Matemática Universitária Nº 15, dezembro de 1993, 33-47

O Elipsóide de Monge

Jorge Sotomayor

Esta história se inicia numa escaldante noite de setembro de 1970, na cidade do Rio de Janeiro. Vítima da insônia, decidi bisbilhotar os livros que minha esposa havia primorosamente arrumado na estante. Tinha ela trazido recentemente uma porção de livros seus e lá os havia colocado.

Minha cândida e descontraída atitude contrastava com uma estranha tensão que dimanava da estante. Intrigado, e entregue à curiosidade, me senti impelido a investigar a sua causa...

Espremido num cantinho, ataviado de elegante capa verde, pulsava inquieto o livro de Struik *"Lecciones de Geometria Diferencial Clássica"*.

Minha natural atração pela Geometria e pela Língua de Cervantes me levou, descompromissadamente, a abri-lo.

Pasmem! Fí-lo, justamente na página donde a seguinte figura do elipsóide tri-axial surgiu, como espreitando-me.

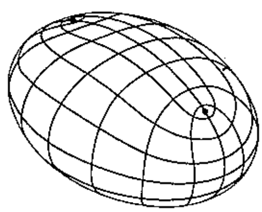

Fig. 1: Elipsóide de eixos diferentes, suas linhas de curvatura e pontos umbilicos.

Subitamente, assaltou-me a sensação de estar caindo numa armadilha.

Havia ele esperado quase um século e meio desde a data em que o ilustre matemático francês Gaspard Monge o concebeu, localizando-lhe seus 4 pontos umbílicos e calculando-lhe as linhas de curvatura principal. Nesse lapso, percorreu milhares de quilômetros, transpôs montanhas e cruzou largos mares, impresso em livros, restrito a uma limitada e asfixiante existência bidimensional, para que nessa noite tropical nos defrontássemos.

Em 1961 eu já tinha lido partes da edição original inglesa do Struik, mas não me havia impressionado essa figura. Nessa época eu também era leitor assiduo do livro de Hilbert-Cohn Vossen *"Geometry and the Imagination"*, do qual (segundo anota Struik), ela foi extraída. Como poderia te-la ignorado?

Havia eu estudado com grande atenção outros dois livros de nível comparável ao do Struik: o de O'Neil *"Elementary Differential Geometry"*, adotado num curso que lecionei em Berkeley, na minha primeira visita aos Estados Unidos em 1967, e o de Willmore, *"Introduction to Differential Geometry"*, texto que estudei no meu curso de graduação em 1961. Lamentavelmente, estes austeros modelos de exposição geométrica não contêm nem sombra da fascinante figura.

Foi como um amor à primeira vista: a simetria e beleza de suas curvas me conquistaram de imediato. Contemplamo-nos, medindo-nos, por vários minutos.

Li rapidamente o texto adjacente, assim como outras seções pertinentes.

Mas o leitor do Struik dessa noite singular, depois de haver percorrido caminhos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, evoluindo para os Sistemas Dinâmicos e passando pela Estabilidade Estrutural e a Teoria das Bifurcações, não era mais o mesmo de 1961.

Em poucas horas de leitura ativa realizei uma viagem matemática que, cronologicamente, abrangia quase dois séculos.

Lá estavam os resultados clássicos básicos concernentes à *curvatura normal* e a sua expressão em função das *curvaturas e direções principais,* sintetizada pela *Fórmula de Euler.*

As linhas de curvatura principal são curvas na superfície ao longo de cujas direções tangentes (direções principais) esta se curva extremalmente no espaço. A medida destas curvaturas extremais denominam-se curvaturas principais. Seus valores são dados pela curvatura normal (isto é pela Segunda Forma Fundamental da superfície), avaliada nas direções principais.

Foi Euler (*Recherches sur la courbure des surfaces,* Mémoires de l'Academie de Sciences de Berlin, 16, 1760) o primeiro a estudar estes objetos matemáticos, inaugurando assim a utilização dos métodos do Cálculo Infinitesimal para o estudo da geometria das superfícies.

Deriva desse trabalho que as direções principais são, em geral, determinadas por duas retas mutuamente ortogonais. Contêm ainda este artigo a famosa Fórmula de Euler, que expressa a curvatura normal numa direção qualquer em termos das curvaturas principais e do ângulo da referida direção com as principais. De fato, em termos mais modernos, esta fórmula equivale a diagonalização da Segunda Forma Fundamental.

