Matemática Universitária Nº 15, dezembro de 1993, 20-32

Reminiscências e Cálculo de Algumas Funções e Integrais Elípticas

Aurino Ribeiro Filho
Dionicarlos Soares de Vasconcelos

1. Introdução

Com o crescente desenvolvimento da Física dos sistemas não lineares tornou-se cada vez mais presente entre os físicos a utilização de funções e integrais elípticas. Uma discussão clássica em torno do cálculo numérico destas funções e integrais é encontrada no famoso texto de King [11], onde o autor discute o interesse de tal cálculo nos vários ramos da Física e da Astronomia. Ele enfatiza ainda as vantagens de se utilizar um método de cálculo direto, de tais funções e integrais, independente de tabelas auxiliares, de tal maneira que possibilite o uso de máquinas de calcular. Para isso, King descreve em detalhe um método de cálculo baseado na transformação de Landen e no uso da escala da média aritmético-geométrica, tendo como referência os trabalhos de Lagrange, Legendre, Gauss, Jacobi, Abel e outros. As citadas transformação e média têm sido muito pouco difundidas em anos recentes e por isso mesmo serão discutidas rapidamente na segunda parte deste trabalho.

Neste artigo, abordaremos de forma resumida alguns aspectos que enfatizam a grande importância das denominadas integrais elípticas completas de primeira e segunda espécies e das doze funções elípticas jacobianas nos recentes problemas da Física. A seguir descreveremos um pouco a história do surgimento dos métodos de calculá-las e, finalmente, introduziremos três subprogramas (FELLPK, FELLPE, ELLI) que calculam rapidamente essas funções e integrais.

Apesar de sua relevância, poucos são os estudantes que tiveram contato, na graduação, com tais assuntos. Por isso mesmo, iniciaremos esta discussão lembrando uma citação devida a Jacobi. Esse matemático caracterizava 23/12/1751, como sendo a data de aniversário das funções elípticas. Foi naquele dia que Euler iniciou a sua avaliação da coleção de trabalhos apresentada pelo matemático italiano Giulio Carlo, Conde Fagnano e Marquês de Toschi, a qual era o pré-requisito para a sua entrada na Academia de Berlim. Dentre os inúmeros artigos de Fagnano, o intitulado *Method For Measuring the Lemniscate*, publicado em 1718, despertou o entusiasmo de Euler. Ele vislumbrou ali o nascedouro da teoria das funções elípticas, que viria, segundo ele, a estender consideravelmente os limites da análise matemática.

De maneira sumária, consideremos $F(x,u)$ uma função racional de u e x sendo u^2 uma função polinomial cúbica ou quártica de x sem fator repetido, isto é, $u^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$. Neste caso $\int F(x,u)\,dx$ é a denominada integral elíptica. Um conhecido exemplo dessa classe de integrais é dado por $a\int_0^{\sigma} dx\,(1 - k^2x^2)\,[(1 - x^2)(1 - k^2x^2)]^{-1/2}$ a qual é igual ao comprimento do arco de uma elípse de excentricidade k e eixo maior $2a$. Do ponto de vista histórico, tudo indica ter sido esta a razão porque as integrais desse tipo receberam a denominação de elípticas [16]. Legendre, que por mais de quarenta anos estudou tais integrais, introduziu as três formas canônicas para as mesmas. Dentre essas formas, somente as duas primeiras nos interessam neste artigo. Elas são duas funções básicas, que têm sido utilizadas freqüentemente em cálculos envolvendo equações diferenciais não lineares, e são denominadas integrais elípticas de primeira e segunda espécies, respectivamente. Elas são definidas, trigonometricamente, por:

$$F(k,\phi) = \int_0^{\phi} d\varphi\,(\,1 - k^2\,sen^2\,\varphi\,)^{-1/2} \tag{1}$$

$$E(k,\phi) = \int_0^{\phi} d\varphi\,(\,1 - k^2\,sen^2\,\varphi\,)^{1/2} \tag{2}$$

