Matemática Universitária Nº 14, dezembro de 1992, 69–83

A equação funcional $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$

Alberto de Azevedo

A idéia deste artigo surgiu num curso de Cálculo I. Quando se ensina esta disciplina, ao introduzir o conceito de funçao inversa, é praxe enfatizar a diferença entre $\operatorname{arc\,sen} x$ e $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$ ou, em geral, entre $f^{-1}(x)$ e $\frac{1}{f(x)}$. Por outro lado, faz sentido indagar se existem bijeçoes $f: X \to X$ tais que

$$(\forall x \in X) \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)} \tag{1}$$

É claro que, neste contexto, X deve ser um conjunto que não contém o zero e que contendo x contém também $\frac{1}{x}$. O exemplo mais simples de uma funçao com esta propriedade é dado por $f: \mathbf{R}^\bullet \to \mathbf{R}^\bullet$, $f(x) = -\frac{1}{x}$ quando $x > 0$ e $f(x) = -x$ quando $x < 0$, onde $\mathbf{R}^\bullet = \{x \in \mathbf{R} | x \neq 0\}$. Quando $X = (0, +\infty)$ os exemplos são mais complicados e qualquer solução de (1) tem uma infinidade de descontinuidades (Teorema 2).

Vejamos uma outra maneira de encarar esta questão. Seja $\tau: X \to X$ a função $\tau(x) = 1/x$. É claro que, em termos de τ, a equação (1) se escreve:

$$f^{-1} = \tau \circ f \tag{2}$$

e é fácil ver que se f é bijetora e satisfaz (2) então f é solução da equação

$$f \circ f = \tau \tag{3}$$

Recíprocamente, se $f: X \to X$ é solução de (3) então f é bijetora e satisfaz (2). Assim, as funções que estamos procurando são precisamente as "raízes quadradas" de τ relativamente à composição de funções. De forma análoga, vê-se que (2) é eqüivalente a

$$f^{-1} = f \circ \tau \tag{4}$$

Este problema foi abordado pela primeira vez por A. Barnes em [1] e, logo após, por S. Dolan em [5] que mostrou que, quando $X = (0, +\infty)$, qualquer solução de (1) tem uma infinidade de descontinuidades. Este fato foi demonstrado também por P. J. McCarthy e W. Stephenson (vide comentário editorial em [5])) e é um caso particular do principal resultado de [4] pelo qual, quando g é um homeomorfismo decrescente de um intervalo aberto, e n é par, qualquer solução da equação $f^n = g$ tem uma infinidade de descontinuidades; aqui f^n indica a função composta $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n vezes). O artigo [3] trata da equação $f^n = g$ quando g é a função identidade. Agradeço a Noraí R. Rocco por estas referências.

O objetivo desta nota é aprofundar algumas questões discutidas em [1] e [5]. Se J é o intervalo aberto $(0, +\infty)$, construímos exemplos específicos de funç oes $f: J \to J$ que satisfazem (1) (Exemplo 4), analisamos o comportamento destas soluções na vizinhança do ponto $x = 1$ (Corolário 2), ilustramos alguns aspectos de continuidade destas funções (Exemplos 8, 9, 10 e 11) e abordamos uma questão de Análise que não é tratada nos textos usuais.

Um resultado clássico de Análise afirma que se I é um intervalo e $f: I \to \mathbf{R}$ é contínua e injetora então f é estritamente monótona e um homeomorfismo entre dois intervalos. Na mesma ordem de idéias, se I e K são intervalos e $f: I \to K$ é uma bijeção monótona então f é um homeomorfismo. Por outro lado, existem bijeções entre dois intervalos que são descontínuas em todos os pontos como mostra a função $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = -x$ quando x é racional e $f(x) = \frac{1}{x}$ quando x é irracional. Tentando compreender as propriedades de descontinuidade das soluções $f: J \to J$ da equação (1), fomos levados à seguinte questão: "Sejam I um intervalo e $f: I \to R$ injetora. Se f é contínua em $x_0 \in I$, podemos concluir que sua inversa f^{-1} é contínua em $y_0 = f(x_0)$?". É fácil dar um contra-exemplo quando I é um intervalo fechado e limitado (Exemplo 5) e a conclusão é válida com a hipótese adicional de f ser monótona. Entretanto, os textos usuais de Análise não tratam, por exemplo, do caso em que f é uma bijeção da reta. No Exemplo 6 construímos uma bijeção $f: R \to R$ que é contínua em um ponto $x_0 \in R$ mas cuja inversa f^{-1} é descontínua em $y_0 = f(x_0)$. Este exemplo motivou o conceito de *função bijetora bem comportada* (Definição 2, Proposição

5) que torna mais transparente a demonstração do Teorema 2.

A Proposição 8 trata da equação (1) no caso de corpos finitos. O Teorema 3 facilita a construção de exemplos e, em particular, mostra que se k é um corpo infinito existem funções $f: k^\bullet \to k^\bullet$ que satisfazem a equação (1).

Para o que segue será cômodo introduzir a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1: Uma função $f: X \to X$ é *especial* quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) $X \subseteq J$;
ii) $(\forall x \in X)\tau(x) \in X$;
iii) f é bijetora;
iv) $(\forall x \in X) f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

É claro que se $f: X \to X$ é especial então $f^{-1}: X \to X$ também é especial.

