

# Selas para Bichos com $n$ Pernas

Abdênago Alves de Barros  
José Adonai Pereira Seixas

## 1. Introdução.

Nos nossos primeiros contatos com Geometria Analítica, conhecemos a superfície  $z = x^2 - y^2$ , a qual é adequadamente chamada de *sela* (Figura 2). Posteriormente, em cursos um pouco mais avançados, nos é apresentada a *sela do macaco*:  $z = x^3 - 3xy^2$ . A razão para a escolha deste nome é que esta superfície apresenta três "apoios": dois deles para as pernas e o terceiro, neste caso, serve para apoiar o rabo do macaco (Figura 3).

Seja  $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Identificando  $\mathbf{R}^2$  com o corpo dos números complexos  $\mathbf{C}$ , temos que  $z = x + iy = re^{i\theta}$ , onde  $r$  é o módulo de  $z$  e  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , é o argumento (principal) de  $z$ . Além disto,  $x = \operatorname{Re} z$  e  $y = \operatorname{Im} z$  são as partes real e imaginária do complexo  $z$ , respectivamente. De posse desta identificação, não é difícil verificar que a sela e a sela do macaco são, respectivamente, os gráficos de  $\operatorname{Re} z^2$  e  $\operatorname{Re} z^3$ ,  $z \in \mathbf{C}$ .

Posto isto torna-se bastante natural o estudo do gráfico da função  $f(x, y) = \operatorname{Re} z^n$ ,  $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ , onde  $n$  é um inteiro maior do que 1. O gráfico de  $f$ ,

$$\operatorname{graf}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3; (x, y) \in \mathbf{R}^2\},$$

é chamado *n-sela*.

As Figuras 2, 3, 4, 5 e 6 mostram estas selas para os casos  $n = 2, 3, 4, 5$  e  $8$ , respectivamente. O caso  $n = 2$  é a sela usual, o caso  $n = 3$  é a sela do macaco e o caso  $n = 8$  é a sela do polvo.

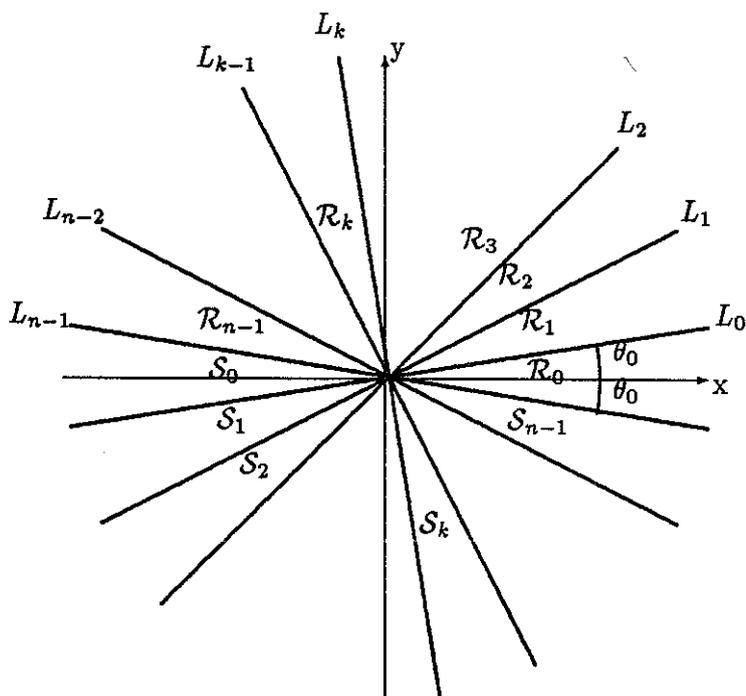


Figura 1.