Nos pontos umbílicos as duas curvaturas principais são iguais e as direções principais definem, fora destes pontos, dois campos ou distribuições, de linhas tangentes à superfície, chamados de *campos de linhas principais*, um deles correspondente à curvatura máxima e o outro, à mínima. Os pontos umbílicos são considerados como singularidades destes campos de linhas.

Não há registro bibliográfico de que Euler tivesse visualizado a partição da superfície em pontos umbílicos e na rede de curvas principais, que são formadas pelas curvas integrais dos campos de direções principais.

Nas superfícies de revolução, esta rede é gerada pelos paralelos e os meridianos.

Foi Monge (*Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide,* Journ. de l'Ecole Polytech., II cah., 1796) o primeiro a perceber a importância da estrutura definida numa superfície pelos pontos umbílicos e a rede de curvas principais, chamada aqui de *configuração principal* da superfície. Deve-se a ele a integração global das equações diferenciais que representam os campos de linhas principais no caso do elipsóide de três eixos diferentes, ilustrado na Fig. 1.

Este resultado constitui o primeiro exemplo não trivial de configuração principal. Ele coloca Monge como um indiscutível precursor da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais, quase um século mais tarde fundada e sistematizada por Poincaré e Liapunov, e aprimorada por Andronov-Pontrjagin, Peixoto...

A Fig. 1 representa a configuração principal no elipsóide de três eixos diferentes; a Fig. 3 representa as configurações principais numa esfera e no elipsóide de revolução.

Monge também vislumbrou aplicações das linhas de curvatura na Arquitetura. É muito interessante a argumentação que, com bases estéticas e práticas, apresenta na sua proposta para a construção da abóboda elipsoidal para o prédio da Assembléia Legislativa. Esta proposta utilizava as linhas de curvatura como guia para colocação das pedras, e os umbílicos como pontos de suporte das luminárias.

Ao que me consta o projeto nunca foi executado pelo governo da Revolução Francesa, nem por nenhum outro.

Mas voltemos à noite do elipsóide, do início desta história.

Com o Struik relembrei o Teorema de Dupin. Ele estabelece que se uma superfície pertence a uma família de superfícies triplamente ortogonais, suas linhas de curvatura são obtidas pela interseção desta com as superfícies das outras famílias ortogonais a ela.

Estava extasiado e gratificado frente ao notável salto qualitativo triplo que a leitura havia-me proporcionado. Euler: definições básicas, Monge: o exemplo chave, Dupin: a teoria que unifica numerosos casos.

No instante em que admirava a gravura do Struik que ilustra o Teorema de Dupin com a foto de uma maquete de gesso, percebi que o elipsóide de Monge e o Struik pulsavam dessincronizadamente. O primeiro acelerava em relação ao

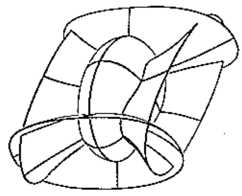

Fig. 2. Teorema de Dupin; Famílias de superfícies quádricas homofocais: elipsóides e hiperbolóides de uma e duas folhas.

segundo, debatendo-se irritado, como que decifrado e flagrado, devassado em sua intimidade.

Subitamente o elipsóide se ergueu, destacando-se do papel. Como que espreguiçando-se, recobrou sua maravilhosa plenitude espacial.

Girou, virou-se, evidenciando suas simetrias, mostrando suas belas e fechadas curvas principais e revelando seus 4 pontos umbílicos, cada um dos quais perfurados por duas impiedosas separatrizes que os conectavam aos pares.

Paulatinamente, começou a mudar seu eixo principal menor, aumentando- o, mantendo fixo os outros dois. Entretanto, este caprichoso exercício de exibicionismo não alterava em nada a topologia da sua configuração de curvas principais, pontos umbílicos e separatrizes; apenas os pontos umbílicos, aos pares, se aproximavam, lenta e inexoravelmente, de seus pólos. No momento exato em que o eixo menor coincidiu com o intermediário, os pontos umbílicos colidiram e as separatrizes desapareceram. Foi fugaz o instante em que ele representou um elipsóide de revolução. Depois, à medida em que o eixo que havia sido menor se tornava intermediário, os pontos umbílicos se separaram novamente para deslocar-se no plano ortogonal, no qual também se tinham localizado as novas separatrizes.

Em seguida recuou, na seqüência de deformações, até recuperar a forma de elipsóide de revolução. Nesta simétrica posição experimentou outras deformações, variando o valor do eixo comum, e o do eixo maior.

