Matemática Universitária Nº 15, dezembro de 1993, 48-63

O grupo afim da reta e outros grupos de homeomorfismos

Plácido Andrade

Introdução

O grupo afim da reta que preserva a orientação,

$$Af^{+}(R) = \{\gamma : R \to R;\ \gamma(x) = ax + b,\ a,b \in R \text{ e } a > 0\}$$

possui muitas e interessantes propriedades algébricas que são verificadas apenas com conhecimentos introdutórios de Teoria de Grupos e Geometria Analítica. Estudando os aspectos geométricos do grupo afim, veremos que muitos outros grupos de homeomorfismos possuem propriedades semelhantes. Isto pode ser feito sem fugir dos resultados elementares da Teoria de Grupos e Análise na reta.

Estas notas foram inspiradas num teorema de V. Solodov (§3). Essencialmente o que faremos é explorar a bonita demonstração do teorema. Bonita não só pela singeleza da construção como também pela variedade de aplicações que ela permite.

§ 1. O grupo afim da reta

O grupo afim da reta que preserva a orientação é o conjunto $Af^{+}(R)$ formado pelas funções afins, $\gamma : R \to R$,

$$\gamma(x) = ax + b$$

onde a é um número positivo e b é um número real qualquer. Portanto o gráfico de qualquer elemento de $Af^{+}(R)$ é uma reta estritamente crescente.

A operação de grupo que estamos considerando é a usual composição de funções. Ao compormos $\gamma_0(x) = a_0x + b_0$ com $\gamma_1(x) = a_1x + b_1$ obtemos

$$\gamma_0 \circ \gamma_1(x) = a_0 a_1 x + a_0 b_1 + b_0 .$$

A função identidade de R é o elemento neutro do grupo e um elemento $\gamma_0(x) = a_0x + b_0$ tem como inverso o elemento $\gamma_0^{-1}(x) = \frac{1}{a_0}x - \frac{b_0}{a_0}$

A idéia subjacente ao longo destas notas, é a utilização de uma simples propriedade geométrica, descrita abaixo. Ao escrevermos a k-ésima potência de γ_0 obtemos uma expressão do tipo

$$\gamma_0^k(x) = a_0^k\, x + b_k$$

onde b_k é um número real. Para esboçar o gráfico da família de funções $\{\gamma_0^k\}_{k\in Z}$ é conveniente dividirmos o estudo em dois casos.

No caso do coeficiente $a_0 = 1$, a k-ésima potência de γ_0 reduz-se a

$$\gamma_0^k(x) = x + kb_0$$

Portanto o gráfico da família de funções $\{\gamma_0^k\}_{k\in Z}$ são retas paralelas à reta bissetriz $y = x$ (figura 1).

Quando $a_0 \neq 1$, os gráficos de $\gamma_0^k(x)$ são retas que se interceptam num mesmo ponto da reta bissetriz. Verifiquemos esta afirmação. Como $a_0^k \neq 1$, o gráfico de $\gamma_0^k(x) = a_0^k\, x + b_k$ intercepta a reta bissetriz $y = x$ num único ponto. Denotando por x_0 o ponto fixo de γ_0, isto é $\gamma_0(x_0) = x_0$, concluimos que $\gamma_0^k(x_0) = x_0$ para todo $k \in Z$. Logo os gráficos de $\{\gamma_0^k\}_{k\in Z}$ se interceptam no ponto (x_0, x_0) (figura 2).

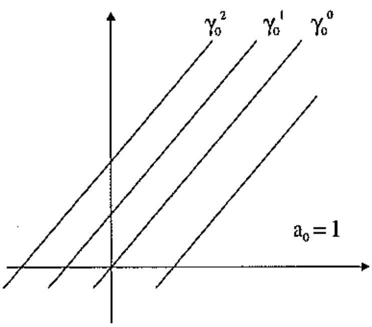

figura 1

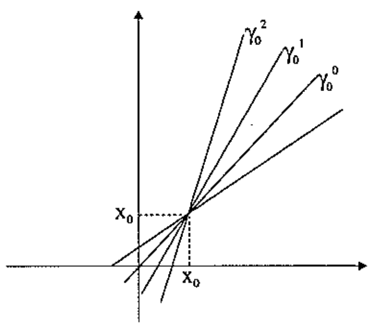

figura 2

Feitas estas considerações de ordem geométrica, passemos a descrever uma propriedade algébrica do grupo afim.

Antes recordemos que num grupo Γ, os elementos da forma $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ são chamados de comutadores. O conjunto $[\Gamma,\Gamma]$ formado pelos elementos que são produtos de comutadores é um subgrupo normal. Observe que o subgrupo comutador está contido no núcleo de qualquer homomorfismo $\chi : \Gamma \to R$ pois

$$\chi(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}) = \chi(\alpha) + \chi(\beta) - \chi(\alpha) - \chi(\beta) = 0.$$

Teorema 1. *O subgrupo comutador* $[Af^+(R), Af^+(R)]$ *é abeliano.*

Faremos uma demonstração clássica sem nenhum sabor geométrico, utilizando a propriedade do subgrupo comutador citada acima.