## 2. Desenhando as n-Selas.

Consideremos  $n$  um número inteiro positivo. Para cada inteiro  $k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , sejam  $\theta_k = \frac{2k+1}{2n}\pi$  e  $L_k \subset \mathbf{R}^2$  a reta em  $\mathbf{R}^2$  passando pela origem e fazendo o ângulo  $\theta_k$  com o eixo dos  $x$ , isto é,

$$L_k = \{z = (x, y) \in \mathbf{R}^2; z = t(\cos \theta_k, \sin \theta_k), t \in \mathbf{R}\}.$$

Observando que  $\theta_0 \leq \theta_k \leq \pi$ , vemos que a família de retas  $L_k$  decompõe  $\mathbf{R}^2$  em  $2n$  regiões (abertas)  $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_{n-1}$  e  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{n-1}$ , onde, para cada  $k$ ,  $\mathcal{S}_k$  é a região simétrica de  $\mathcal{R}_k$  com relação à origem. Além disto, se  $1 \leq k \leq n-1$ , a região  $\mathcal{R}_k \cup \mathcal{S}_k$  é a região delimitada pelas retas  $L_{k-1}$  e  $L_k$  e  $\mathcal{R}_0 \cup \mathcal{S}_0$  é a região delimitada pelas retas  $L_0$  e  $L_{n-1}$ , como mostra a Figura 1.

O seguinte Lema é bastante útil no tratamento das n-selas.

LEMA 1. Sejam  $n$  um inteiro tal que  $n \geq 2$  e  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$f(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^n,$$

isto é,  $f(z)$  é a parte real do complexo  $z^n$ . Então,

- (1)  $f(-z) = (-1)^n f(z)$ ;  
 (2)  $f(z) = 0$  se, e somente se,  $z \in L_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ;  
 (3) Para  $n$  par,  $f$  é positiva em

$$\mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_2 \cup \dots \cup \mathcal{R}_{n-2} \cup \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_{n-2}$$

e negativa em

$$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3 \cup \dots \cup \mathcal{R}_{n-1} \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_3 \cup \dots \cup \mathcal{S}_{n-1};$$

- (4) Para  $n$  ímpar,  $f$  é positiva em

$$\mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_2 \cup \dots \cup \mathcal{R}_{n-1} \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_3 \cup \dots \cup \mathcal{S}_{n-2}$$

e negativa em

$$\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3 \cup \dots \cup \mathcal{R}_{n-2} \cup \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_2 \cup \dots \cup \mathcal{S}_{n-1}.$$

PROVA: Seja  $z \in \mathbf{C}$ . Temos que

$$\begin{aligned} f(-z) &= \operatorname{Re}(-z)^n = \operatorname{Re}((-1)^n z^n) \\ &= \operatorname{Re}(-1)^n \operatorname{Re} z^n - \operatorname{Im}(-1)^n \operatorname{Im} z^n \\ &= (-1)^n \operatorname{Re} z^n = (-1)^n f(z). \end{aligned}$$

Provamos, assim, o item (1). Vejamos a demonstração de (2).

Seja  $z \in \mathbf{C}$ ,  $z \neq 0$  (o caso  $z = 0$  é imediato). Suponhamos, inicialmente, que  $z$  esteja situado no semi-plano superior. Assim,  $z = re^{i\theta}$ , onde  $r > 0$  e  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Usando a equação de *De Moivre* não é difícil verificar que  $f(z) = r^n \cos n\theta$ . Logo,  $f(z) = 0$  se, e somente se,  $\cos n\theta = 0$ . Segue então que  $n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , para algum inteiro  $k$ . Usando o fato que  $0 \leq \theta \leq \pi$ , vem que  $0 \leq k \leq n-1$  e, portanto,  $z \in L_k$ . Agora, dado  $z$  no semi-plano inferior, temos  $z = -w$ , para algum  $w$  no semi-plano superior. Logo,  $-z \in L_k$ , para algum  $k$ , e isto implica que  $z \in L_k$ . Reciprocamente, seja  $z \in L_k$ . Logo,  $z = te^{i\theta_k}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Donde,  $f(z) = t^n \cos n\theta_k = 0$ . As provas de (3) e de (4) seguem de (1) e do fato que  $f(z) = r^n \cos n\theta$  e ficarão a cargo do leitor. ■