Nada, entretanto, acontecia com a topologia de sua configuração principal

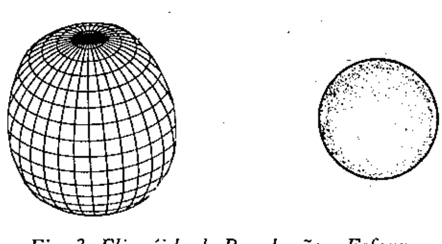

Fig. 3: Elipsóide de Revolução e Esfera

até que os três eixos coincidiram. Foi nesse instante que todas as linhas de curvatura se esfumaram para dar lugar a uma redonda bola totalmente formada de pontos umbílicos.

Ensaiou repetidamente estas e outras deformações, permutando os eixos sujeitos à variação. Parecia um espectáculo com poucas novidades, que já corria o risco de tornar-se monótono.

Inesperadamente, começou a dilatar nervosamente o seu eixo maior. Ocupando um grande espaço diagonal em minha sala de estar, ameaçava quebrar a janela e liberar-se da humilhante condição de capacidade.

Eu, limitado a mero observador, sem nenhum controle da situação, já estava apreensivo.

Craak!... Finalmente a janela estourou. Este preciso momento coincidiu com o do barulho que o Struik, escorergando de minha mão, fez ao estatelar-se no chão.

Estava eu recobrando a consciência, depois de um distraido cochilo.

Duas referências do Struik, uma ao famoso clássico Darboux e outra a um (para mim) desconhecido A. Gullstrand, ambas relativas aos padrões possíveis das linhas de curvatura principal na vizinhança de um ponto umbílico, atraíram minha atenção; anotei-as.

Estava satisfeito. A partir do Teorema de Dupin, o elipsóide com sua dança onírica me havia ajudado a demonstrar o seguinte:

No espaço de superfícies quádricas compactas, as únicas principalmente estruturalmente estáveis são os elipsóides de eixos diferentes, estas formam um aberto denso; as estáveis de primeira ordem (isto é por perturbações pequenas dentro das não estáveis) são os elipsóides de revolução não esféricos, estes formam uma hipersuperfície.

Era possível formular resultado análogo também para as quádricas não compactas.

Como seria o caso geral das superfícies diferenciáveis? Indaguei comigo mesmo. Nesse momento invadiu-me o cansaço. Fui repousar com o pensamento no possível quarto estágio do salto qualitativo que havia testemunhado.

Não é raro acometerem-me pesadelos em ocasiões em que, com a mente ainda um pouco excitada por algum problema, pretendo descansar, já entrada a alta noite.

Sonhei essa noite com superfícies de formas e gêneros diversos, que exibiam variados padrões de pontos umbílicos. Um deles, nitidamente, era como o do elipsóide. Porém quando queria captar o aspecto das linhas de curvatura próximas aos outros para registrá-lo em minhas anotações, vinha um nevoeiro denso que não me permitia distingui-lo.

Fatigado, abandonava os umbílicos para ir dormir. Sonhava então que focalizava os ciclos. Acompanhava o percurso das linhas que pareciam retornar, acumulando-se em linhas de curvatura fechadas, mas, quando parecia que poderia fazer uma observação decisiva para anotá-la, voltava o incômodo nevoeiro a cobrir tudo.

Fatigado, abandonava os ciclos para ir dormir. Sonhava então que estudava a configurações de linhas de curvatura próximas dos pontos umbílicos...

Fatigado, ia dormir...

Os ruídos e a luz matinaes, me resgataram desse nada repousante inferno cíclico.

De manhã, à primeira hora, retirei para consultar o Darboux (*Leçons sur la Theorie des Surfaces, IV*, Note 7: Sur la forme des lignes de courbure dans la voisinage d'un ombilic, 1896) e o Gullstrand (*Zur Kentiss der Kreispunte*, Acta Matematica, 1904).

Interpretei que o primeiro fazia uma descrição dos casos de pontos umbílicos genéricos, caracterizados por condições algébricas nas terceiras derivadas da superfície, os quais também resultavam ter suas configurações principais locais estáveis por pequenas perturbações destes coeficientes.

Como era de praxe nos trabalhos de 1886, tratava-se de objetos analíticos; superfícies, no caso.

Como era costumeiro para mim nestas circunstâncias, não esperava entender, nas primeiras leituras, os detalhes da demonstração.