EXEMPLO 1: $X = \{1\}$ e $f: X \to X(f(1) = 1)$;

EXEMPLO 2: Sejam a e b dois números positivos e distintos de 1. Suponhamos, além disto, que $b \notin \{a, \frac{1}{a}\}$. Então, $X = \{a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ é um conjunto com 4 elementos e $f: X \to X$ definida por $f(a) = b, f(b) = \frac{1}{a}, f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{b}$ e $f(\frac{1}{b}) = a$ é especial;

EXEMPLO 3: Seja $X \subseteq J$ enumerável e tal que $(\forall x \in X)\tau(x) \in X$ (por exemplo, o conjunto de todos os números racionais positivos). Vamos construir $f: X \to X$ especial. É claro que, para este fim, podemos supor que $1 \notin X$. Se $Y = \{x \in X | \ x < 1\}$ e $Z = \{x \in X | x > 1\}$ então ambos Y e Z são enumeráveis e $X = Y \cup Z$ (reunião disjunta). Seja $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ uma enumeração dos elementos de Y. Então, $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \frac{1}{b_n}, \dots$ é uma enumeração dos elementos de Z e se $X_n = \{a_n, b_n, \frac{1}{a_n}, \frac{1}{b_n}\}$ temos $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ (reunião disjunta). Pelo Exemplo 2, existe $f_n: X_n \to X_n$ especial e, a partir das funções f_n, obtemos $f: X \to X$ especial.

PROPOSIÇÃO 1: Sejam $f: X \to X$ especial, $a \in X$ e $b = f(a)$. Temos: $\{a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\} \subset X$, $f(\frac{1}{b}) = a$, $f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{b}$ e $f(b) = \frac{1}{a}$.

DEMONSTRAÇÃO: De fato, $f^{-1}(a) = \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{b}$ e, portanto, $f(\frac{1}{b}) = a$. Os outros dois casos resultam por iteração.

Listamos a seguir quatro conseqüências desta proposição.

A) Se $f: X \to X$ é especial e $1 \in X$ então $f(1) = 1$. De fato, tomando $a = 1$ e $b = f(a) = f(1)$ resulta de $f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{b}$ que $f(1) = \frac{1}{f(1)}$. Logo, $f(1) = 1$.

B) Se $f: X \to X$ é especial, $x \in X$ e $f(x) = x$ então $x = 1$. De fato, tomando $a = x$ e $b = f(a) = x$ resulta de $f(b) = \frac{1}{a}$ que $x = \frac{1}{x}$. Logo, $x = 1$.

C) Se $f: X \to X$ é especial e $f(x) = \frac{1}{x}$ então, $x = 1$. De fato, tomando $a = x$ e $b = f(a) = \frac{1}{x}$ resulta de $f(\frac{1}{b}) = a$ que $\frac{1}{x} = x$. Logo, $x = 1$.

D) Seja $f: X \to X$ especial. Então ou $X = \{1\}$ e $f(1) = 1$ ou X tem no mínimo 4 elementos e f é um elemento de ordem 4 do grupo das bijeções de X. Seja $a \in X$, $a \neq 1$, de forma que $a \neq \frac{1}{a}$. Se $b = f(a)$ então $b \neq a$ (por B)) e $b \neq \frac{1}{a}$ (por C)). Resulta que $\{a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ é um subconjunto de X com 4 elementos. Enfim, pela Proposição 1, $f^2(a) = \frac{1}{a}$, $f^3(a) = \frac{1}{b}$, $f^4(a) = a$ o que mostra que f é um elemento de ordem 4 do grupo das bijeções de X.

OBSERVAÇÃO 1: O fato que, quando $X \neq \{1\}$, f é um elemento de ordem 4 do grupo das bijeções de X resulta também da relação (3). Note-se que os cálculos acima mostram também que $f^2 = \tau$ e que $f^{-1} = f^3$ o que demonstra novamente as relações (3) e (4). Nem todo elemento de ordem 4 do grupo das bijeções de X é uma função especial, somente aqueles cujo quadrado é τ $f \circ f = \tau$.

O seguinte resultado básico de Análise será utilizado repetidas vezes no que se segue (vide [2], pg 186):

TEOREMA 1 1. *Sejam I um intervalo, $f: I \to \mathbf{R}$ uma função contínua injetora* e $K = f(I)$. *Então:*

i) f é estritamente monótona;

ii) K é um intervalo do mesmo tipo que I (aberto, semi-aberto, fechado);

iii) f é um homeomorfismo entre I e K.

A Proposição 2, a seguir, será útil na construção de exemplos.

PROPOSIÇÃO 2: Sejam I e K subconjuntos de J tais que existe uma bijeção $g: I \to K$ e $I, K, \tau(I)$ e $\tau(K)$ são disjuntos dois a dois. Se $X = I \cup K \cup \tau(I) \cup \tau(K)$ então existe uma única extensão $\hat{g}$ de g a X que é especial. Se I e K são intervalos abertos e g é contínua então $\hat{g}$ também é contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Utilizando a Proposição 1 vemos, sucessivamente, que $\hat{g}$ em $\tau(K)$ tem necessariamente valores em I e é dada por $g^{-1} \circ \tau$; em $\tau(I)$ tem valores em $\tau(K)$ e é dada por $\tau \circ g \circ \tau$ e em K tem valores em $\tau(I)$ e é dada por $\tau \circ g^{-1}$. É fácil verificar que $\hat{g} \circ \hat{g} = \tau$ (em X). Logo, $\hat{g}$ é especial. Pelo Teorema 1, $g^{-1}: K \to I$ é contínua; logo $\hat{g}$ é contínua em cada um dos intervalos I, K, $\tau(I)$ e $\tau(K)$. Se I e K são intervalos abertos então $\tau(I)$ e $\tau(K)$ também são abertos e podemos concluir que $\hat{g}: X \to X$ é contínua.