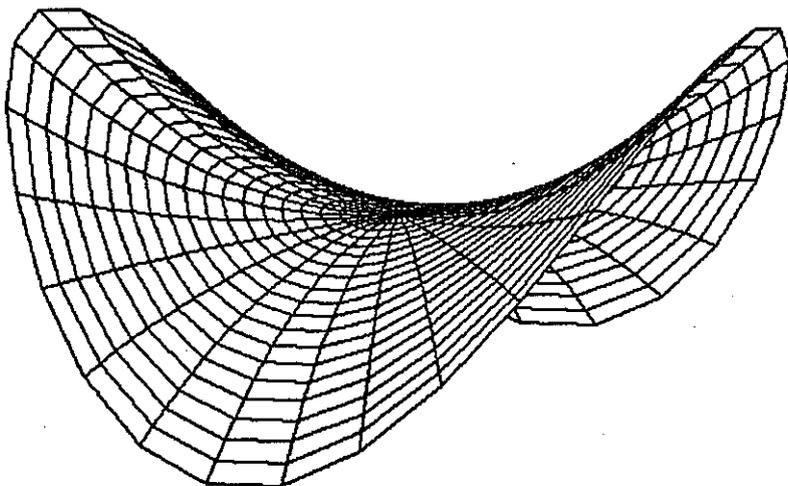
**COROLÁRIO 2.** A origem de  $\mathbb{R}^2$  é ponto de sela de  $f$ .

**PROVA:** Seja  $h(z) = z^n = f(x, y) + ig(x, y)$ , onde  $g(x, y) = \text{Im } z^n$ . Temos que  $h$  é analítica em  $\mathbb{C}$  e

$$\begin{aligned} h'(z) = nz^{n-1} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

Como  $h'(0) = 0$ , vem que  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ . Logo  $(0, 0)$  é ponto crítico de  $f$ . (Na realidade,  $(0, 0)$  é o único ponto crítico de  $f$ .) Os itens (3) e (4) do Lema garantem que  $f$  muda de sinal em toda vizinhança de  $(0, 0)$ , o que, combinado com o fato  $f(0, 0) = 0$ , estabelece o Corolário. ■

A seguir apresentamos as  $n$ -selas para os casos  $n = 2, 3, 4, 5$  e  $8$ . As figuras foram geradas usando rotinas gráficas do Turbo Pascal versão 5.0. O algoritmo que as produziu usou a parametrização  $(r \cos \theta, r \sin \theta, r^n \cos n\theta)$ ,  $r \geq 0$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .



**Figura 2.**

### 3. Algumas Propriedades Geométricas das $n$ -Selas.

Nesta seção a  $n$ -sela  $S$  será olhada como uma superfície re-

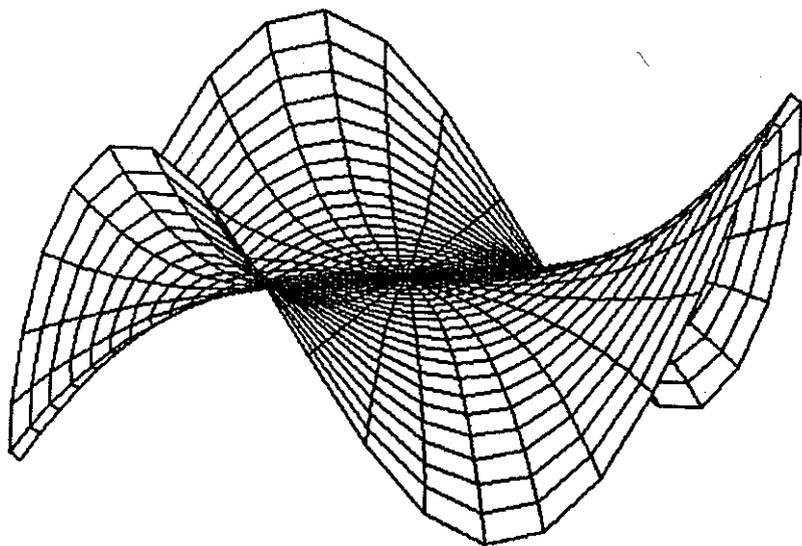


Figura 3.