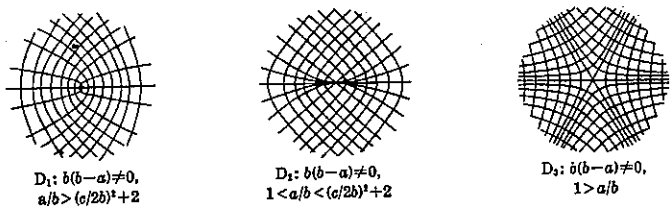

Fig. 4: Pontos Umbílicos de Darboux

$$z = (k/2)(x^2+y^2) + (a/6)x^3 + (b/2)xy^2 + (c/6)y^3 + O[(x^2+y^2)^2]$$

Através das figuras e fórmulas, já que não podia ler o texto em alemão, achei por bem entender do Gullstrand que, depois de revisitar a contribução de Darboux, ele propunha um começo de descrição dos casos degenerados onde o estudo do primeiro não se aplicava.

Isto parecia ser uma espécie de protocolo para iniciar um estudo das bifurcações dos pontos umbílicos. Fiquei eufórico ao vislumbrar a conexão com o assunto que mais me interessava nesse momento.

Essa noite voltou uma variante do sonho da anterior: a bruma tinha-se dissipado e os entre-sonhos encaixantes se haviam fundido com o sonho principal numa unidade onírica simples.

Despertei de madrugada. Escrevi, quase sem hesitar.

O Problema Fundamental neste assunto consiste em provar os três pontos seguintes:
1. - As condições necessárias e suficientes para que uma superfície compacta seja principalmente estruturalmente estável, i.é. no que diz respeito a suas duas famílias de linhas de curvatura, por deformações C^3 pequenas destas, são as seguintes:
a. - Os pontos umbílicos devem ser todos como os de Darboux.
b. - As linhas de curvatura periódicas devem ser todas hiperbólicas, i.é. ter a derivada da transformação de retorno diferente de 1.
c. - Não deve admitir conexões ou autoconexões de separatrizes umbílicas.
d. - Os conjuntos limites de todas as linhas de curvatura não periódicas devem ser pontos umbílicos ou linhas periódicas.
2. - As condições acima definem um conjunto aberto no espaço das superfícies, munido da topologia C^3.
3. - Toda superfície pode ser arbitrariamente aproximada por uma que satisfaz as condições acima na topologia C^3.

Trabalhei ansiosamente tentando organizar um esquema de demonstração. A parte 2, da abertura, assim como a suficiência das condições de *a* a *d*, pareciam factíveis.

Esbarrei nos aspectos globais das condições necessárias e, sobretudo com a genericidade das condições *b, c,* e *d.* Estava lançando mão de toda minha experiência com a metodologia estabelecida por Peixoto, no seu famoso estudo da Estabilidade Estrutural de campos de vetores em variedades bidimensionais.

Percebi que na minha formulação era óbvia a influência do seu trabalho.

Constatei, com estupor, que ignorava qualquer exemplo de superfície compacta do tipo que havia definido.

Como poderia provar que estas eram densas?

Intrigado, me arrumei e saí para ir direto à procura de exemplos na biblioteca.

Esta tarefa me ocupou durante vários dias.

Oh frustração! Não achei um único ciclo principal isolado, menos ainda hiperbólico. Nada encontrei sobre superfícies cujas linhas de curvatura fossem recorrentes, i.é. que violassem a condição estipulada em *d*, como o fazem os campos irracionais no Toro.

A problemática fundada por Poincaré, quase 100 anos antes, estudada pela Teoria Qualitativa das Equações Diferencias e um setor dos Sistemas Dinâmicos, não havia permeado este aspecto da Geometria Clássica das Superfícies.

Invadiu-me um sentimento de profunda solidão.

Comecei a fazer cálculos. Discuti o meu projeto com vários colegas, especialistas em Sistemas Dinâmicos e Geometria. Peixoto estava fora do Rio esse semestre.

Senti que encaravam meu projeto com interesse e simpatia. Ninguém, entretanto, arriscou um palpite esclarecedor. Quis ver nesta atitude uma ponta de salutar ceticismo.

Blaine Lawson, de visita ao nosso Instituto , disse-me profeticamente

"Se funciona o que você propõe, estará abrindo uma nova área."

Meus cálculos me conduziram a uma fórmula para a derivada da transformação de retorno para uma linha de curvatura periódica - também dita Transformação de Poincaré - em termos da Curvatura Média e dos Símbolos de Christoffel. Tinha a esperança de calcular um exemplo no qual esta derivada fosse menor do que 1, e assim demonstrar que existem linhas de curvatura periódicas isoladas, já que as linhas vizinhas se aproximariam da referida curva fechada. Ver Fig. 5.

Nesse momento não conseguia liberar-me das coordenadas locais envolvidas nos Símbolos de Christoffel, apesar de ser óbvio o caráter intrínseco da derivada da transformação em questão.