OBSERVAÇÃO 2: Se I e K são intervalos do mesmo tipo (abertos, semi-abertos, fechados) e g é um homeomorfismo linear entre I e K, digamos, $g(x) = \alpha x + \beta$ então, em $\tau(K)$, $\hat{g}(x) = \frac{1-\beta x}{\alpha x}$, em $\tau(I)$, $\hat{g}(x) = \frac{x}{\alpha+\beta x}$ e, em K, $\hat{g}(x) = \frac{\alpha}{x-\beta}$. Se I e K são intervalos abertos, $\hat{g}$ é uma função contínua.

As figuras abaixo ilustram a situação:

COROLÁRIO 1 2. *Sejam I e K subconjuntos disjuntos de J tais que $I \cup K = (0,1)$ e existe uma bijeção $g: I \to K$. Então, g tem uma única extensão f a J que é especial. Reciprocamente, seja $f: J \to J$ especial. Então, $I = \{x \in (0,1) | f(x) \in (0,1)\}$ e $K = f(I)$ são disjuntos, $I \cup K = (0,1)$ e a restrição de f a I é uma bijeção $g: I \to K$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 2, g tem uma única extensão $\hat{g}: X \to X$ que é especial ($X = I \cup K \cup \tau(I) \cup \tau(K) = (0,1) \cup (1,+\infty)$) e $\hat{g}$ tem uma única extensão $f: J \to J$ ($f(1) = 1$). Para demonstrar a segunda parte do enunciado, seja $x \in I \cap K$. De $x \in I$ concluímos, em particular, que $0 < f(x) < 1$ e de $x \in K$ que $0 < f^{-1}(x) < 1$. Como $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ temos uma contradição. Resta mostrar que $I \cup K = (0,1)$. Seja $x \in (0,1)$. Se $0 < f(x) < 1$ então $x \in I$. Se $f(x) > 1$ então $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)} < 1$. Segue-se que $f^{-1}(x) \in I$ e que $x = f(f^{-1}(x)) \in K = f(I)$.

O Corolário 1 mostra como construir *todas* as funções especiais $f: J \to J$. Por exemplo, se $I = [\frac{1}{2}, 1)$ e $K = (0, \frac{1}{2})$ existe uma bijeção $g: I \to K$ que se estende, de maneira única, a uma função especial $f: J \to J$. Entretanto, a função especial obtida desta maneira não pode ser descrita em termos de funções elementares como é o caso do Exemplo 4, a seguir.

EXEMPLO 4: Daremos agora um exemplo específico de uma função especial $f: J \to J$. Para cada $n \geq 1$ sejam $I_n = [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1})$ e

$K_n = [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})$. Considerando o homeomorfismo linear crescente entre I_n e K_n, a Proposição 2 mostra que existe uma função especial $g_n: X_n \to X_n$ onde $X_n = I_n \cup K_n \cup \tau(I_n) \cup \tau(K_n) = \left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}\right) \cup (2n-1, 2n+1]$. A partir das funções g_n obtemos $g: X \to X$ onde $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ (reunião disjunta) $= (0,1) \cup (1, +\infty)$. Enfim, estendemos g a $f: J \to J$ colocando $f(1) = 1$.

Faremos a seguir algumas consideraç oes sobre aspectos de continuidade das funç oes especiais.

PROPOSIÇÃO 3: Se $f: J \to J$ é especial então f é descontínua em algum ponto de J.

DEMONSTRAÇÃO: De fato, se f fosse contínua em todo J então, pelo Teorema 1, f seria monótona. Suponhamos, para fixar idéias, que f fosse crescente. Então, $f^{-1}: J \to J$ também seria crescente. Por outro lado,

$$(\forall x \in J) \quad f(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}.$$

logo f seria decrescente; contradição.

A rigor, a utilização plena do Teorema 1 leva ao seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 4: Sejam $f: J \to J$ especial, I um intervalo aberto contido em J e $K = f(I)$. Se f é contínua em I então:

i) f é estritamente monótona em I;
ii) I e K são intervalos abertos disjuntos;
iii) f é um homeomorfismo entre I e K;
iv) f é contínua em K.

Em particular, f não é contínua em nenhum intervalo aberto que contem 1 (pois $f(1) = 1$).

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 1, só temos que demonstrar ii) e iv). Se, por exemplo, f é estritamente crescente em I então f^{-1} também é estritamente crescente em K e $f(x) = 1/f^{-1}(x)$ é estritamente decrescente em K. Como I e K são intervalos abertos resulta que, necessariamente, $I \cap K = \emptyset$. Enfim, como f^{-1} é contínua em K e $f(x) = 1/f^{-1}(x)$ concluimos que f também é contínua em K.

Corolário 2 3. *Se* $f: J \to J$ *é especial então ou* $x = 1$ *é um ponto de descontinuidade de* f *ou então* f *é contínua em* $x = 1$ *e tem uma infinidade de descontinuidades em toda vizinhança de* $x = 1$.