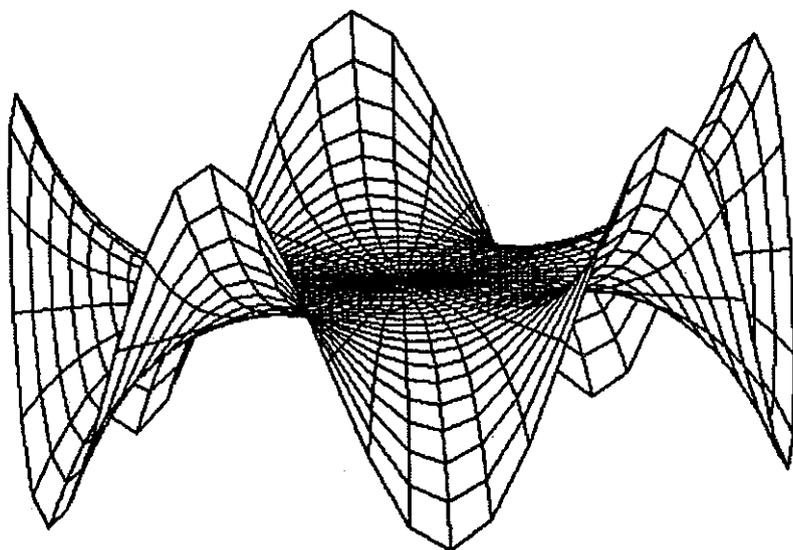


Figura 4.

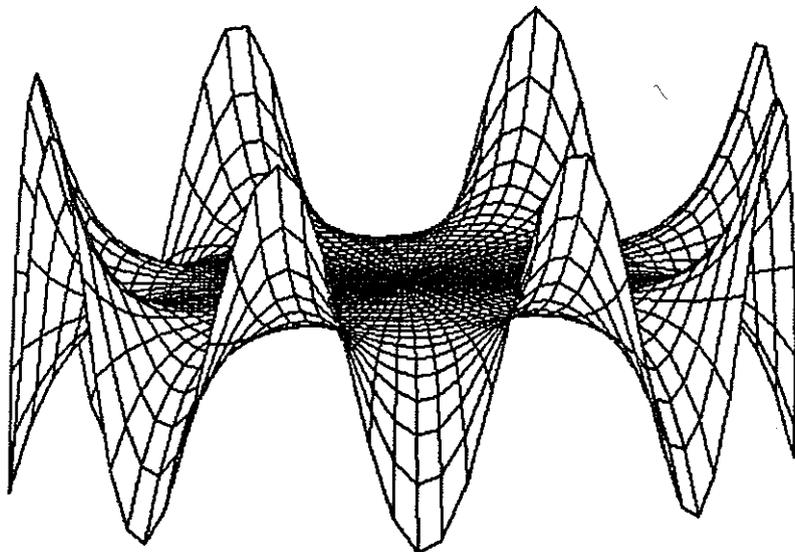


Figura 5.

gular, parametrizada de modo natural por  $X: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  definida por

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, \operatorname{Re}(x + iy)^n), (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Sejam  $K$  e  $H$  as curvaturas gaussiana e média de  $S$ , respectivamente. Então, para cada  $z \in \mathbf{R}^2$ , temos que

$$K(z) = - \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial c^2}(z)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z)\right)^2}{\sqrt{1 + \|\nabla f(z)\|^2}} \quad \text{e}$$

$$H(z) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f(z)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(z)\|^2}} \right), \quad (3.1)$$

posto que  $f(z) = \operatorname{Re} z^n$  é harmônica (veja, por exemplo, [C]).