Acumulei uma coleção enorme de dados bibliográficos, a maior parte em alemão. Entre eles, os concernentes à intrigante Conjectura de Caratheodory:

Toda superfície convexa e compacta tem pelo menos dois pontos umbílicos.

Para ela não achei registro escrito de sua proposição pelo autor. Presume-se que tenha sido feita oralmente.

Intrigou-me tomar conhecimento que Gullstrand, o autor para mim inicialmente desconhecido, era nada menos que o Prêmio Nobel de Medicina de 1900, laureado por sua contribuição à oftalmologia. O trabalho que havia consultado era a parte matemática daquele que havia sido objeto do prêmio, e ele havia achado conveniente publicá-lo num jornal matemático.

Embora me parecesse, pelos fragmentos de que dispunha, que estava no rumo certo, não chegava a ter um resultado redondo em relação ao projeto que me havia proposto.

Os três pontos do meu projeto se impunham no meu espírito com a força de axiomas, mas não vislumbrava uma forma de produzir uma demonstração matematicamente convincente.

Entretanto, eu continuava pelejando.

Veio o Colóquio Internacional de Sistemas Dinâmicos de Salvador, em julho de 1971. Falei com Thom do problema.

Foi um interessante diálogo de surdos. Para ele os umbílicos eram catástrofes, morando no conjunto focal. Quando eu fazia uma pergunta sobre as separatrizes umbílicas de Darboux, ele me falava das cumieiras ("ridges") dos umbílicos hiperbólicos e elípticos das superfícies genéricas. Eu mencionava a rede de linhas de curvatura na superfície, ele respondia com o conjunto focal no espaço ambiente.

Nesse Colóquio se firmou meu interesse pelas singularidades, motivado pelos desenvolvimentos que Mather, aí presente, havia feito, e pela promessa de aplicações fantásticas que Zeeman comunicava com charme ímpar.

De volta ao Rio, esse assunto se juntou aos outros que constituiam meus interesses aparentemente divergentes. Iniciei em 1972 um seminário sobre as singularidades.

Entretanto, as linhas de curvatura e os pontos umbílicos continuavam latentes em meu pensamento.

Antes de ir para Trieste e IHES em julho desse ano, Carlos Gutiérrez, um estudante de doutorado, me procurou para que lhe propusesse um problema de tese. Tirei de minha pasta o Darboux, e sugeri:

"Faça uma prova moderna deste teorema, de modo que os mortais possam entendê-la. Prove que as superfícies propostas em *a,..,d,* são genéricas. Atenção com a condição *d.*"

Levei comigo boa parte do material pertinente nessa viagem, em caso de ter que corresponder-me com Carlos. Conheci matemáticos suecos em Trieste. Com todos falava de Gullstrand. Perguntava pelo Jornal Médico onde ele havia publicado seu trabalho oftalmológico. Mais de um ofereceu mandar-me uma cópia. Tinha muita curiosidade. Felizmente o artigo nunca chegou a mim. O que teria eu feito com um artigo em sueco sobre oftalmologia?

Em outubro ou novembro, conheci fugazmente a I. Porteous no IHES. Ele já havia penetrado na relação entre os umbílicos de Darboux e os de Thom no seu artigo de 1971 (*The Normal Singularities of a Submanifold,* J. Differential Geom., 5). Entretanto, pareceu-me haver ele aceito as figuras do Darboux, sem objetar em nada as suas demonstrações. Para mim, com a experiência em equações diferenciais que tinha, ou talvez por causa disso, me pareciam estas esconder ainda detalhes analíticos indecifráveis. Dai minha sugestão do problema que havia proposto ao Carlos.

Recebi dias depois uma carta dele. Havia passado a considerar uma versão geral de campos de linhas quaisquer em variedades bidimensionais (superfícies abstratas). Tinha uma versão coerente de uma Teoria Genéica nesse contexto abstrato. Entretanto, para o caso especial dos campos de linhas principais em superfícies do espaço, o problema por mim proposto, a sua teoria geral não implicava nada de esclarecedor para a genericidade das condições *a ...d,* acima.

Estimulei-o a continuar no caminho que se havia traçado, que também me parecia interessante. Nele convergiu mais tarde para redigir sua Tese de Doutoramento.

Ao reencontrar-nos em janeiro de 1973, falamos rapidamente das dificuldades que havia encontrado para atacar meu problema e passamos a considerar o seu enfoque para um estudo abstrato geral.

Não voltamos a falar de Darboux nem de linhas de curvatura durante anos.