Demonstração do Teorema 1: Para cada função afim fixada$\gamma_0(x) = a_0x + b_0$, com coefiente $a_0 \neq 1$, construiremos um homomorfismo $\chi_0 : Af^+(R) \to R$ tal que $\chi_0(\gamma_0) = 1$. Com isto estaremos mostrando que o subgrupo comutdor $[Af^+(R), Af^+(R)]$ só contem elementos da forma $\alpha(x) = x + b$, tornando-se fácil verificar que ele é um subgrupo abeliano. Deixaremos para o leitor mostrar a igualdade.

$$[Af^+(R), Af^+(R)] = \{\alpha : R \to R;\ \alpha(x) = x + b,\ b \in R\}.$$

Como sabemos, ao compormos $\gamma_1(x) = a_1x + b_1$ com $\gamma_2(x) = a_2x + b_2$ obtemos a expressão

$$\gamma_1 \circ \gamma_2(x) = a_1a_2x + a_1b_2 + b_1.$$

Daí podemos encontrar uma definição natural para o homomorfismo.

Fixado$\gamma_0(x) = a_0x + b_0$ com $a_0 \neq 1$, defina a aplicação $\chi_0 : Af^+(R) \to R$ por $\chi_0(\gamma) = \log_{a_0} a$, para $\gamma(x) = ax + b$. A aplicação está bem definida pois a base do logarítmo é $a_0 \neq 1$. É imediato verificar que χ_0 é um homomorfismo de grupos, $\chi_0(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \chi_0(\gamma_1) + \chi_0(\gamma_2)$ e que $\chi_0(\gamma_0) = 1$.

A demonstração do Teorema 1 é bastante limitada, pois foi utilizada explicitamente a estrutura do grupo afim. Para demonstrar um teorema semelhante para outros grupos de homeomorfismos da reta, utilizaremos a Geometria Analítica como ponto de partida.

Pelo restante desta seção fixaremos um elemento do grupo $Af^+(R)$, digamos $\gamma_0(x) = a_0x + b_0$ com $a_0 > 1$. A condição sobre o coeficiente a_0 é irrelevante, os argumentos serão os mesmos para $0 < a_0 < 1$.

O gráfico da família de funções $\{\gamma_0^k\}_{k \in Z}$ determinam regiões no plano, que serão chamadas de setores semi-abertos S_k. Na figura 3 está ilustrada com

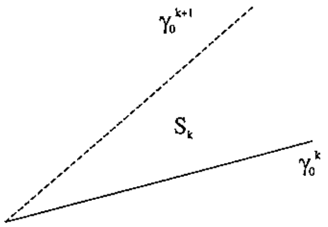

figura 3

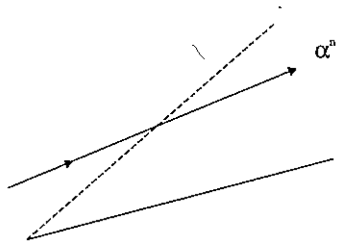

figura 4

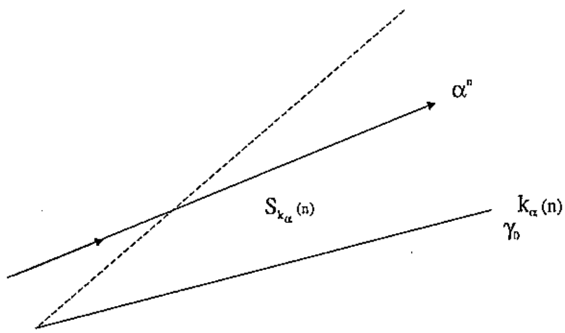

figura 5

precisão a região plana correspondente ao setor semi-aberto S_k.

Coloquemos a seguinte pergunta. Dado uma função afim $\alpha(x) = a\,x + b$ e dado um inteiro n, qual o setor semi-aberto S_k no qual o gráfico de $\alpha^n(x) = a^n x + b_n$ "entra" e não mais escapa? (figura 4)

É claro que o setor procurado depende da função α e do inteiro n, entretanto a resposta é imediata se compararmos as declividades das retas envolvidas.

A resposta é: o setor procurado é $S_{k_\alpha}(n)$ onde $k_\alpha(n)$ é o inteiro satisfazendo a seguinte desigualdade (figura 5)

$$a_o^{k_\alpha(n)} \leq a^n < a_o^{k_\alpha(n)+1}.$$

Como a função $f(x) = \log_{a_0} x$ é crescente obtemos

$$k_\alpha(n) \leq n \log_{a_0} a < k_\alpha(n) + 1 .$$

Destas últimas desigualdades, concluímos que se o limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k_\alpha(n)}{n}$$

existir, então ele será $\log_{a_0} a$, que é exatamente $\chi_0(\alpha)$, onde $\chi_0 : Af^+(R) \to R$ é o homomorfismo construido na demonstração do Teorema 1.

Na construção do homomorfismo χ_0, via geometria analítica temos duas lacunas.

A primeira é saber se o $\lim_{n \to \infty} \frac{k_\alpha(n)}{n}$ existe. De fato ele existe, mas para mostrar a sua existência precisaremos conhecer algumas propriedades da função $k_\alpha : Z \to Z$. Por exemplo, qual o comportamento da função k_α em relação à soma de inteiros.