Corolário 3 4. *Sejam* $f: J \to J$ *uma função especial e* I *um intervalo aberto contido em* J. *Se* f *é contínua em* I *então os intervalos* I, $f(I)$, $f^2(I)$, $(= \tau(I))$ e $f^3(I)$, $(= f^{-1}(I))$ *são abertos, disjuntos dois a dois e* f *é contínua em cada um deles.*

Demonstração: Aplicando a Proposição 4 sucessivamente aos intervalos I, $f(I)$, $f^2(I)$ e $f^3(I)$ vemos que todos eles são abertos, que f é contínua em cada um deles e que $I \cap f(I) = f(I) \cap f^2(I) = f^2(I) \cap f^3(I) = f^3(I) \cap I = \emptyset$ (pois f^4 é a identidade de J). Como I é um intervalo aberto, pela Proposição 4, $1 \notin I$; logo, ou $I \subseteq (0,1)$ ou $I \subseteq (1, +\infty)$. Em ambos os casos, concluímos que $I \cap \tau(I) = \emptyset$, isto é, que $I \cap f^2(I) = \emptyset$. Enfim, o mesmo raciocínio aplicado ao intervalo $K = f(I)$ mostra que $K \cap f^2(K) = \emptyset$, isto é, que $f(I) \cap f^3(I) = \emptyset$.

Se uma função especial f é contínua em $x = 1$ então sua inversa também é contínua em $x = 1$ pois $f^{-1}(x) = 1/f(x)$. Esta é uma propriedade particular das funções especiais pois, em geral, uma bijeção f pode ser contínua em um ponto x_0 e sua inversa descontínua em $y_0 = f(x_0)$. Em outras palavras, a versão "pontual" do Teorema 1 é falsa.

Se $f: X \to \mathbf{R}$ é uma função, indicaremos por C_f o conjunto dos pontos de continuidade de f: $C_f = \{x \in X | f$ é contínua em $x\}$. Analogamente, $D_f = \{x \in X | f$ é descontínua em $x\}$. Será cômodo introduzir a seguinte definição:

Definição 2: Uma bijeção $f: X \to Y$ (X e Y contidos em $\mathbf{R}$) é *bem comportada em* $x_0 \in X$ se e somente se,

$$\text{“}f \text{ é contínua em } x_0 \iff f^{-1} \text{ é contínua em } y_0 = f(x_0)\text{”}$$

Dizemos que f é *bem comportada* quando $(\forall x_0 \in X) f$ é bem comportada em x_0. Eqüivalentemente, $f: X \to Y$ é bem comportada se e somente se $f(C_f) = C_{f^{-1}}$ ou, $f(D_f) = D_{f^{-1}}$.

É claro que se uma bijeção $f: X \to Y$ é bem comportada então $f^{-1}: Y \to X$ também é bem comportada. Toda função especial $f: J \to J$ é bem comportada no ponto $x = 1$.

EXEMPLO 5: Sejam $X = [0,2]$ e $f: X \to X$ definida por: se $x \in [0,1)$, $f(x) = x$; se $x \in [1,2]$, $f(x) = -x+3$. A função f é contínua em $x = 2$ mas f^{-1} não é contínua em $1 = f(2)$. Logo, f não é bem comportada no ponto $x = 2$.

Se X é um intervalo aberto, exemplos análogos são mais elaborados.

PROPOSIÇÃO 5: Seja $f: X \to Y$ uma bijeção entre dois intervalos abertos. Se f tem um número finito de descontinuidades então f é bem comportada. Se $I_1 \cup \ldots \cup I_n$ é a decomposição de C_f como reunião de intervalos abertos disjuntos então $f(I_1) \cup \ldots \cup f(I_n)$ é a decomposição de $C_{f^{-1}}$ como reunião de intervalos abertos disjuntos.

DEMONSTRAÇÃO: Se $D_f = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ então $C_f = X - D_f$ é reunião de n intervalos abertos disjuntos: $C_f = I_1 \cup \ldots \cup I_n$. Se $K_i = f(I_i)$ então, pelo Teorema 1, K_i é um intervalo aberto e f induz um homeomorfismo entre I_i e K_i. Como K_i é aberto, podemos concluir que se f é contínua em x_0 ($\in I_i$) então f^{-1} é contínua em $y_0 = f(x_0)$ ($\in K_i$). Logo, se $b_i = f(a_i)$ então $D_{f^{-1}}$ está contido em $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ e, portanto, é finito. Como, por hipótese, Y também é um intervalo aberto a função $f^{-1}: Y \to X$ satisfaz as mesmas condições que f. Logo, pelo que provamos acima, se f^{-1} é contínua em $y_0 (= f(x_0))$ então $f = (f^{-1})^{-1}$ é contínua em $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Seja $M_1 \cup \ldots \cup M_n$ a decomposição de $D_{f^{-1}}$ como reunião de intervalos abertos disjuntos. Como f^{-1} é contínua em $K_i = f(I_i)$, existe um índice $\sigma(i)$ tal que $K_i \subseteq M_{\sigma(i)}$; este índice $\sigma(i)$ é único, visto que os intervalos M_j são disjuntos dois a dois. Temos:

$$\begin{aligned} M_1 \cup \ldots \cup M_n &= C_{f^{-1}} = f(C_f) \\ &= f(I_1) \cup \ldots \cup f(I_n) \subseteq M_{\sigma(1)} \cup \ldots \cup M_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

Se, para algum índice i_0 a inclusão $K_{i_0} \subseteq M_{\sigma(i_0)}$ é estrita concluimos que $M_1 \cup \ldots \cup M_n \underset{\neq}{\subset} M_{\sigma(i)} \cup \ldots \cup M_{\sigma(n)}$; absurdo. Logo, para todo i, $f(I_i) = M_{\sigma(i)}$.