No segundo semestre de 1975 visitei pela primeira vez Dijon. Fui passar vários dias em Paris para assistir ao Seminário Bourbaki. Por isso perdi minha reserva no "Le Montchapet" e fui levado a hospedar-me no pequeno Hotel Monge, localizado na rua do mesmo nome, no coração do fascinante bairro "Dijon Historique". Lá fiquei aproximadamente durante uma semana.

Meu amigo R. Roussarie, da Universidade de Dijon, levou-me a conhecer as vinhas de "La Côte d'Or". Compreendi, nessa e posteriores passagens por Dijon, que a visita às famosas vinhas constituia uma rotina tão obrigatória como a das Ruinas Incaicas para os peruanos e a da Grande Muralha para os chineses.

Esticamos a visita até a histórica Beaune. Lá, depois de percorrer fascinantes prédios medievais, me defrontei com uma impressionante estátua de Monge, que foi originário dessa cidade. Voltou à minha mente a figura do elipsóide e a sua dança onírica, na ida noite de 1970, narrada anteriormente. Comprei alguns vinhos da Borgonha e voltamos a Dijon.

Estava excitado com o passeio, intrigado com meu encontro com a estátua e a estranha coincidência com o nome do hotel. Havia aflorado a lembrança do problema latente. Desprovido do material bibliográfico, me limitei a degustar um dos vinhos e fui dormir.

Nessa noite tive o mais fantástico dos sonhos.

Monge apareceu e me perguntou em tom de censura:

"O que você fez com meu elipsóide?... o que está esperando, homem?"

Inicialmente, surpreso e tímido, me retraí preventivamente.

Não sabia como tratá-lo, se de "você", de "o senhor" ou de "vosa senhoria". Reagindo, como desabafando, repliquei:

"Ele é muito bonito, mas o que é que você me diz das outras superfícies não quadráticas, as cúbicas, por exemplo; conhece o caso genérico e a caracterização da estabilidade estrutural nessa classe ou mesmo para as de classe C^∞? E as linhas de curvatura recorrentes, por ventura existem, conhece exemplos?

Foi então ele quem se retraiu. O multifacético sustentáculo científico da Escola de Engenharia Militar de Mézières, inventor da Geometria Descritiva, o primeiro geomêtra de grande vulto a dominar a Análise, corou perplexo.

Como representante europeu da Matemática do século XVIII, não poderia ele entender meu linguajar e problemática, típicos de um anônimo reduto tropical, nos anos 60, do século XX. Além do mais, o ritmo com que havia formulado minhas perguntas tinha sido vertiginoso.

Me comoveu ver confuso, mesmo que por fugaz instante, esse gigante da Matemática de outrora (e de sempre).

Refazendo-se, célere, ele replicou: "Do que é que você está falando (Qu'est-ce que tu veux dire)?"

Foi assim que eu, um obscuro desconhecido, expliquei ao grande Monge toda a problemática da Estabilidade Estrutural, das recorrências e do terrível "Closing Lemma", que o ultrapassavam em quase 150 anos. Me vi tirando exemplos ilustrativos adaptados de seus próprios trabalhos. Ele entendia tudo com uma rapidez incrível; como uma verdadeira esponja matemática, absorvia todas as (para ele) novidades.

Monge não era de fugir dos desafios, como já o tinha demonstrado na batalha do Egito[1]. "Pode deixar comigo", falou, e se instalou a trabalhar no meu problema, sentado na escrivaninha. Preenchia páginas e mais páginas de cálculos e belíssimos desenhos (usando nestes últimos a sua técnica do "rebatimento", familiar para os iniciados em Geometria Descritiva). Enquanto isso, eu aproveitava o tempo para preparar o seminário que deveria dar no dia seguinte. Passaram-se horas.

Finalmente, ele me disse triunfalmente: "Resolvi o seu problema, veja só..."

Nesse instante, quando me mostrava a primeira folha de suas anotações, bateu o cruel despertador que eu mesmo havia colocado na véspera para levantar-me cedo e preparar o já citado seminário.

Tentei, sem sucesso, dormir novamente para conhecer o desfecho. Repeti com ansiedade o ritual de beber um copo de vinho... outro, nada!

A frustração e a solidão me invadiram novamente. E também o remorso.

Em julho de 1976, reencontrei meu amigo Kupka na Terceira ELAM, no Rio de Janeiro. Ele me traduziu porções substanciais do Gullstrand e me ajudou a interpretar seus resultados. Ficou claro para mim que o interesse principal dele era o conjunto focal, as cumieiras; as linhas de curvatura eram um instrumento. Fiquei surpreso ao saber que já tinha no seu texto a descrição das figuras dos umbílicos hiperbólicos e elípticos, no conjunto focal.