Se $S_{k_\alpha}(m)$ é o setor no qual α^m entra e não escapa, e $S_{k_\alpha}(n)$ é o setor correspondente para α^n, ao somarmos as desigualdades que definem os dois setores obtemos

$$k_\alpha(m) + k_\alpha(n) \leq (m+n) \log_{a_0} a < k_\alpha(m) + k_\alpha(n) + 2.$$

Isto significa que o setor no qual o gráfico de $\alpha^{m+n}(x)$ entra e não escapa, tem um índice $k_\alpha(m+n)$ satisfazendo

$$k_\alpha(m) + k_\alpha(n) \leq k_\alpha(m+n) \leq k_\alpha(m) + k_\alpha(n) + 1.$$

Resumiremos as propriedades da função $k_\alpha : Z \to Z$ numa definição.

Definição 2: Uma função $k : Z \to Z$ é dita quase-aditiva se

i) $k(0) = 0$;

ii) $k(m) + k(n) \leq K(m+n) \leq k(m) + k(n) + 1$;

iii) k é monótona (crescente ou decrescente).

Deixaremos para o leitor o seguinte exercício de seqüências.

Exercício 3: Dado uma função quase-aditiva $k : Z \to Z$, mostre que

i) $\lim_{n \to \infty} \frac{k(n)}{n}$ existe.

ii) $\lim_{n \to \infty} \frac{k(n)}{n} = 0$ se e somente se $k \equiv 0$.

Observamos que os pares ordenados $(n, k(n))$ estão contidos na faixa do plano limitada pelas retas $y = \lambda x$ e $y = \lambda x + 1$, onde λ é o valor do limite $\lim_{n \to \infty} \frac{k(n)}{n}$.

A segunda lacuna na construção do homomorfismo $\chi_0 : Af^+(R) \to R$ via Geometria Analítica, é mais séria. Imaginemos que ainda não tenhamos conhecimento do Teorema 1. Defina a função $\chi_0 : Af^+(R) \to R$ por

$$\chi_o(\alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{k_\alpha(n)}{n} .$$

Como sabemos pelo Exercício 3, χ_o está bem definida pois o limite existe. E agora? χ_o é um homomorfismo de grupos?

A resposta, positiva, não é inerente ao grupo afim, ela é a mesma para uma categoria de grupos que falaremos na próxima seção e da qual o grupo afim é um exemplo.

§ 2. Ordem

Podemos comparar dois elementos $\alpha, \beta, \in Af^+(R)$ convencionando que:

" $\alpha \leq \beta$ se e somente se existe $x_o \in R$

tal que $\alpha(x) \leq \beta(x)$ para todo $x \in [x_o, \infty]$"

Observamos que $\leq$ é uma relação satisfazendo os axiomas de ordem total em um conjunto:

$O_1 : \alpha \leq \alpha$

O_2 : se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$ então $\alpha \leq \gamma$

O_3 : se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$ então $\alpha = \beta$

O_4 : dados dois elementos α e β então $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$.

A Teoria de Conjuntos garante que todo conjunto admite uma ordem total. Como estamos considerando conjuntos equipados com uma estrutura algébrica (a estrutura de grupo), é conveniente que a ordem total preserve essa estrutura. Esclarecemos melhor o comentário acima se definirmos o que entendemos por grupo ordenado.

Um grupo $(\Gamma, \leq)$ é um grupo ordenado se $\leq$ é uma ordem total satisfazendo

O_5 : se $\alpha \leq \beta$ então $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ e $\gamma\alpha \leq \gamma\beta$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

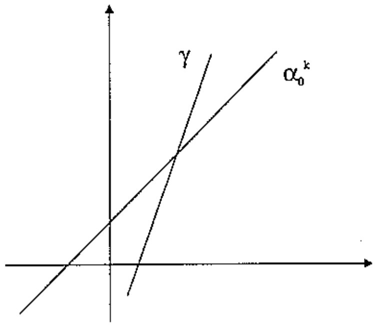

figura 6

A grande vantagem de trabalharmos com um grupo ordenado é podermos fazer manipulações com desigualdades, semelhantes as que nós fazemos com desigualdades numéricas.

A seguir, transporemos para a Teoria de Grupos um outro conceito da aritmética.

Um elemento γ de um grupo ordenado $(\Gamma,\leq)$ é dito arquemediano se dado $\alpha \in \Gamma$ existe um inteiro k tal que $\alpha \leq \gamma^k$.

Deixemos um pouco a teoria abstrata de grupos e ilustremos estes conceitos, examinando o grupo afim, $Af^+(R)$, equipado com a ordem total definida no início deste parágrafo. O grupo $(Af^+(R), \leq)$ tem uma estrutura de grupo ordenado, pois todo os elementos são funções crescentes, sendo por isto muito fácil verificar a propriedade O_5. Um ponto deve ser ressaltado pois será importante posteriormente: nem todo elemento de $Af^+(R)$ é um elemento arquimediano. Por exemplo, qualquer que seja a potência de $\alpha_o(x) = x + b_o$, ela nunca será maior do que um elemento do tipo $\gamma(x) = ax + b$ com $a > 1$ (figura 6). Por outro lado, elementos do tipo $\alpha_o(x) = a_o x + b_o$ com $a_o \neq 1$, são arquimedianos.