EXEMPLO 6: Para cada $n \geq 1$ sejam I_n e K_n os intervalos $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ e $\left(1 + \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ respectivamente. Seja $g: (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ a função definida da seguinte maneira: em I_n g é o homemorfismo linear crescente que leva I_n sobre I_{2n}, em K_n g é o homemorfismo linear crescente que leva K_n sobre I_{2n-1} e, enfim, no intervalo $(2,+\infty)$, $g(x) = x - 1$. A imagem, por g, do intervalo $(0,1]$ tem uma seqüência de buracos que se acumulam na direção do zero; a imagem do intervalo $(1,2]$ cobre esses buracos. A seguir estendemos g a $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de forma que f seja uma função impar; em particular, $f(0) = 0$. A função f é uma bijeção de $\mathbf{R}$, f é contínua em $x = 0$ mas f^{-1} não é contínua em $0 (= f(0))$.

PROPOSIÇÃO 6: Seja $f\colon X \to X$ uma função especial. Então,

i) $C_f = C_{f^{-1}}$;
ii) $\tau(C_f) = C_f$ e $\tau(D_f) = D_f$;
iii) f é bem comportada se e somente se $f(C_f) = C_f$ ou, eqüivalentemente, $f(D_f) = D_f$.

DEMONSTRAÇÃO: i) Se f é contínua em x então f^{-1} também é contínua em x pois $f(x) \neq 0$ e $f^{-1}(x) = 1/f(x)$. O mesmo argumento mostra que $C_{f^{-1}} \subseteq C_f$.

ii) Se f é contínua em x então f^{-1} é contínua em $1/x$ visto que $f^{-1} = f \circ \tau$; logo, por
i) f é contínua em $1/x$. Concluimos que $\tau(C_f) \subseteq C_f$. Aplicando τ à esta relação de inclusão resulta que $\tau(C_f) = C_f$.
iii) É conseqüência imediata da Definição 2 e de i).

Sejam $f\colon X \to X$ uma bijeção e $G_f = \{f^m | m \in \mathbf{Z}\}$; G_f é um subgrupo do grupo das bijeções de X. Para cada $x \in X$ indiquemos por $o_f(x)$ a órbita de x segundo $f\colon o_f(x) = \{g(x) | g \in G_f\}$. Seja $n_f(x)$ o número de elementos de $o_f(x)$. As órbitas constituem uma partição de X e se G_f tem ordem finita n então $(\forall x \in X)\ n_f(x)$ é um divisor de n. Se f é uma função especial então todas as órbitas têm 4 elementos, salvo no caso em que $1 \in X$ quando há uma única órbita com um só elemento.

TEOREMA 2 5. *Sejam* $\alpha \geq 0$ *e* I *o intervalo aberto* $(\alpha, \frac{1}{\alpha})$. *Então, toda função especial* $f\colon I \to I$ *tem uma infinidade de descontinuidades.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos supor, por absurdo, que D_f é finito. Então, f é bem comportada (Proposição 5) e $f(D_f) = D_f$ (Proposição 6). Além disto, $1 \in D_f$ (Corolário 2). Olhando para a partição de D_f segundo as órbitas de f vemos que o número n de elementos de D_f é do tipo $n = 1 + 4s$; logo $n \equiv 1\ (4)$.

Mostraremos a seguir que $n \equiv -1\ (4)$ o que será uma contradição.

Sejam $D_f = \{a_1, \ldots, a_n\}$ onde $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ e $I_1 = (\alpha, a_1), I_2 = (a_1, a_2), \ldots, I_n = (a_{n-1}, a_n), I_{n+1} = (a_n, \frac{1}{\alpha})$. Como $C_f = C_{f^{-1}}$, pela Proposição 5, f induz uma permutação do conjunto $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ e, pelo Corolário 3, todas as órbitas dessa permutação têm 4 elementos. Resulta que $n+1$ é um múltiplo de 4, isto é, que $n \equiv -1$ (4), o que completa a demonstração do Teorema 2.

Observação 3: Se $0 < \alpha < \beta < 1$ sejam $I = [\beta, 1), K = [\alpha, \beta)$ e $g: I \to K$ o homeomorfismo linear crescente entre I e K. Pela Proposição 2, obtemos uma função especial $\hat{g}$ definida em $[\alpha, 1) \cup (1, \frac{1}{2}]$. Tomando $f(1) = 1$ obtemos $f: [\alpha, \frac{1}{\alpha}] \to [\alpha, \frac{1}{2}]$ especial tal que $D_f = \{\beta, 1, \frac{1}{\beta}\}$. A função f não é bem comportada.

O Teorema 3 abaixo facilita a construção de exemplos com propriedades específicas.

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções especiais: $\mathcal{F} = \{f | f$ é uma função especial $\}$. Se f é uma função indicaremos por $D(f)$ o seu domínio. A relação "$f \leq g$ se e somente se $D(f) \subset D(g)$ e $(\forall x \in D(f))\ g(x) = f(x)$" é uma relação de ordem no conjunto $\mathcal{F}$. Se $h \in \mathcal{F}$ seja $\mathcal{F}_h = \{f \in \mathcal{F} | h \leq f\}$.

Proposição 7: O conjunto ordenado $\mathcal{F}_h$ é indutivo.