Tais integrais são funções de dois argumentos que são a amplitude ϕ e o módulo k, os quais são normalmente limitados aos intervalos $0 \leq k^2 \leq 1$ e $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$, que podem ser estendidos através de transformações de variáveis. A transformação $x = sen\,\phi$ converte as integrais elípticas de uma forma trigonométrica para uma forma algébrica. No caso limite $\phi = \pi/2$, as integrais (1) e (2) são denominadas integrais elípticas completas de primeira e segunda espécies e são designadas por $K(k) = F(\,k, \pi/2\,)$ e $E(k) = E(\,k, \pi/2\,)$, respectivamente. Se definimos $u = F(\,k, \phi\,)$, a função inversa é denominada a função amplitude $\phi = am\,(u, k)$ e a partir daí encontramos as funções elípticas jacobianas, definidas por Jacobi [10] como sendo $sn\,(u, k) = \text{sen}\,am\,(u, k)$, $cn\,(u, k) = \cos\,am\,(u, k)$ e $dn\,(u, k) = [\,1 - k^2\,sn^2\,(u, k)\,]^{1/2}$. Usando a notação de [1] definimos o parâmetro m das integrais elípticas por $m = k^2$ e o seu complementar $m_1 = 1 - k^2$. Com isto escreveremos $K(m)$ e $E(m)$, *sn u*, *cn u* e *dn u*. As outras nove funções elípticas jacobianas são definidas a partir da notação de Glaisher [8], ou seja, $sc = sn/cn$, $sd = sn/dn$, $cd = cn/dn$, $cs = cn/sn$, $ds = 1/sd$, $dc = 1/cd$, $ns = 1/sn$, $nc = 1/cn$, $nd = 1/dn$ (vide figuras 1-6).

Essas funções têm ressurgido com grande ênfase em inúmeros problemas de eletromagnetismo, partículas elementares, mecânica quântica, relatividade geral, mecânica estatística e outros. Um exemplo bastante interessante de problema físico onde estão presentes tais objetos matemáticos é aquele da teoria de transições de fase que apresenta fases incomensuráveis (ex. ferroelétricos) onde surgem estruturas solitônicas. Em geral definem-se os sistemas incomensuráveis como sendo aqueles que possuem uma estrutura quase cristalina, ou seja, uma estrutura que não é comensurável com aquela apresentada inicialmente pelo sistema. Essas fases são caracterizadas por uma ondulação modulada periodicamente a qual não é comensurável com a rede cristalina original. Do ponto de vista físico as fases incomensuráveis caracterizam-se pelo surgimento de um modo de vibração (soft mode) crítico o qual é distinguido pelo fato do quadrado da sua freqüência tender a zero quando a temperatura do sistema aproxima-se daquela de transição. Nessas fases tais modos de vibração apresentam um vetor de onda cujo módulo é um múltiplo irracional (daí o nome incomensurável) daquele do vetor da rede recíproca do sistema e em conseqüência, tem-se que, nunca dois átomos apresentam os mesmos deslocamentos de suas posições de equilíbrio.

Alguns desses sistemas ferroelétricos apresentam além da fase normal, as fases comensurável e incomensurável. Para caracterizá-las parte-se em geral de um potencial termodinâmico [18]

$$f = E + \mathrm{L} + W \tag{3}$$

onde E representa o termo dito elástico

$$E = \frac{1}{2} k \left[\left(\frac{d\eta_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_2}{dx}\right)^2 \right] \tag{4}$$

L é o invariante de Lifshitz dado por

$$L = \sigma \left(\eta_1 \frac{d\eta_2}{dx} - \eta_2 \frac{d\eta_1}{dx}\right) \tag{5}$$

e W é a parte estática ou homogênea do potencial, cuja forma depende em geral do sistema estudado. Para uma transição incomensurável-comensurável num cristal pode-se escrever

$$W = \frac{1}{2} \alpha (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{4} \beta (\eta_1^4 + \eta_2^4) + \frac{1}{2} \gamma \, \eta_1^2 \eta_2^2 \tag{6}$$

onde η_1 e η_2 representam as duas componentes do parâmetro de ordem complexo $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ que caracteriza o sistema em estudo, e α, β, γ, k, σ são os

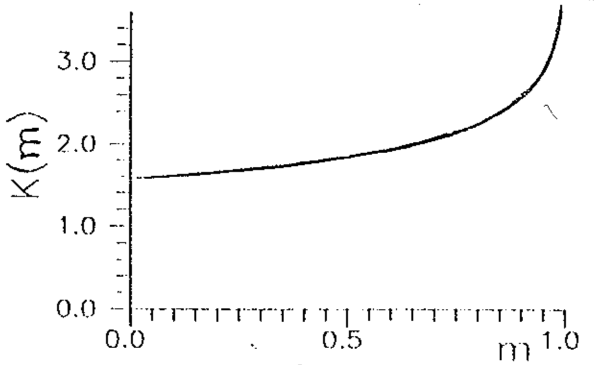

Fig.1A – Integral Elíptica Completa de 1a. Espécie K(m)

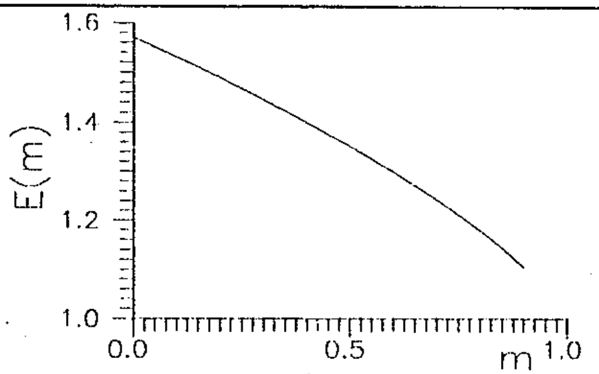

Fig.1B – Integral Elíptica Completa de 2a. Espécie E(m)