Adiantamos que em §3, veremos outros exemplos de grupos. No momento, desejamos apenas transpor as idéias de Geometria Analítica que surgiram no §1, para um contexto mais geral. Vejamos como podemos fazer esta transposição.

Fixemos γ_0 um elemento arquimediano de um grupo ordenado $(\Gamma, \leq)$. Vamos assumir que γ_0 é estritamente maior que o elemento neutro I, isto é, $I \leq \gamma_o$ e $I \neq \gamma_0$, condição indicada pelo símbolo <.

A seqüência $\{\gamma_0^k\}_{k \in Z}$ pode então ser escrita na seguinte forma

$$\ldots < \gamma_0^{-1} < \gamma_0^0 = I < \gamma_0 < \gamma_0^2 < \ldots$$

Chamaremos de setor semi-aberto associado a γ_0 o conjunto

$$S_k = \{\alpha \in \Gamma\ ;\ \gamma_0^k \leq \alpha < \gamma_0^{k+1}\}.$$

Desde que γ_0 é um elemento arquimediano do grupo, qualquer elemento $\alpha \in \Gamma$ deve estar contido num único setor semi-aberto S_k. Podemos então colocar a mesma pergunta:

Dado um elemento $\alpha \in \Gamma$ e um inteiro n, qual o setor que contém α^n ?

A resposta será a mesma. O setor que contém α^n é o setor $S_{k_\alpha}(n)$, onde $k_\alpha(n)$ é o único inteiro satisfazendo

$$\gamma_0^{k_\alpha(n)} \leq \alpha^n < \gamma_0^{k_\alpha(n)+1}$$

Desta forma construimos também uma função quase-aditiva $k_\alpha : Z \to Z$. Portanto é natural enunciarmos o seguinte teorema.

Teorema 4. *Seja* $(\Gamma, \leq)$ *um grupo ordenado. Se* $\gamma_0 \in \Gamma$ *é um elemento arquimediano e* $I < \gamma_0$ *, então existe uma função* $\chi_0 : \Gamma \to R$ *com as seguintes propriedades logarítmicas:*

i) $\chi_0(I) = 0$ e $\chi_0(\gamma_0) = 1$;

ii) $\chi_0(\alpha^p) = p\chi_0(\alpha)$ *para todo* $p \in Z$;

iii) *se* $\alpha \leq \beta$ *então* $\chi_0(\alpha) \leq \chi_0(\beta)$;

iv) $\chi_0(\alpha\beta) = \chi_0(\alpha) + \chi_0(\beta)$.

Em particular o subgrupo comutador $[\Gamma, \Gamma]$ *não contém elementos arquimedianos.*

Demonstração: Dado o elemento arquimediano γ_0, consideremos os setores semi-abertos do grupo Γ, determinados por γ_0. Como vimos cada $\alpha \in \Gamma$ define uma função quase-aditiva $k_\alpha : Z \to Z$. Pelo Exercício 3 do §1, a função $k_\alpha : Z \to Z$ dada por

$$\chi_0(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{k_\alpha(n)}{n}$$

está bem definida, pois o limite existe. Mostremos que a função χ_0 tem as propriedades logarítmicas listadas no enunciado do teorema.

i) Qualquer que seja a potência I^n, ela satisfaz $\gamma_0^0 \leq I^n < \gamma_0$, isto é, I^n, pertence ao setor S_0 qualquer que seja $n \in Z$. Portanto a função quase-aditiva

$k_I : Z \to Z$ é identicamente nula, donde $\chi_0(I) = 0$.

É claro que a potência γ_0^n pertence ao setor S_n, $n \in Z$, e assim $k_{\gamma_0} : Z \to Z$ é a função identidade $k_{\gamma_0}(n) = n$. Daí segue que $\chi_0(\gamma_0) = 1$.

ii) Seja $k_\alpha : Z \to Z$ a função quase-aditiva definida por α. É fácil verificar que $k_\alpha^p(n) = k_\alpha(pn)$. Pela quase-aditividade de k_α temos

$$pk_\alpha(n) \leq k_\alpha^p(n) = k_\alpha(np) \leq pk_\alpha(n) + (p-1).$$

Dividindo cada membro desta equação por $n > 0$ e fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$p\chi_0(\alpha) \leq \chi_0(\alpha^p) \leq p\chi_0(\alpha).$$

iii) Se $\alpha \leq \beta$, é claro que $k_\alpha(n) \leq \chi_0(\alpha^p) \leq p\chi_0(\alpha)$ para todo $n \in Z$. Logo $\chi_0(\alpha) \leq \chi_0(\beta)$.

iv) Embora precisemos de algumas linhas a mais, a demonstração do item iv) também é elementar, sendo uma conseqüência da seguinte afirmação.

Afirmação: Se $\beta \leq \alpha\beta\alpha^{-1}$ então $\beta^n\alpha^n \leq (\alpha\beta)^n \leq \alpha^n\beta^n$ para todo $n \in N$.