Demonstração: Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto não vazio e totalmente ordenado de $\mathcal{F}_h$. Sejam $X = \bigcup_{g \in \mathcal{S}} D(g)$ e $f: X \to X$ a função definida da seguinte maneira: se $x \in X$ então $f(x) = g(x)$ onde g é qualquer elemento de $\mathcal{S}$ cujo domínio contem x. Não há ambigüidade nesta definição de $f, f \in \mathcal{F}_h$ e f é um limitante superior de $\mathcal{S}$.

Teorema 3 6. *Seja $h: Y \to Y$ especial. Se $J - D(h)$ é infinito então h pode ser estendida a uma função especial $f: J \to J$.*

Demonstração: Como $\mathcal{F}_h$ é indutivo, e não vazio, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{F}_h$ admite um elemento maximal f. Seja $X = D(f)$.

Se $X = J$ não há nada mais a provar.

Se $X \neq J$ afirmamos que $A = J - X$ tem 2 elementos. É claro que A é invariante por τ e que $1 \notin A$ pois, caso contrário, a função $g: X \cup \{1\} \to X \cup \{1\}$ definida por $(\forall x \in X) g(x) = f(x)$ e $g(1) = 1$ seria especial e estritamente maior do que f, contradizendo a maximalidade de f. Suponhamos, por absurdo, que A tenha mais do que 2 elementos. Neste caso, dado $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $b \notin \{a, \frac{1}{a}\}$ (note que $a \neq \frac{1}{a}$, pois $1 \notin A$). Resulta que $A_0 = \{a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\}$ é um subconjunto de A com 4 elementos. Seja $Y = X \cup A_0$ e $g: Y \to Y$ a função definida da seguinte maneira: $(\forall x \in X) g(x) = f(x), g(a) = b$, $g(b) = \frac{1}{a}, g(\frac{1}{a}) = \frac{1}{b}$ e $g(\frac{1}{b}) = a$. É fácil de ver que g é especial e estritamente maior do que f, contradizendo a maximalidade de f.

Sabemos portanto que $J = X \cup \{a, \frac{1}{a}\}$ (reunião disjunta) e, conseqüentemente, que $X - D(h)$ também é infinito. Vamos agora construir uma seqüência de conjuntos X_n tais que, para todo n,

i) $X_n \subset X - D(h)$;

ii) X_n tem 4 elementos;

iii) $\tau(X_n) = X_n$;

iv) $\exists a_n \in X_n$ tal que $b_n = f(a_n) \in X_n$;

v) $(X_1 \cup \ldots \cup X_{n-1}) \cap X_n = \emptyset$

A construção será feita por indução sobre n:

$n = 1$. Sejam a_1 qualquer elemento de $X - D(h)$ distinto de 1 e $b_1 = f(a_1)$. Então, $b_1 \neq 1$ (por A)), $b_1 \neq a_1$ (por B)) e $b_1 \neq \frac{1}{a_1}$ (por C)). Tomamos $X_1 = \{a_1, b_1, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{b_1}\}$.

Etapa de indução. Suponhamos que $n > 1$ e que $X_1, \ldots, X_{n-1}$ já foram construidos satisfazendo as condições acima. Seja $a_n \in (X - D(h)) - (X_1 \cup \ldots \cup X_{n-1})$, $a_n \neq 1$, e $b_n = f(a_n)$. Temos: $b_n \neq 1$ (por A)), $b_n \neq a_n$ (por B)) e $b_n \neq \frac{1}{a_n}$ (por C)). Tomamos $X_n = \{a_n, b_n, \frac{1}{a_n}, \frac{1}{b_n}\}$ e a etapa de indução está completa.

Se X_n é como acima resulta, pela Proposição 1, que $(\forall x \in X_n)$ $f(x) \in X_n$. Conseqüentemente, se $Y = X - \bigcup_{n \geq 1} X_n$ então $(\forall y \in Y)$ $f(y) \in Y$ e a restrição g de f a Y também é especial. Seja $Z = \left\{\bigcup_{n \geq 1} X_n\right\} \cup \{a, \frac{1}{a}\}$. Então Z é enumerável e $J = Y \cup Z$ (reunião disjunta). Pelo Exemplo 3, existe $j: Z \to Z$ especial. Enfim, se $t: J \to J$ é definida por $t(x) = g(x)$ se $x \in Y$ e $t(x) = j(x)$ se $x \in Z$, então t é especial e é uma extensão de h. Isto completa a demonstração do teorema.

Corolário 4 7. *Sejam I e K intervalos do mesmo tipo e tais que:*

i) $X = I \cup K \cup \tau(I) \cup \tau(K)$ é uma reunião disjunta;

ii) $J - X$ é infinito.

Então, toda bijeção $g: I \to K$ pode ser estendida a uma função especial $f: J \to J$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 2, g se estende a uma função especial $\hat{g}: X \to X$. Pelo Teorema 3, $\hat{g}$ tem uma extensão $f: J \to J$ especial.

Em particular, o Teorema 3 garante a existência de funções especiais $f: J \to J$; entretanto, êle não fornece casos específicos como o Exemplo 4.

O Exemplo 7, a seguir, dá um elemento maximal de $\mathcal{F}_h$ que não é uma função especial $f: J \to J$. Os Exemplos 8, 9, 10 e 11 ilustram aspectos de continuidade das funções especiais. Em particular, no Exemplo 11, construímos funções especiais $f: J \to J$ que não são bem comportadas.