Inicialmente temos o seguinte Lema.

LEMA 2. *Seja  $S$  uma  $n$ -sela. Então, as curvaturas gaussiana e média de  $S$  em  $z$ ,  $z \in \mathbf{R}^2$ , são dadas por*

$$K(z) = - \left( \frac{n(n-1)r^{n-2}}{1+n^2r^{2(n-1)}} \right)^2 \quad (3.2)$$

e

$$H(z) = - \left( \frac{n^3(n-1)r^{3n-4}}{(1+n^2r^{2(n-1)})^{3/2}} \right) \cos n\theta \quad (3.3)$$

PROVA: Com as notações do Corolário do Lema 1, temos que

$$\begin{aligned} h'(z) &= nz^{n-1} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} h''(z) &= n(n-1)z^{n-2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) - i \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y). \end{aligned}$$

Donde obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(z) = nr^{n-1} \cos(n-1)\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -nr^{n-1} \sin(n-1)\theta \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z) = n(n-1)r^{n-2} \cos(n-2)\theta, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z) = -n(n-1)r^{n-2} \sin(n-2)\theta \end{array} \right. \quad (3.4)$$

As equações (3.4) quando substituídas em (3.1) provam o Lema.

**COROLÁRIO 1.** A curvatura gaussiana da  $n$ -sela  $S$  é tal que  $K(z) \leq 0$ , para todo  $z \in \mathbb{R}^2$ . Além disto,  $K(z) = 0$  se, e somente se,  $z = 0$ .

**COROLÁRIO 2.** A curvatura média da  $n$ -sela  $S$  se anula ao longo das retas  $L_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , e apenas aí.

**COROLÁRIO 3.** A origem do  $\mathbb{R}^3$  é o único ponto umbílico (na realidade planar) de  $S$ .

PROVA: De (3.2) e (3.3) vem que

$$H^2 - K = \frac{(n(n-1)r^{n-2})^2}{(1+n^2r^{2(n-1)})^{3/2}} \left( n^4 r^{4(n-1)} \cos^2 n\theta + n^2 r^{2(n-1)} + 1 \right).$$

Portanto,  $H^2 - K = 0$  se, e somente se,  $r = 0$ , isto é,  $z = 0$ .

Uma superfície  $S \subset \mathbf{R}^3$  é dita *regrada* se para cada  $Z \in S$  for possível traçar uma reta passando por  $Z$  e contida em  $S$ .

É um fato conhecido que a 2-sela  $z = x^2 - y^2$  é regrada. Por exemplo, a família de retas  $L_u$ ,  $u \in \mathbf{R}$ , dadas parametricamente por

$$L_u = \{X \in \mathbf{R}^3; X = (0, -u, -u^2) + t(1, 1, 2u), t \in \mathbf{R}\},$$

cobre a referida sela. Na realidade, como veremos a seguir, esta é a única  $n$ -sela que é regrada.

TEOREMA. *Seja  $S$  uma  $n$ -sela. Então,*

- (1) *A curvatura total de  $S$  é finita e vale  $C(S) = -2\pi(n-1)$ ;*
- (2)  *$S$  é regrada se, e somente se,  $n = 2$ .*

PROVA: Temos que

$$C(S) = \int_S K \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left( \frac{n(n-1)r^{n-2}}{1+n^2r^{2(n-1)}} \right)^2 \sqrt{1+n^2r^{2(n-1)}} r \, dr d\theta = -2\pi(n-1),$$

o que prova (1).

Para provar (2), suponhamos, por absurdo, que a  $n$ -sela  $S$ ,  $n > 2$ , seja regrada.