Demonstremos a afirmação. A hipótese $\beta \leq \alpha\beta\alpha^{-1}$ e a propriedade O_5, implicam

$\beta \leq \alpha^1\beta\alpha^{-1} \leq \alpha^2\beta\alpha^{-2} \leq \ldots \leq \alpha^i\beta\alpha^{-i} \ldots$ para todo $i \in N$. Por sua vez estas últimas desigualdades implicam nas desigualdades

$$\ldots \alpha^{-i}\beta\alpha^i \leq \ldots \leq \alpha^{-1}\beta\alpha \leq \beta, \text{ para todo } i \in N.$$

Por outro lado podemos escrever $(\alpha\beta)^n$ de duas formas:

$$(\alpha\beta)^n = (\alpha\beta\alpha^{-1})(\alpha^2\beta\alpha^{-2}) \ldots (\alpha^n\beta\alpha^{-n})\alpha^n$$

$$(\alpha\beta)^n = \alpha^n(\alpha^{-n+1}\beta\alpha^{n-1})(\alpha^{-n+2}\beta\alpha^{n-2}) \ldots (\alpha^{-1}\beta\alpha)\beta.$$

Observando que cada fator entre parênteses na primeira identidade é maior que β, e que cada fator entre parêntese na segunda identidade é menor que β, concluimos que

$$(\alpha\beta)^n \geq \beta^n\alpha^n$$

$$(\alpha\beta)^n \leq \alpha^n\beta^n.$$

Isto conclui a demonstração da afirmação.

Voltemos à demonstração do item iv). Dados os elementos $\alpha, \beta \in \Gamma$, vamos assumir sem perda de generalidade que $\beta \leq \alpha\beta\alpha^{-1}$. Das desigualdades que determinam os setores semi-abertos construidos com γ_0, e da afirmação acima, obtemos

$$\gamma_o^{k_\alpha(n)+k_\beta(n)} \leq \beta^n \alpha^n \leq (\alpha\beta)^n \leq \alpha^n \beta^n < \gamma_o^{k_\alpha(n)+1+k_\beta(n)+1} .$$

Logo a função quase-aditiva $k_{\alpha\beta} : Z \to Z$ satisfaz

$$k_\alpha(n) + k_\beta(n) \leq k_{\alpha\beta}(n) \leq k_\alpha(n) + k_\beta(n) + 1.$$

Dividindo-se cada membro da desigualdade por $n > 0$ e fazendo $n \to \infty$ concluimos pela definição de χ_0 que

$$\chi_0(\alpha) + \chi_0(\beta) \leq \chi_0(\alpha\beta) \leq \chi_0(\alpha) + \chi_0(\beta) .$$

Isto conclui a demonstração do item iv).

Para terminar, observamos que um elemento arquimediano $\gamma_0 \in \Gamma$, com $I < \gamma_0$, não pode estar no subgrupo comutador $[\Gamma , \Gamma]$, pois sempre existe um homomorfismo de grupos $\chi_0 : \Gamma \to R$, tal que $\chi_0(\gamma_0) = 1$. Por outro lado, se $\gamma_0 \in \Gamma$ é arquimediano e $\gamma_0 < I$, é fácil mostrar que $I < \gamma_0^{-1}$ e que γ_0^{-1} é um elemento arquimediano. Pelos mesmos argumentos mostramos que γ_0^{-1} não pertence à $[\Gamma , \Gamma]$. Logo γ_0 também não pertence ao subgrupo comutador.

§3. Grupos de homeomorfismos da reta

Diremos que $\gamma : R \to R$ é um homeomorfismo que preserva a orientação da reta quando γ é uma função contínua, sobrejetora e estritamente crescente. O conjunto $\mathrm{Hom}^+(R)$ formado por tais homeomorfismos e equipado com a operação de composição de funções é um grupo. Podemos comparar dois elementos $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}^+(R)$ convencionando que

"$\alpha \leq \beta$ se e somente se existe $x_0 \in R$,

tal que $\alpha(x) \leq \beta(x)$ para todo $x \in [x_0,\infty)$ "

A relação $\leq$ é uma relação de ordem que preserva a estrutura do grupo, isto é, satisfaz a condição O_5, entretanto ela não é uma ordem total. A condição O_4 não é satisfeita. Por exemplo, os elementos $id(x) = x$ e $\beta(x) = x + sen\ x$ não podem ser comparados, pois o gráfico da identidade está acima do gráfico de β em alguns intervalos, enquanto em outros intervalos essa posição é invertida, repetindo-se este comportamento indefinidamente quando $x \to \infty$.

O que pretendemos neste parágrafo é considerar subgrupos $\Gamma \subset \mathrm{Hom}^+(R)$ para os quais a relação de ordem $\leq$ é uma ordem total. Como exemplo e modelo temos o grupo $\Gamma = Af^+(R)$.

Por simplicidade, convencionaremos que a expressão "o subgrupo $\Gamma \subset \mathrm{Hom}^+(R)$ é sem pontos fixos" significará que todo elemento de Γ diferente da identidade, $id: R \to R$, não tem pontos fixos. No Teorema 1 mostramos que o subgrupo comutador $[Af^+(R), Af^+(R)]$ é sem pontos fixos, e daí concluimos que ele era abeliano. A conclusão não é privilégio deste subgrupo.