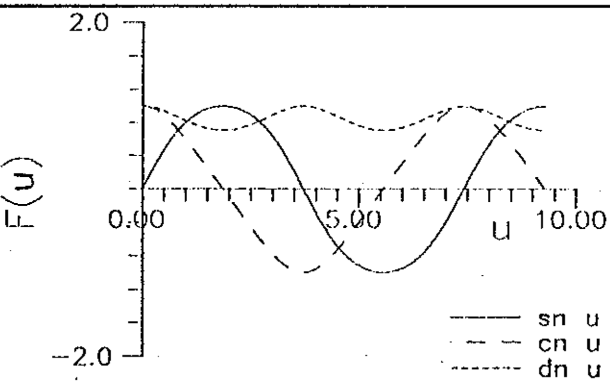

Fig.2–Funções Elípticas Jacobianas(m=0.5)

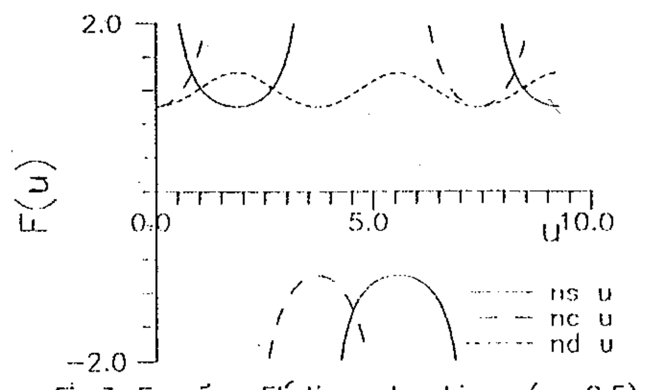

Fig.3–Funções Elípticas Jacobianas(m=0.5)

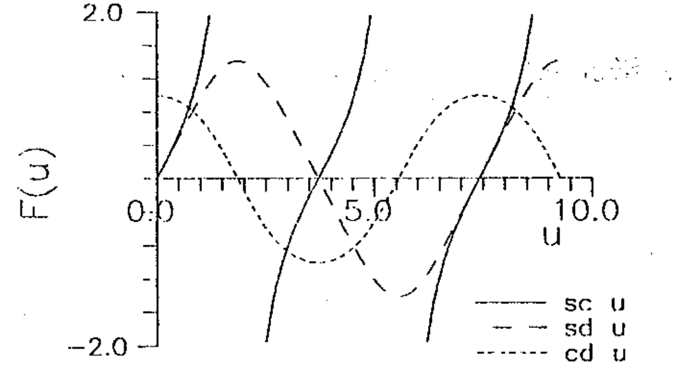

Fig.4–Funções Elípticas Jacobianas(m=0.5)

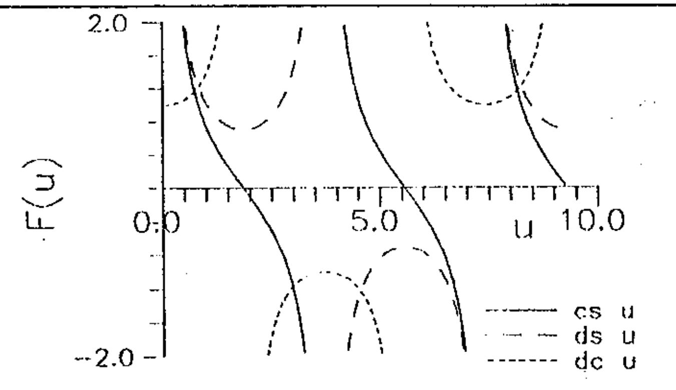

Fig.5–Funções Elípticas Jacobianas(m=0.5)