Entretanto, não esclarecia em nada os fundamentos matemáticos para justificar as figuras de Darboux, muito menos as outras mais degeneradas que considerava no seu trabalho. Estava, nas partes que tinham a ver com equações diferenciais, unicidade das separatrizes umbílicas, por exemplo, longe dos padrões

1 Consultar os aspectos biográficos relativos a Monge em Bell (Men of Mathematics), Taton (L'Ouvre Scientifique de G. Monge) e Struik (História Concisa da Matemática).

de rigor da Análise atual.

Continuei mantendo meu interesse no assunto. Coloquei o material sobre o problema num saco plástico, carregando-o de cima para baixo, deixando-o em casa longas temporadas, quando a pasta estava pesada demais. Retomando-o para carregá-lo meses depois.

Esse estranho rito me dava a sensação de possuí-lo, de estar trabalhando no problema, secretamente.

De fato, de vez em quando, me limitava a um exercício contemplativo, sem atar nem desatar as dificuldades fundamentais.

Foi em 1980 que, não sei porque motivo, veio uma determinação da Administração: os pesquisadores deviam organizar-se em equipes, como no futebol, e apresentar projetos de cooperação. Esta era uma novidade para nós, acostumados a receber a solicitação do preenchimento de fichas cadastrais cada vez que havia alguma mudança nos quadros de administradores. Não lembro, entretanto, de ter recebido depois a cobrança do resultado destes projetos conjuntos.

Combinamos com Carlos de juntarmos forças e trabalharmos em colaboração no problema. Já havíamos desenvolvido em parceria um trabalho anterior, estendendo o Teorema de Peixoto ao caso de variedades com singularidades.

O progresso foi surpreendentemente rápido, levando em conta que, simultaneamente, cada um de nós trabalhava também em projetos individuais. Os três havíamos amadurecido, nós dois e problema.

Desenterrei minha fórmula sobre a primeira derivada, T', da transformação T de retorno para uma linha de curvatura periódica α.

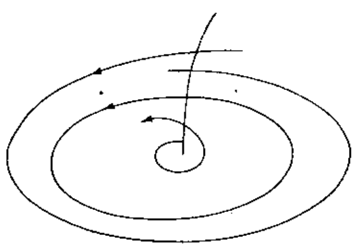

Fig. 5. Linha de curvatura periódica hiperbólica, com derivada da sua transformação de retorno menor do que 1.

Obtivemos, em termos da curvatura média, H, e Gaussiana, K, a enxutíssima fórmula seguinte:

$$\text{Log}\,(T') = \pm \int_{\alpha} \frac{dH}{\sqrt{H^2 - K}}$$

Equivalentemente, em termos das curvaturas principais $k_2 > k_1$ já que $H = (1/2)(k_2 + k_1)$ e $K = k_2 k_1$, temos:

$$\text{Log}\,(T') = \pm \int_\alpha \frac{dk_2}{k_2 - k_1}$$

Surgiu desta fórmula um método para tornar hiperbólicos os ciclos principais.

Usando um método muito próximo ao do blowing-up convencional demos uma prova que justificava completamente as figuras de Darboux para superfícies de classe C^4.

Já havia aqui uma novidade com relação ao caso analítico, cuja prova Darbouxiana não entendíamos totalmente.

Sobre as recorrências Carlos diagnosticou: A aproximação C^2 que as destroi é possível, a passagem para C^3 é muito difícil.

Achamos um exemplo de recorrências num toro mergulhado, bem distante, porém, do toro canônico.

As peças pareciam ter encaixado. Tínhamos uma versão sustentável.

Chegou o Colóquio Internacional de Sistemas Dinâmicos, inaugurando o novo prédio do IMPA em 1981.

Era hora de comunicar amplamente nossos resultados. Em sorteio, fui o escolhido pelos deuses para ser o expositor.

Comecei a preparar-me, revisando todo o esquema.

Havia dúvidas. Na véspera da palestra fiquei até tarde com Carlos discutindo como seria a apresentação. Foi então que tomamos consciência de que não tínhamos nenhum exemplo de recorrência fora daquele do toro. Mesmo este era muito técnico e eu não achava possível de poder explicá-lo geometricamente numa palestra.

Estávamos na incômoda situação de poder eliminar todas as recorrências, em qualquer superfície, por deformações C^2- pequenas, mas só termos um exemplo no toro.

