary conditions, II. Sufficient conditions, Correction*, Comm. Pure Appl. Math., **23** (1970), 1–38; **23** (1970), 459–510; **24** (1971), 279–288.
12. Treves, F., *On the local solvability of linear partial differential equations in two independent variables*, Amer. J. Math. **92** (1970), 174–204.
13. Treves, F., *Integral representation of solutions of first-order linear partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Pisa **3** (1976), 1–35.
14. Treves, F., *Relations de domination entre opérateurs differentiels*, Acta Math. **101** (1959), 1–139.

Instituto de Matemática e Estatística – USP
Caixa Postal 20570, Agência Iguatemi
01498 - São Paulo - SP