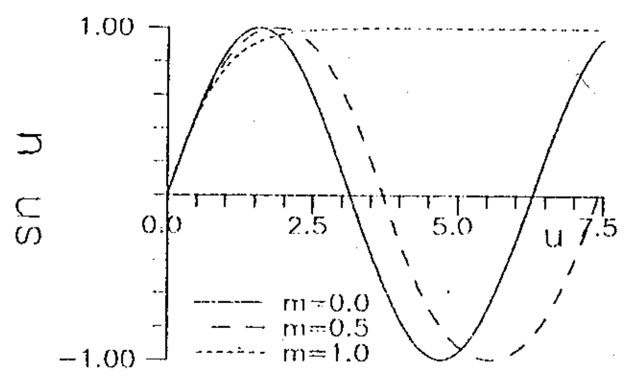

Fig.6A–Função Elíptica jacobiana sn u

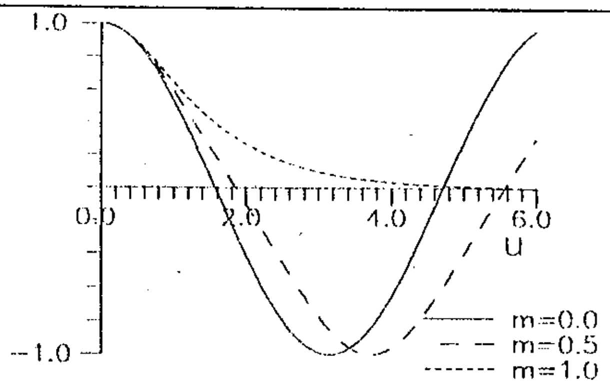

Fig.6B–Função Elíptica Jacobiana cn u

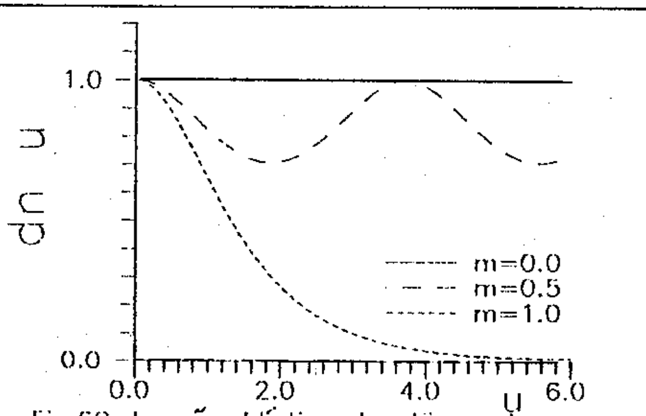

Fig.6C–Função Elíptica Jacobiana dn u

parâmetros fenomenológicos da denominada teoria de transições de fase de Ginzburg-Landau [13].

Ao fazer algumas transformações em (3) é possível obter as expressões para as diferentes fases a partir da sua minimização, a qual implica no surgimento de um sistema de duas equações de Euler-Lagrange acopladas em termos de amplitude e do ângulo de fase do parâmetro de ordem [17].

Ao usar-se a denominada aproximação solitônica, isto é, quando é admitido ter somente a fase variável, o sistema de equações citado restringir-se-á à conhecida equação de seno-Gordon (ou equação do pêndulo físico) a qual é não linear e tem como solução o denominado arranjo multisolitônico de fase que pode ser escrito em termos de funções elípticas jacobianas *sn* ou *sd*. A partir destes resultados o que se observa é que o potencial termodinâmico que caracteriza a fase incomensurável é obtido em termos das funções $K(m)$ e $E(m)$ já definidas.

2. Notas Históricas

Do ponto de vista histórico, foi Euler [5] quem primeiro preocupou-se com os métodos de cálculo das integrais elípticas. Em 1771, o matemático inglês John Landen, estudando tais integrais, enunciou o célebre teorema de transformação envolvendo a expressão $dx\,[\,(1-p^2x^2)\,(1-q^2x^2)]^{-1/2}$ [16]. Em síntese, ele mostrou que partindo desta diferencial ele obtinha uma outra de forma semelhante $dy\,[\,(1-p_1^2y^2)\,(1-q_1^2y^2)]^{-1/2}$ por meio da seguinte transformação $x=y\,(1-pqy^2)^{-1/2}\,(1-[\tfrac{1}{2}(p+q)]^2y^2)^{-1/2}$, onde x e y desaparecem simultaneamente, e, ao invés das constantes iniciais p e q, aparecem p_1 e q_1 dadas pelas relações $p_1=\tfrac{1}{2}(p+q)$ e $q_1=(pq)^{1/2}$. De maneira análoga ele escreve, na segunda parte desse teorema, a transformação $y=(1-p^2x^2)^{1/2}(1-q^2x^2)^{-1/2}$, para o mesmo enunciado, sendo que neste caso as novas constantes são escritas em termos das antigas p e q, como sendo $p_1=p+(p^2-q^2)^{1/2}$ e $q_1=p-(p^2-q^2)^{1/2}$. Em 1775, o mesmo Landen apresentou a sua transformação em forma trigonométrica [2] a qual se tornou básica para os métodos numéricos envolvendo tais integrais.