Teorema 5. *Se o subgrupo* $\Gamma \subset \mathrm{Hom}^+(R)$ *é sem pontos fixos então* Γ *é abeliano.*

Demonstração: Observemos inicialmente que os gráficos de dois elementos distintos $\alpha, \beta \in \Gamma$, não se interceptam. Caso contrário, se $\alpha(x_0) = \beta(x_0)$ para algum $x_0 \in R$, então $\beta^{-1}\alpha(x_0) = x_0$. Como o único elemento de Γ com pontos fixos é a identidade, concluímos que $\beta^{-1}\alpha = id$. Uma contradição pois teremos assim $\alpha \equiv \beta$.

A observação acima produz uma série de conseqüências.

O grupo $(\Gamma, \leq)$ é um grupo ordenado pois a condição O_4 do §1 é verdadeira em Γ, isto é, podemos sempre comparar dois elementos, verificando qual deles tem o gráfico acima do gráfico do outro.

Outra conseqüência: todo elemento diferente da identidade é um elemento arquimediano. Mostremos esta afirmação. Considere por exemplo um elemento $\gamma \in \Gamma$ satisfazendo $id < \gamma$. Como $0 < \gamma(0)$ e γ é estritamente crescente, a seqüência de iterados de γ no ponto 0 se escreve na seguinte forma

$$\ldots < \gamma^{-2}(0) < \gamma^{-1}(0) < 0 < \gamma(0) < \gamma^{2}(0) < \ldots$$

Agora seja α um elemento qualquer do grupo Γ. Se $\gamma^n(0 \leq \alpha(0)$ para todo $n \in \Gamma$ teremos uma contradição, pois sendo assim a seqüência crescente $\{\gamma^n(0)\}_{n \in Z}$ é uma seqüência limitada superiormente, logo convergente. Digamos que

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} \gamma^n(0)$$

Por continuidade de $\gamma: R \to R$, segue que

$$\gamma(x_0) = \lim_{n \to \infty} \gamma^{n+1}(0), \text{ isto é, } \gamma(x_0) = x_0.$$

Absurdo, pois estamos assumindo que γ não tem pontos fixos. Portanto existe um inteiro n_0 tal que $\alpha(0) < \gamma^{n_0}(0)$. Isto é suficiente para mostrar que $\alpha < \gamma^{n_0}$, pois os gráficos de α e de γ^{n_0} nunca se interceptam.

Para concluir a demonstração, utilizamos o Teorema 4 do §2. Sendo Γ um grupo ordenado o subgrupo comutador $[\Gamma,\Gamma]$ não contém elementos arquimedianos. Como mostramos que todo elemento de Γ é um elemento arquimediano então $[\Gamma,\Gamma] = \{id\}$. Por outro lado, um resultado inicial de Teoria de Grupos afirma que o quociente de um grupo pelo seu grupo comutador é um grupo abeliano. No nosso caso, como $[\Gamma,\Gamma] = \{id\}$ temos que $\Gamma = \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ é abeliano.

Passemos agora a examinar subgrupos $\Gamma \subset \mathrm{Hom}^+(R)$ contendo elementos com pontos fixos.

Recordemos que um elemento $\gamma_0(x) = a_0 x + b_0$ do grupo afim com $a_0 \neq 1$, define o subgrupo abeliano $\Gamma = \{\gamma_0^k\}_{k \in Z}$ cujos gráficos concorrem no ponto fixo de $\gamma_0 : R \to R$. A relação entre ser abeliano e ter um único ponto fixo em comum está descrita no teorema abaixo.

Teorema 6. *Seja* $\Gamma \subset \mathrm{Hom}^+(R)$ *um subgrupo. Se* $x_0 \in R$ *é um ponto fixo para cada elemento de* Γ *e cada elemento de* Γ *diferente da identidade só possui* x_0 *como ponto fixo, então* Γ *é um grupo abeliano.*

Demonstração: A idéia da demonstração é a mesma. Mostramos que $(\Gamma,\leq)$ é um grupo ordenado e que todo elemento $\gamma \in \Gamma$ diferente da identidade é um elemento arquimediano. Graças ao Teorema 4 do §2 concluimos que $[\Gamma,\Gamma] = \{id\}$. Portanto $\Gamma = \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ é um grupo abeliano. Para evitar repetições de argumentos deixamos para o leitor o roteiro da demonstração.

a) Mostre que o gráfico de dois elementos distintos de Γ só se interceptam no ponto (x_0, x_0).

b) Conclua que sobre o intervalo $[x_0, \infty)$ sempre podemos comparar dois elementos de Γ.

c) Dado um elemento $\gamma \in \Gamma$ diferente da identidade, mostre que γ é um elemento arquemediano, examinando a seqüência de iterados $\{\gamma^k(x_1)\}_{k \in Z}$ para $x_1 > x_0$.

Alguns pontos fixos de um homeomorfismo $\gamma : R \to R$ são especiais e recebem uma denominação própria: pontos fixos hiperbólicos. Mais precisamente, diremos que $x_0 \in R$ é um ponto fixo hiperbólico de $\gamma : R \to R$ se ocorrem as duas condições seguintes:

a) x_0 é um ponto fixo isolado de outros pontos fixos de γ;

b) (x_0, x_0) é um ponto do plano no qual o gráfico de γ passa do semi-plano inferior $y \leq x$ para o semi-plano superior $y \geq x$, ou vice-versa (figura 7).