E se alguém fizesse a pergunta?

Pior ainda, e se não houvessem mais exemplos do que o do toro? Nosso resultado ficaria então muito enfraquecido. Comecei a ficar apreensivo.

A procura se prolongou por horas, sem convergir para uma linha de curvatura recorrente numa superfície de gênero 0. Fomos jantar num restaurante de Botafogo, para relaxar e continuar a discussão.

E não é que o fiel Elipsóide de Monge, mais flexível do que nunca, liberando-se de seu caráter estritamente quadrático, reapareceu, monopolizando a discussão. Permitiu, de bom grado, deformações e contorsões mesmo não analíticas, de suporte arbitrário.

Chegamos a um exemplo. A palestra estava pronta! Devia ser na manhã seguinte.

Comecei retropojetando uma transparência com o Elipsóide de Monge. Depois relembrava a maneira de explicá-lo, usando Dupin. Comentava a ausência de exemplos globais não triviais, fora daquele. Prometia desvendar o mistério das configurações principais genéricas. Depois, enunciava nosso resultado, insistindo na limitação na classe da aproximação C^2. Terminava conclamando os ouvintes a elevar esta classe para 3, resolvendo um dos problemas que ficaram em aberto com relação a meu plano inicial (encontrando-se este nesta escancarada situação, até hoje).

Curiosamente nenhum dos peritos em Sistemas Dinâmicos e recorrências ali presentes perguntou por exemplos. Começava a ficar desapontado quando alguém interrogou-me:

"Não sei porque você faz a hipótese *d*; não conheço nenhuma superfície que não a satisfaça."

Desenhei um elipsóide de revolução, deformei uma parte dele para, perto dos polos, ser como um de eixos diferentes com seus quatro pontos umbílicos em evidência, mantendo-o próximo ao equador como sendo de revolução.

Fiz rodar em torno do eixo maior, de um ângulo θ, somente o hemisfério norte de minha superfície. Por causa da simetria rotacional vigente em torno ao equador era esta uma família de superfícies de classe C^∞.

As linhas de curvatura se tornaram densas na nova superfície para todos os ângulos de rotação θ, incomesuráveis com relação a 2π !

De fato, a transformação de segundo retorno ao círculo equatorial resulta ser uma rotação de ângulo 2θ.[2]

Houve uma reação de interesse e simpatia vinda de numerosos participantes.

Eu fiquei gratificado de constatar o Elipsóide de Monge, depois de quase 12 anos de convivência comigo, havia respondido à altura dos acontecimentos.

A redação final do trabalho, a dividimos em duas partes. Uma foi para Asterísque, Vol 98-99, e a outra para Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1007.

Epílogo

No primeiro semestre de 1990, por ocasião de "l'Année Spéciale de Sistemes Dinâmiques" patrocinado pelo CNRS Francês, dei em Dijon um mini curso sobre Linhas de Curvatura e Pontos Umbílicos.

2 Fato conhecido em EDO. Ver livro do autor *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Proj. Euclides, IMPA, 1979, pp. 94 e 233.

Voltei a visitar as obrigatórias vinhas. Bebi novamente o vinho da Borgonha. Hospedei-me no Hotel Monge. Foi ali que organizei as 4 palestras que proferi nessa ocasião.

Surgiu, então a idéia de escrever um livro expositório que contasse, com mais vagar, a história que estava resumindo no breve curso.

Seria a influência do velho Monge agindo também neste caso?...

Em 1991 escrevi com Carlos Gutierrez um pequeno livro de vocação didática, por ocasião do curso preparado para o 18º Colóquio Brasileiro de Matemática *(Lines of Curvature and Umbilic Points on Surfaces).* Abordamos os resultados iniciais contidos nos dois primeiros trabalhos, incluindo mais detalhes sobre os fundamentos da teoria e a sua motivação. Algumas passagens difíceis dos artigos originais foram reformuladas e simplificadas. Os exemplos de recorrências foram aprimorados e reescritos em bases mais conceituais, particularmente o do Toro.

Também foi dada uma idéia de linhas de pesquisa que se desdobraram desta área assim como referências bibliográficas mais atualizadas.

Persiste a vontade de completar este livro, incluindo o estudo das bifurcações genéricas e uma lista explítica dos urgentes problemas ainda em aberto.

Talvez seja apropriado dar início a este projeto no Hotel Monge, numa próxima visita a Dijon, *se a tanto me ajudar o engenho e arte...*

Instituto de Matemática e Estatística - USP
Caixa Postal 20570 - Agência Iguatemi
01498-970 - São Paulo - SP