Legendre [15] também aplicou a famosa transformação de Landen para calcular numericamente as integrais elípticas e com isso forneceu o método de cálculo a partir do qual a maioria das tabelas existentes nos manuais clássicos foi construída. O denominado algorítmo da média aritmético-geométrica tem sido bastante discutido na literatura matemática. Ele originou-se a partir da avaliação das integrais elípticas completas num problema em torno da teoria de atrações planetárias [6]. A história desse algorítmo é interessante, pois apesar de ter sido Lagrange [12] o primeiro a estabelecê-lo publicamente, de acordo com as confidências de Gauss em carta datada de 16/4/1816 ao seu amigo H. C. Schumacher, ele o descobriu independentemente em1791 quando tinha 14 anos de idade. Mais tarde ele escreveria um longo artigo sobre este tema [7] o qual, a exemplo de outros trabalhos de sua autoria, só foi publicado após sua morte. A publicação desse trabalho fundamental só surgiu graças a E. Schering que editou os seus trabalhos completos.

A fim de relembrar o mencionado algorítmo, consideremos a_0, b_0 e c_0 números positivos tais que $a_0 > b_0$ e $a_0^2 = b_0^2 + c_0^2$. Constrói-se então uma seqüência de médias aritméticas e outra de médias geométricas, ou seja,

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \qquad b_n = (a_{n-1}\, b_{n-1})^{1/2} \tag{7}$$

onde se mostra facilmente que estas seqüências convergem rapidamente para o mesmo limite $M\,(a_0\,, b_0) = \lim a_n = \lim b_n$, o qual é, por definição, a média aritmético-geométrico de a_0 e b_0.

Gauss [7] empregou uma transformação trigonométrica e conseguiu finalmente séries rapidamente convergentes para as integrais elípticas de primeira e segunda espécies. Dentre os quatro exemplos numéricos reportados por Gauss aquele em que ele usou $a_0 = 1$ e $b_0 = 0.8$, após quatro iterações, converge para $a_4 = 0.897$ e $b_4 = 0.897211432115042$, o que indica a rapidez de convergência para o mesmo limite $M\,(a_0\,, b_0)$. Ainda nesse importante trabalho, Gauss enunciou o teorema de representação para M:

"Se $|x| < 1$, então $M(1+x, 1-x) = \pi/2K(x)$, onde $K(x) = \int_0^{\pi/2} d\,\sigma\,(1 - x\,sen^2\,\sigma)^{-1/2}$ é a integral elíptica completa da primeira espécie".

Além da sua famosa demonstração, muitas outras são conhecidas. Recentemente Almkvist e Berndt [2] introduziram uma reformulação para o citado teorema:

"Seja $a > b > 0$. Então $M\,(a,b) = \pi/[\,2I\,(a,\,b)\,]$ onde $I\,(a,b) = (1/a)\,K\,(x)$ e $x = (1/a)\,[a^2 - b^2]^{1/2}$".

Estes mesmos autores [2] apresentaram também uma reformulação para outra conhecida demonstração do teorema de Gauss obtida por Landen em 1771. Nesta nova versão eles, em linhas gerais, partindo de $x_n = c_n / a_n$, onde $c_n = (a_n^2 - b_n^2)^{1/2}$, com $n \geq 0$ e substituindo na expressão de $K(x)$ a forma trigonométrica da transformação de Landen, $tan\,\varphi_1 = sen\,(2\varphi)\,[x_1 + \cos\,(2\varphi)]^{-1}$, conseguem, após alguns cálculos, encontrar $K(x) = (1 + x_1)\,K\,(x_1)$ tal que após n iterações encontram $K(x) = (1 + x_1)\,(1 + x_2)\,\ldots\,(1 + x_n)\,K\,(x_n)$ que se reduz a $K(x) = (a/a_n)\,K\,(x_n)$. Ao fazer-se $n \to \infty$, desde que a_n tende a $M(a,b)$ e $x_n \to \infty$, conclui-se que $K(x) = a\pi/[\,2M\,(a,b)\,]$. Um fato importante de ser lembrado é que Jacobi [10] empregou um método similar de cálculo para a sua obtenção das integrais elípticas. Na parte 1, vimos que a transformação de Landen foi introduzida pelo seu autor num artigo publicado em 1771 e de forma mais elaborada no seu mais famoso trabalho publicado em 1775 [14]. A importância desse resultado matemático foi bem enfatizada por Mittag-Leffler [16] e sua aplicabilidade nos cálculos numéricos é bem conhecida. Apesar do sucesso alcançado por esses algorítmios, é interessante lembrar que no século XIX, durante certo período, o método de cálculo obtido através das funções Theta, com suas séries rapidamente convergentes, tornou- se muito mais utilizado do que aqueles usando a transformação de Landen.