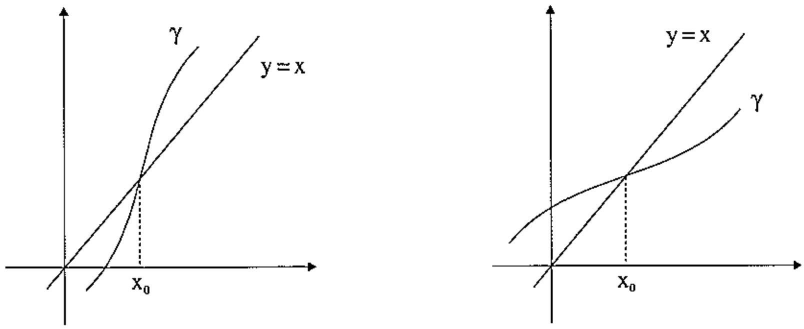

figura 7

Os elementos do grupo afim, $\gamma_0(x) = a_0 x + b_0$ com $a_0 \neq 1$, são exemplos de homeomorfismos da reta com um ponto fixo hiperbólico. Se $a_0 > 1$, o gráfico de γ_0 passa do semi- plano inferior $y \leq x$ para o semi-plano superior $y \geq x$ no ponto $\left(\frac{-b_0}{a_0 - 1}, \frac{-b_0}{a_0 - 1}\right)$. Quando $0 < a_0 < 1$ a situação é oposta.

Enunciaremos a seguir o teorema de V. Solodov que motivou estas notas. Ressaltamos que ele é uma generalização do Teorema 1 e tem aplicações na Teoria de Folheações e Sistemas Dinâmicos [B].

Teorema 7. *Seja $\Gamma \subset \mathrm{Hom}^+(R)$ um subgrupo. Se todo elemento de Γ diferente da identidade tem no máximo um ponto fixo, e se tem um ponto fixo ele é hiperbólico, então o subgrupo comutador $[\Gamma,\Gamma]$ é abeliano.*

Demonstração: Os gráficos de dois elementos distintos $\alpha,\beta \in \Gamma$ só podem se interceptar no máximo em um ponto. Caso contrário o elemento $\beta^{-1}\alpha$ teria mais de um ponto fixo e por hipótese seguiria $\beta^{-1}\alpha = id$, ou equivalentemente $\beta = \alpha$. Uma contradição, pois α e β são distintos.

O comentário acima é suficiente para concluirmos que $(\Gamma,\leq)$ é um grupo ordenado. Vejamos que a propriedade O_4 do §2 é satisfeita. Dados $\alpha,\beta \in \Gamma$, se não houver interseção entre os gráficos podemos compará-los e decidir se

$\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$, bastando para isto, examinar qual gráfico está acima do outro. Caso haja interseção dos gráficos, digamos que seja em (x_0, y_0), podemos comparar os elementos α e β examinando os respectivos gráficos sobre o intervalo $[x_1, \infty)$ para algum $x_1 > x_0$ e decidir se $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$ pois sobre $[x_1, \infty)$ não ocorre nenhuma outra interseção (figura 8).

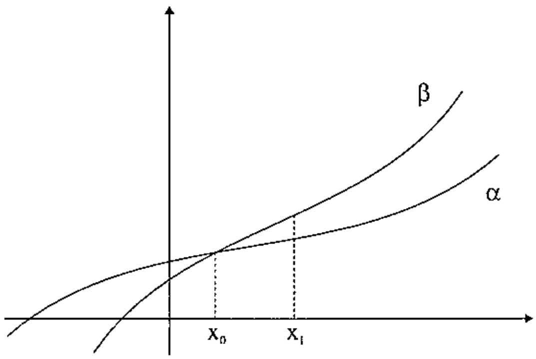

figura 8

Mostremos agora que um elemento $\gamma_0 \in \Gamma$ com ponto fixo é um elemento arquimediano. Vamos assumir que $id < \gamma_0$, no outro caso os argumentos são semelhantes. Observamos inicialmente que se $x_0 \in R$ é o ponto fixo hiperbólico de γ_0, então (x_0, x_0) é o ponto no plano no qual o gráfico γ_0 passa do semi-plano inferior $\gamma \leq x$ para o semi-plano superior $\gamma \geq x$ (figura 9).

Examinemos as posições relativas dos gráficos da família de funções $\{\gamma_o^k\}_{k \in N}$. É claro que todos os gráficos só se interceptam no ponto (x_0, x_0). Sobre o intervalo (x_0, ∞) o gráfico de γ_0^{k+1} está acima do gráfico de γ_0^k pois γ_0 é uma função crescente estritamente maior do que a identidade sobre este intervalo. A situação inversa ocorre sobre o intervalo aberto $(-\infty, x_0)$. Aí, o gráfico de γ_o^{k+1} está abaixo do gráfico de γ_o^k (figura 10).