EXEMPLO 7: Se $I = (\frac{1}{2}, 1)$, $K = (0, \frac{1}{2})$ e $g: I \to K$ é dada por $g(x) = x - \frac{1}{2}$, a Proposição 2 fornece uma função especial $\hat{g}: X \to X$ onde $X = J - \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$. Estendendo $\hat{g}$ ao ponto $x = 1$ obtemos um elemento maximal de $\mathcal{F}$ com domínio $J - \{\frac{1}{2}, 2\}$.

EXEMPLO 8: Sejam $0 < a < 1$ e n tal que $I = (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \subset (0,1)$, $K = (\frac{a}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a}{2} + \frac{1}{n}) \subseteq (0,1)$ e $K \cap I = \emptyset$. Se $g: I \to K$ é qualquer homeomorfismo, pelo Corolário 4, existe uma função especial $f: J \to J$ que é contínua em um intervalo aberto que contem a. Se $a > 1$ basta aplicar o mesmo argumento a $\frac{1}{a}$.

EXEMPLO 9: Sejam $0 < a < 1$ e n tal que $I = (a, a + \frac{1}{n}) \subset (0,1)$ e $K = (a - \frac{1}{n}, a) \subset (0,1)$. Se $g: I \to K$ é qualquer homeomorfismo, pelo Corolário 4, existe uma função especial $f: J \to J$ cujo único ponto de descontinuidade no intervalo $(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ é $x = a$. Se $a > 1$ basta aplicar o mesmo argumento a $\frac{1}{a}$.

O Exemplo 4 é uma função especial $f: J \to J$ cujo único ponto de descontinuidade no intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$ é $x = 1$.

EXEMPLO 10: Vamos agora construir uma função especial que é contínua em $x = 1$ e, portanto, descontínua em todos os pontos de uma seqüência infinita que converge para 1. Para cada $n \geq 1$ sejam $I_n = \left[1 - \frac{1}{2n+1}, 1 - \frac{1}{2n+2}\right)$ e $K_n = \left[1 - \frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n+1}\right)$. Se $g_n: I_n \to K_n$ é o homeomorfismo linear crescente entre I_n e K_n, a Proposição 2 fornece uma função especial $\hat{g}_n: X_n \to X_n$ onde $X_n = I_n \cup K_n \cup \tau(I_n) \cup \tau(K_n)$. A partir das funções g_n obtemos uma função especial $g: X \to X$ onde $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n = [\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2]$.

Enfim, pelo Teorema 3, estendemos g a uma função especial $f: J \to J$. A função f é contínua no ponto $x = 1$ e descontínua em todos os pontos da forma $1 - \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots$.

EXEMPLO 11: Seja $a \in J = (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Vamos mostrar a existência de funções especiais $f: J \to J$ contínuas em $x = a$ e com inversas descontínuas em $b = f(a)$ o que mostra a existência de funções especiais que não são bem comportadas.

Suponhamos inicialmente que $0 < a < 1$. Sejam b e ϵ tais que $0 < b < a < 1$ e $\epsilon = \min\left\{\frac{a-b}{2}, \frac{1-a}{2}, \frac{b}{2}\right\}$ de sorte que os intervalos $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ e $K = (b - \epsilon, b + \epsilon)$ são disjuntos e estão ambos contidos no intervalo $(0, 1)$. Sejam $\xi: I \to \mathbf{R}$ e $\eta: \mathbf{R} \to K$ os homeomorfismos dados por $\xi(x) = tg(\frac{\pi}{2\epsilon}(x - a))$ e $\eta(x) = \frac{2\epsilon}{\pi} arctgx + b$ e seja $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a função do Exemplo 6. Então $g = \eta \circ f \circ \xi: I \to K$ é uma bijeção tal que g é contínua em a e g^{-1} é descontínua em $b = g(x)$. Pelo Corolário 4, g se estende a uma função especial $f: J \to J$ que tem a propriedade desejada. Se $a > 1$, basta aplicar o mesmo argumento a $\frac{1}{a}$.

Quanto aos aspectos de diferenciabilidade, o Exemplo 8 mostra que se $a \in J$, $a \neq 1$, existe uma função especial $f: J \to J$ que é diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto contendo a; ademais, dado $c \in \mathbf{R}$, é fácil modificar o homeomorfismo g de forma que $f'(a) = c$. Por outro lado, g também pode ser escolhida de modo que f não tenha derivada em $x = a$ (permanecendo ainda diferenciável em todos os demais pontos de um intervalo aberto que contém a).

Se $f: J \to J$ é especial então f não tem derivada no ponto $x = 1$. De fato, se f tivesse derivada em $x = 1$ de $f \circ f = \tau$ obteríamos, pela regra da cadeia, que

$$f'(f(1)) \cdot f'(1) = \tau'(1).$$

Como $f(1) = 1$ e $\tau'(1) = -1$ teríamos $f'(1)^2 = -1$, contradição.

Para finalizar, observamos que ao invés de J ou $\mathbf{R}^\bullet$ poderíamos ter considerado o conjunto $k^\bullet$ dos elementos não nulos de um corpo k; $k^\bullet = \{x \in k | x \neq 0\}$. Ao invés de 4) concluiríamos que $f(1) = \pm 1$ e, também, que $f(-1) = \pm 1$. Em B) e C) concluiríamos que $x = \pm 1$. Enfim, ao invés de D), teríamos:

"Seja $f: X \to X$ especial. Se k tem característica 2 então ou $X = \{1\}$ e $f(1) = 1$ ou X tem no mínimo 4 elementos e f é um elemento de ordem 4 do grupo das bijeções de X. Se k tem característica $p \neq 2$ as possibilidades são as seguintes: i) $X = \{1\}$ e $f(1) = 1$; ii) $X = \{-1\}$ e $f(-1) = -1$; iii) $X = \{-1, 1\}$ e $f(1) = 1, f(-1) = -1$; iv) $X = \{-1, 1\}$ e $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$; v) X tem no mínimo 4 elementos e f é um elemento de ordem 4 do grupo das bijeções de X. Nos casos i), ii) e iii) f é um elemento de ordem 1 e no caso iv) um elemento de ordem 2."