Mais recentemente outras formas aproximativas, para integrais elípticas completas $K(k)$ e $E(k)$, têm sido introduzidas com o fito de calculá-las numericamente. A possibilidade de escrever (1) e (2) em termos da série hiper-geométrica de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; z)$, ou seja

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\, {}_2F_1\ (1/2, 1/2; 1; k^2) \qquad \text{e} \qquad E(k) = \frac{\pi}{2}\, {}_2F_1\ (-1/2, 1/2; 1; k^2)$$

com $|k| < 1$, induziu Legendre, a partir de transformações sobre a citada série, a estabelecer uma outra maneira de se escrever tais integrais. Isto possibilitou a Hastings [9] mais tarde, reescrevê-las em forma de polinômios. Cody [4] analisando a aproximação Chebyshev da forma de Hastings, enfatizou que, para uma dada função, uma forma aproximativa é mais eficiente do que outra se, para um dado número de coeficientes, o erro de aproximação for menor. Segundo ele, as formas mais eficientes de aproximações contêm, em geral, muito do comportamento analítico da função que está sendo aproximada. Seguindo na sua análise, Cody afirma que, enquanto funções racionais, razões de polinômios são simples e geralmente mais eficientes do que polinômios, nenhuma forma é particularmente eficiente em aproximar (1) e (2) por causa do comportamento logarítmico apresentado por suas formas polinomiais, quando k tende a 1. A forma enunciada por ele, $K*(k) = ln\frac{1}{\xi} + T(\xi)$, onde $T(\xi)$ é uma função racional, tende a incorporar este comportamento logarítmico e é mais eficiente do que funções racionais puras. Apesar disso, no trabalho citado, esse autor afirma que a forma mais eficiente envolvendo funções racionais é provavelmente $K*(k) = T_1(\xi) + T_2(\xi)\,.ln\,(\frac{1}{\xi})$. Na sua discussão, ele justifica, por razões de praticidade, a sua restrição em tentar a forma com $T_i(\xi)$, $i = 1,2$, sendo polinômios puros em ξ e por isso mesmo, a forma da aproximação final no seu trabalho, é aquela usada por Hastings [9] para as duas citadas integrais elípticas completas de primeira e segunda espécies (usadas por nós para elaborar os subprogramas FELLPK e FELLPE).

Outra contribuição importante para o cálculo numérico das integrais elípticas bem como das funções elípticas jacobianas foi a de R. Bulirsch [3] que, numa série de artigos usando o mesmo roteiro de cálculo de Legendre e Gauss, introduziu uma série de algorítmos simples escritos em linguagem ALGOL, os quais conseguem de maneira rápida e eficiente obter os valores dessas importantes funções e integrais. Inspirados num desses algorítmos introduzimos na seção 3 o subprograma ELLI, o qual calcula as três principais funções elípticas jacobianas *sn, cn, dn* e, por conseguinte, as nove outras restantes, bastando para isso que usemos as definições das mesmas em função das três citadas [19].

Uma outra possibilidade de obtenção dos valores das funções jacobianas é a partir de expansões em série. Vários textos clássicos [1] trazem exemplos de tais expansões; entretanto, uma grande contribuição foi dada por Schett [20] que numa série de trabalhos conseguiu elucidar um pouco mais as propriedades destas séries bem como avançar até os primeiros quinze termos principais das expansões de *sn*, *cn* e *dn*.

3. Aplicações

Ao lado das reminiscências em torno do cálculo numérico das funções e integrais elípticas, citadas nas seções anteriores, o nosso maior interesse neste artigo é introduzir três subprogramas escritos em linguagem FORTRAN e adaptados ao computador IBM3090. Os dois primeiros subprogramas (FELLPK e FELLPE) inspirados nas formas polinomiais de Hastings [2,9] calculam os valores numéricos das funções *K(m)* e *E(m)*. O terceiro (ELLI), inspirado no algorítmo nº 5 de R. Bulirsh, calcula com grande rapidez os valores numéricos das doze funções elípticas jacobianas [10]. Os resultados obtidos por nós são comparáveis àqueles encontrados em [1] e no texto *Jacobian Elliptic Function Tables* de L. M. Milne-Thomson (Dover Publ. Inc., 1950).

O mencionado algorítmo de Roland Bulirsh baseado na transformação de Landen e na média aritmético-geométrica impressiona pela sua aparente simplicidade. Através dele se consegue calcular *sn, cn,* e *dn* e, como conseqüência, todas as outras funções elípticas jacobianas. O nosso trabalho foi portanto escrever esse algorítmo em linguagem FORTRAN, através de um subprograma (ELLI) o qual pode ser facilmente manuseado por qualquer usuário.