Fixemos  $z_0 = (x_0, y_0)$  em algum dos abertos  $\mathcal{R}_k$ ,  $k > 0$ , (Figura 1). Como estamos supondo  $S$  regrada deve existir alguma reta  $L$  passando por  $Z_0 = (x_0, y_0, f(z_0)) = (x_0, y_0, \operatorname{Re} z_0^n)$  e contida em  $S$ . Assim,

$$L = \{X \in \mathbf{R}^3; X = Z_0 + t(\cos \alpha, \sin \alpha, c), t \in \mathbf{R}\},$$

para alguns  $c \in \mathbf{R}$  e  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < \pi$ . Observe que  $\alpha$  é o ângulo que a projeção (ortogonal) de  $L$  sobre o plano coordenado  $XOY$  faz com o eixo  $OX$ . Denotemos por  $L'$  esta projeção.

Suponhamos, agora, que a reta  $L$  passe pela origem de  $\mathbf{R}^3$ . Neste caso,  $L$  pode ser reescrita como

$$L = \{X \in \mathbf{R}^3; X = t(\cos \alpha, \sin \alpha, c), t \in \mathbf{R}\}.$$

Mas,  $L \subset S$ . Logo,

$$tc = \operatorname{Re}(t \cos \alpha + it \sin \alpha)^n = t^n \cos n\alpha, \text{ para todo } t \geq 0,$$

o que só é possível se  $\cos n\alpha = 0$  e  $c = 0$ . Segue, então, que  $\alpha = \theta_k$ , para algum  $k$ ,  $k = 1, 2, \dots, (n-1)$  e, portanto,  $L = L' = L_k$ . Em particular,  $z_0 \in L_k$  (Figura 1), o que é um absurdo.

Para finalizar a demonstração, suponhamos que  $L$  não passe pela origem de  $\mathbf{R}^3$ . Sendo assim,  $L'$  também não passa pela origem de  $\mathbf{R}^2$  e, devido a isto,  $L'$  intercepta, no mínimo,  $n-1$  das retas  $L_k$  (o caso mínimo ocorre quando  $L'$  é paralela a uma das  $L_k$ ). Como  $n-1 \geq 2$ , temos que existem dois pontos  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ ,  $z_1 \neq z_2$ , em  $L'$ , com  $z_1 \in L_{k_1}$  e  $z_2 \in L_{k_2}$ , para alguns inteiros  $k_1$  e  $k_2$  tais que  $0 \leq k_1, k_2 \leq n-1$ . Consequentemente, os pontos  $Z_1 = (x_1, y_1, 0)$  e  $Z_2 = (x_2, y_2, 0)$  pertencem à reta  $L$  e, outra vez, obtemos  $L = L' = L_k$ . Contradição. ■

Neste ponto convém observar que o gráfico de  $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$g(x, y) = \operatorname{Im}(x + iy)^n = \operatorname{Im} z^n,$$

pode ser obtido da  $n$ -sela através de uma rotação de  $\theta_0 = \pi/2n$  em torno do eixo  $OZ$ .

Notemos, também, que a  $n$ -sela é invariante por uma rotação de  $4\theta_0$  em torno de  $OZ$  e pela composição da reflexão  $T(x, y, z) = (x, y, -z)$  com uma rotação de  $2\theta_0$  em torno de  $OZ$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [C] M. P. do Carmo - *Differential Geometry of Curves and Surfaces* Prentice - Hall, New Jersey 1976.
- [P] L. L. Pennisi - *Elements of COMPLEX VARIABLES* Holt, Rinehart and Winston, New York 1966.

Universidade Federal do Ceará  
Departamento de Matemática  
Campus do Pici - Bloco 914  
60451 - Fortaleza - Ce

Universidade Federal de Alagoas  
Departamento de Matemática  
Campus A. C. Simões  
Tabuleiro dos Martins  
57080 - Maceió - Al