Se k é infinito, a demonstração do Teorema 3 funciona com pequenas adaptações e garante a existência de funções especiais $f: k^\bullet \to k^\bullet$.

Para tratar do caso em que k é finito com p^n elementos, p primo, $n \geq 1$, observemos, em primeiro lugar, que se $f: k^\bullet \to k^\bullet$ é uma função especial então G_f é um grupo de ordem 1, 2 ou 4 e conseqüentemente, todas as órbitas segundo f têm 1, 2 ou 4 elementos.

LEMA 8. *Seja $f: k^\bullet \to k^\bullet$ uma função especial* e x e $k^\bullet$. *Temos: i) se $n_f(x) = 1$ então $x = +1$ ou $x = -1$* e $o_f(x) = \{x\}$; *ii) se $n_f(x) = 2$ então $x = +1$ ou $x = -1$* e $o_f(x) = \{-1, +1\}$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $n_f(x) = 1$ então $f(x) = x$; logo, por B), $x = 1$ ou $x = -1$. Além disto, se $f(1) = 1$ então $f(-1) = -1$ e vice-versa; ii) se $n_f(x) = 2$ então $f(x) \neq x$ e $f^2(x) = x$ isto é, $\frac{1}{x} = x$. Logo, $x = \pm 1$ e $o_f(x) = \{-1, +1\}$.

PROPOSIÇÃO 8: Seja k um corpo finito com p^n elementos, p primo e $n \geq 1$. Então:

i) se $p = 2$ e $n > 1$ não existem funções especiais $f: k^\bullet \to k^\bullet$;
ii) se $p \neq 2$ e $p \equiv 1$ (4) não existem funções especiais $f: k^\bullet \to k$;
iii) se $p \neq 2$ e $p \equiv -1$ (4) então existem funções especiais $f: k^\bullet \to k^\bullet$ se e sòmente se n for impar.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que existe uma função especial $f: k^\bullet \to k^\bullet$. Se $p = 2$ então $+1 = -1$ e portanto, pelo Lema, existe uma única órbita $o_f(x)$ com um único elemento (quando $x = 1$) e todas as demais órbitas têm 4 elementos. Resulta que existe um inteiro s tal que $2^n - 1 = 1 + 4s$, isto é, tal que $2^n = 2 + 4s$. Isto só é possível quando $n = 1$ o que demonstra o item i). Se $p \neq 2$ então $+1 \neq -1$ e portanto, pelo Lema, ou existem 2 órbitas com um único elemento cada e todas as demais têm 4 elementos ou existe uma órbita com 2 elementos e todas as demais têm 4 elementos cada. Em qualquer destes casos existe um inteiro s tal que $p^n - 1 = 2 + 4s$ de forma que $p^n \equiv -1$ (4). Se $p \equiv 1$ (4) então $(\forall n \geq 1)$ $p^n \equiv 1$ (4) o que demonstra ii). Se $p \equiv -1$ (4) e n é par então, novamente, $p^n \equiv 1$ (4) de forma que não existem funções especiais $f: k^\bullet \to k^\bullet$. Só resta mostrar que se $p \neq 2$ e n é impar então éxistem funções especiais $f: k^\bullet \to k^\bullet$. Seja $X = \{x \in k^\bullet | x \neq \pm 1\}$. Então, o número de elementos de X é um múltiplo de 4 e seus elementos podem ser agrupados de 4 em 4 da seguinte maneira: $a_1, \frac{1}{a_1}, b_1, \frac{1}{b_1}; a_2, \frac{1}{a_2}, b_2, \frac{1}{b_2}; \ldots; a_s, \frac{1}{a_s}, b_s, \frac{1}{a_s}$. Pelo Exemplo 2, se $X_i = \{a_i, b_i, \frac{1}{a_i}, \frac{1}{b_i}\}$ existe uma função especial $g_i: X_i \to X_i$. A partir destas funções obtemos uma função especial $g: X \to X$. Enfim g pode ser estendida a $f: k^\bullet \to k^\bullet$ de duas formas: $f(1) = 1$ e $f(-1) = -1$ ou $f(1) = -1$ e $f(-1) = 1$. Em ambos os casos, a extensão é especial.

Bibliografia

1. Alan Barnes, *Inverse and reciprocal functions*, Math. Gazette, 65 (1981), 284-286.
2. Elon Lages Lima, *Curso de análise*, Projeto Euclides, IMPA, 1976.
3. Patrick J. McCarthy, *Functional n^{th} roots of unity*, Math. Gazette, 64 (1980), 107-115.
4. Patrick J. McCarthy and W. Stephenson, *The classification of the conjugacy classes of the full group of homeomorphisms of an open interval and the general solution of certain functional equations*, Proc. London Math. Soc. (3), 51 (1985), 93-112.
5. Stan Dolan, *$f^{-1} = 1/f$: a question of continuity*, Math. Gazette, 66 (1982), 314-315.

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília
70.910 - Brasília - DF