3.1 - O subprograma FELLPK calcula os valores da integral elíptica completa de primeira espécie *K(m)*, usando a forma aproximativa de Hastings [9]. Os principais elementos são: A_i $(i = 0;4)$ e B_i $(i = 1,4)$ são os coeficientes da forma polinomial de Hastings; *AM* é o parâmetro da integral elíptica; *AM1* é o parâmetro complementar [1] e *EK* é a forma escrita por Hastings para a integral elíptica completa de primeira espécie (vide fig. 1A)

```
SUBROUTINE FELLPK (AM, EK)
A0 = 1.38629436112
A1 = .09666344259
A2 = .03590092383
A3 = .03742563713
A4 = .01451196212
B0 = .5
```

```
B1 =.12498593597
B2 =.06880248576
B3 =.03328355346
B4 =.00441787012
AM1 = 1. - AM
BLOG = 1. / AM1
EK = (A0 + A1 * AM1 + A2 * ( AM1 ** 2) + A3 * (AM1 ** 3) + A4 * (AM1 ** 4) +
(B0 + B1 * AM1 + B2 * (AM1 **2) + B3 * (AM1 ** 3) + B4* (AM1 ** 4))
* ALOG (BLOG)
RETURN
END
```

3.2 - O Subprograma FELLPE calcula os valores da integral elíptica completa de segunda espécie, *E (m)*, usando a mesma aproximação de (3.1). Neste caso A_i $(i = 1{,}4)$ e B_i $(i = 1{,}4)$ são os coeficientes da forma polinomial de Hastings para *E(m); AM* e *AM1* já foram definidos antes e *EE* é a forma escrita por Hastings para integral desejada (vide fig. 1B)

```
SUBROUTINE FELLPE (AM, EE)
A1 =. 44325141463
A2 =. 06260601220
A3 =. 04757383546
A4 =. 01736506451
B1 =. 24998368310
B2 =. 09200180037
B3 =. 04069697526
B4 =. 00526449639
AM1 = 1. - AM
BLOG = 1. / AM1
EE = (1. + A1 * AM1 + A2 * (AM1 ** 2) + A3 * (AM1 ** 3) + A4 * (AM1 ** 4)) +
(B1 * AM1 + B2 * (AM1 ** 2) + B3 * (AM1 ** 3) + B4 * (AM1 ** 4)) * ALOG (BLOG)
RETURN
END
```

3.3 - O subprograma ELLI calcula os valores das funções jacobianas *sn, cn e dn* a partir de um algorítmo introduzido por Bulirsch e tem como principais parâmetros os seguintes: *AMI, ANI, C, DD* representam as funções contidas no algorítmo orignal; *N* representa o número de iterações; *L* é o limite da primeira recorrência; *D* é o parâmetro ligado à precisão do método; *AM1* é o parâmetro complementar das funções elípticas; *U* é o argumento da função elíptica; *sn, cn, dn* são as funções elípticas jacobianas; *IFAIL* é o parâmetro que testa a correção do programa; *EPS* é o erro relativo.

Com este subprograma torna-se bastante simples calcular todas as doze funções elípticas jacobianas visto que a partir da notação de Glaisher [8] é possível calcular as nove restantes em termos das três calculadas explicitamente por ELLI (vide figs. 2 a 6).

```
SUBROUTINE ELLI (AMI, ANI, C, DD, N, L, D, AM1, U, SN, CN, DN, IFAIL)
DIMENSION AM1 (0:200), ANI (0:200), CC (0:200), DD (0:200)
IFAIL = 0
B = - . 5 * D
EPS = 10. ** B
AMI (0) = 1.
ANI (0)= SQRT (AM1)
DO 100 J = 1, N
I = J-1
AMI (I + 1) = .5 * (AMI (I) * ANI (I)
ANI (I + 1) = SQRT (AMI (I) * ANI (I)
IF (ABS(1.- (ANI (I) / AMI (I))). LE. EPS) GO TO 101
100 CONTINUE
IFAIL = 1
101 L = I
C (L) = AMI (L) * COS (U * AMI (L)) / SIN (U * AMI (L))
DD (L) = 1.
DO 200 K1 = 1, N
K = L-K1
C (K) = DD (K + 1) * C (K + 1)
DD (K) = ((C (K + 1) ** 2) * (AMI (K + 1) ** (-1)) + ANI (K)) / ((C (K + 1) ** 2)*
(AMI (K + 1) ** (-1)) + AMI (K))
IF (K. LT. 0) GO TO 201
200 CONTINUE
IFAIL = 2
P1 = 1.0
201 F1 = SIN (U * AMI (L))
F2 = SQRT (1. + C (0) * C (0)
F3 = SIGN (P1, F1)
SN = F3/F2
CN = C (0) * SN
DN = DD (0)
RETURN
END
```

As figuras 2 a 5, apresentam as doze funções elípticas jacobianas quando fazemos o parâmetro $m = 0.5$. As figuras 6A a 6C mostram as funções *sn (u|m)* *cn (u|m)* e *dn(u|m)* para três valores $m = 0.0, 0.5, 1.0$. Em concordância com a teoria dessas funções, vemos que para $m = 0$, temos $sn(u|0) = sen\ u$, $cn(u|0) = cos\ u$ e $dn(u|0) = 1$, ou seja, as duas primeiras funções se degeneram nas conhecidas funções circulares. Para $m = 1$ temos $sn(u|1) = tanh\ u$, $cn(u|1) = sech\ u$ e $dn(u|1) = sech\ u$, isto é, elas se degeneram nas conhecidas funções hiperbólicas.