Considerando esta propriedade dos gráficos das funções $\{\gamma_0^k\}_{k \in N}$, ao escolhermos dois pontos x_1 e x_2 na ordem $x_1 < x_0 < x_2$ podemos escrever as desigualdades

$$\ldots \gamma_0^2(x_1) < \gamma_0(x_1) < x_1 < x_o < x_2, \gamma(x_2) < \gamma_0^2(x_2) < \ldots$$

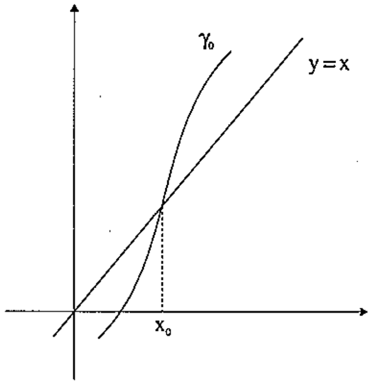

figura 9

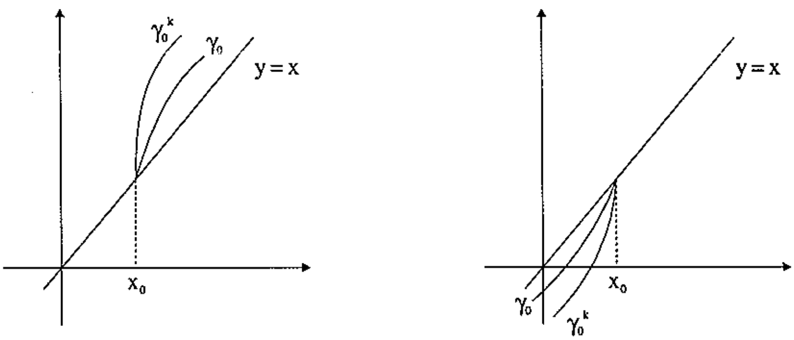

figura 10

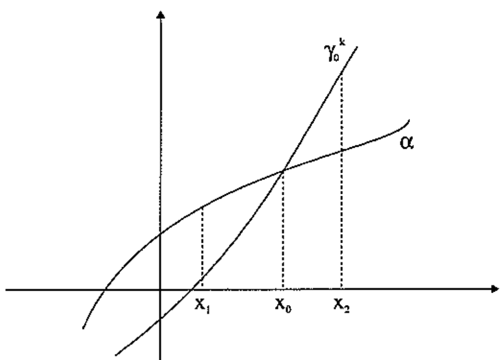

figura 11

A seqüência estritamente crescente $\{\gamma_0^k(x_2)\}_{k\in N}$ diverge para $+\infty$, caso contrário, ela seria limitada e portanto convergente. É fácil mostrar utilizando a continuidade de γ_0, que o limite da seqüência é um ponto fixo de γ_0 maior que o ponto fixo x_0. Um absurdo pois γ_0 só tem um ponto fixo. Da mesma forma a seqüência estritamente decrescente $\{\gamma_0^k(x_1)\}_{k\in N}$ diverge para $-\infty$.

As considerações acima nos permitem mostrar que γ_0 é um elemento arquimediano.

Dado $\alpha \in \Gamma$. Sejam x_1, x_2 dois pontos tais que $x_1 < x_0 < x_2$ onde x_0 é o ponto fixo de γ_0. Como $\alpha : R \to R$ é uma função estritamente crescente temos que $\alpha(x_1) < \alpha(x_2)$. Desde que $\gamma_0^n(x_2) \to +\infty$ e $\gamma_0^n(x_1) \to -\infty$ quando $n \to +\infty$, podemos escolher um inteiro positivo k_0, suficientemente grande para garantir as desigualdades

$$\gamma_0^{k_0}(x_1) < \alpha(x_1) < \alpha(x_2) < \gamma_0^{k_0}(x_2)\,. \quad \text{(Veja figura 11).}$$

Agora basta aplicar o Teorema do Valor Intermediário para a função diferença $\gamma_0^{k_0} - \alpha$, restrita ao intervalo $[x_1, x_2]$. No extremo x_1 ela é negativa e no extremo x_2 positiva. Portanto existe um ponto $\bar{x}$, $x_1 < \bar{x} < x_2$, tal que $\gamma_0^{k_0}(\bar{x}) = \alpha(\bar{x})$. Como já sabemos os gráficos de $\gamma_0^{k_0}$ e α só se interceptam num ponto, então esta interseção deve ocorrer sobre $\bar{x}$. Por outro lado $\gamma_0^{k_0}(x_2) > \alpha(x_2)$ de onde concluimos que o gráfico de $\gamma_0^{k_0}$ está acima do gráfico de α em todo o intervalo $[x_2, \infty)$. Isto significa que $\alpha < \gamma_0^{k_0}$. Logo γ_0 é um elemento arquimediano.

Como nenhum elemento arquimediano pode estar no comuntador $[\Gamma, \Gamma]$ (veja Teorema 4), o subgrupo comutador é um subgrupo sem pontos fixos e pelo Teorema 5 é abeliano.

Referência

[B} Barbot, Thierry; Géometrie Transverse des Flots d'Anosov; These de Doctorat, Universite Claude Bernad - Lyon I (1992).

Plácido Andrade
Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática - G.M.A.
Coordenação de Pós-Graduação
Rua São Paulo s/n CEP 24020-005,
Valonguinho, Niteró, RJ