Bibliografia

1. Abramowitz, M. and I. A. Stegun (editor), *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Mathematical Tables,* Nat. Bur. Standards, Appl. Math. Ser. n. 55, Superintendent of Documents, U. S. Government Print Office, Washington. D. C. (1966).

2. Almkvist, E, and B. Berndt, *Gauss, Landen, Ramanujan, the Arithmetic-Geometric Mean, Ellipses, II, and the Ladies Diary,* in Amer. Math. Monthly, Aug-Sept (1988)585-608.
3. Bulirsch, R., in Num. Math. 7 (1965) 78-90; 7 (1965) 353-4., 13 (1969) 266-284.; 13 (1969) 305-15.
4. Cody, W. J., *Chebyshev Approximations for the Complete Elliptic Integrals K and E,* in J. A. C. Mach. (1964) 105-112.
5. Euler, L. Novi Comm. Acad. Sc. Petro. vol. X (1766), conforme citado em [11]
6. Gauss, K. F., Determinatio *Attractionis quam in Punctum quodvis Positionis datae exerceret Planeta si ejus massa per totam orbitam ratione temporis quo singulae partes discribuntur uniformiter esset dispertita,* in Comm. secc. reg. Scient. Gott, vol. 4 (1818), p. 21-48; Ges. Werke, vol. 3, p. 352, conformecitado em. [16]
7. Gauss, K. F., Nachlass. *Arithmetisch Geometrisches Mittel,* Werke, Bd. 3, Königlichen Gesell. wiss, Göttingen (1876) pp. 361-403, conforme citado em [2]
8. Glaisher, J. W. L., in Messenger of Mathematics, XI (1882), pp. 86, conforme citado em *A Course of Modern Analysis,* de E. T. Whitaker e G. N. Watson. Camb. Univ. Press, 4 ed. (1978).
9. Hastings Jr., C., in *Approximations for Digital Computers.* Princeton, N. J., (1955).
10. Jacobi, C. G. J., in *Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* (1829), pp.137-172, conforme citado em [16]
11. King, L. V., *On the Direct Numerical Calculation of Elliptie Functions and Integrals.* Cambridge Univ. Press. UK (1924)
12. Lagrange, J. L., *Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré,* in Mem. de l'Acad. Roy. Sc. de Turin, t. 2 (1784-5); Oeuvres (Gauthier-Villars, Paris, (1868), pp. 253-312, conforme citado em [2]
13. Landau, L. D., Physick Z. Sowjetunion 11 (1937) 26; Ginzburg, V. L., Physick Z. Sowjetunion 5 (1963) 649
14. Landen, J. *A disquisition concerning certain fluents, which are assignable by the arcs of the conic section, wherein are investigated some new and useful theorems for computing such fluents,* in Phil. Trans. Royal Soc. London, 61 (1771) p.298, 309; J. Landen, *On the investigation of a general theorem for finding the length of any arc of any conic hyperbola, by means of two elliptic arcs, with some other new and useful theorems deduced therefrom,* in Phil. Trans. Roy. Soc. London, 65 (1775) p. 283-289, conforme citado em [2]
15. Legendre, A. M., *Mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse et second mémoire, etc.,* Mem. de l'Acad. des Sciences de Paris, ann. 1786 (Paris, 1788), pp. 616-643 and 644-683; Traité des Fonctions Elliptiques, Paris, 1825, t.I, pp. 79 et seq., conforme citado em [2]
16. Mittag-Leffler, G., *An Introduction to the Theory of Elliptic Functions,* in Ann. of Math. 24 (1923), pp. 271-351.
17. Ribeiro Filho, A., *Contributions to the Theory of Phase Transitions and Light Scattering,* Ph.D. Thesis. Univ. of Essex. UK. (1983) 225 pp.
18. Ribeiro Filho, A., D. R. Tilley and B. Zeks, *Analogy between Landau Theory of Phase Transitions and Lagrangian Mechanics,* Phys. Lett. 100A, 5 (1984) 247.
19. Ribeiro Filho, A. e D. S. de Vasconcelos, *Introdução ao Cálculo das Integrais Elípticas Completas e Funções Elípticas Jacobianas,* Monografia 01/92, IFUFBA, 97pp. (1992).
20. Schett, *A. Properties of the Taylor Series Expansion Coefficients of the Jacobian Elliptic Functions,* in Math. of Comput, 30, 133 (1976), pp. 143-147.

Instituto de Física da UFBA
Rua Caetano Moura, 123,
Campus da Federação
40.210-340 Salvador - BA.