Matemática Universitária Nº 15, dezembro de 1993, 64-76

Grupos de Lie em Equações Diferenciais e Teoria dos Números

Paulo Tadeu Campos, Walterson Ferreira, Jorge Vargas[1]

A noção de representações de grupos de Lie ou, mais geralmente, de ações de grupos de Lie em variedades diferenciáveis surgiu quando S. Lie considerou o problema de estender a teoria de Galois clássica às equações diferenciais ordinárias ou parciais. Neste trabalho apresentamos uma síntese dos principais teoremas e definições desta teoria, bem como uma perspectiva, muito limitada, dos desenvolvimentos futuros.

1. Algumas Idéias de Galois, Lie e suas conseqüências

Seja f um polinômio irredutível de grau n com coeficientes racionais. Gauss provou que f tem n raízes em C. Se $n=2$, $f=x^2+bx+c$ e as raízes são dadas pela fórmula $x=(-b\pm\sqrt{b^2-4c})/2$. Se $n=3$, a fórmula de Cardano-Tartaglia permite calcular as raízes de f em função dos seus coeficientes [E]. Se $n=4$ por meio de transformações reduz-se a resolver equações de grau dois. Quanto ao caso geral, Galois observou o seguinte: se $\tau : C \to C$ é um homomorfismo de corpos e

$$R_f=\{\alpha \in C : f(\alpha)=0\} \qquad \text{então } \tau(R_f)=R_f .$$

De fato, $\tau(1)=1 \Rightarrow \tau(m)=m, \quad \forall m \in Z$

$$\Rightarrow \tau(r)=r, \qquad \forall r \in Q .$$

1 Este trabalho foi financiado por CNPq, UnB, UFV, UFG, Univ. Nac. de Cordoba - Argentina

Disto segue que se $\sum_{i=0}^{n} r_i\alpha^i = 0$, então $0 = \tau(0) = \sum_{i=1}^{n} r_i\tau(\alpha^i) = \sum_{i=1}^{n} r_i\tau(\alpha)^i$.

Galois considerou o conjunto $G_f = \{ s : R_f \to R_f$ *bijetiva tal que* $s = \tau \mid R_f \}$, onde τ é um homomorfismo de corpos de C em C, e demonstrou o

Teorema (Galois ~ 1810) As raízes de f podem ser calculadas a partir dos coeficientes de f e de números racionais usando $+, \cdot, \sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }, ...$, se, e somente se, G_f é um grupo solúvel.

Para uma demonstração veja [E].

Na segunda metade do século passado, Lie, Vessiot e outras pessoas procuraram estender estas idéias ao caso de equações diferenciais ordinárias ou a derivadas parciais. Seja

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

uma equação diferencial ordinária de ordem n. Uma *solução* desta equação é uma função real $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \to y(t)$, $\varepsilon > 0$, que, juntamente com suas derivadas, satisfaz a equação acima. De maneira equivalente, uma *solução* de (1) é um subconjunto $S \subset IR^2$ tal que S seja o gráfico de uma função $y : (\varepsilon, \varepsilon) \to IR$ que satisfaz (1). A partir de agora, vamos considerar as *soluções* da equação (1) como subconjuntos de IR^2. Seja ϕ_a, $a \in IR$ ou $a \in (-\delta, \delta)$, uma família de difeomorfismos de IR^2 tal que $\phi_0 =$ *identidade* e $\phi_{a+b} = \phi_a \circ \phi_b$, para todo a, b em $(-\delta, \delta)$ tal que $a + b \in (-\delta, \delta)$.

Definição (Lie) $\{\phi_\alpha\}$ *estabiliza a equação (1)* se, para cada solução S de (1), $\phi_a(S)$ é solução para todos os valores pequenos de a.

Exemplo: Considere a equação diferencial

$$F(t, y, y') = y' - y = 0 \tag{2}$$

cujas soluções são $S_c = \{ (t, ce^t) : t \in IR \}$, $c \in IR$ é uma constante qualquer.

Seja $\phi_a(t, y) = (t, e^a y)$. Para cada valor real de a, ϕ_a é um difeomorfismo que verifica a condição $\phi_{a+b} = \phi_a \circ \phi_b$. Observe ainda que, para cada $c \in IR$,

$$\phi_a(t, ce^t) = (t, ce^a e^t),$$

sendo portanto $\phi_a(S_c)$ uma nova solução de (2).

A equação (2) admite ainda uma outra família (ψ_b),

$$(\psi_b)(t, y) = (t + b, e^b y),$$

que a estabiliza. De fato, $\psi_b \, o \, \psi_{b'} = (t + b' + b, e^{b'+b} y) = \psi_{b+b'} (t,y)$.
Como

$$\psi_b (t,ce^t) = (t + b, ce^{t+b}) = (x,ce^x)$$

temos $\psi_b (S_c) = S_c$ para cada solução S_c de (2). Portanto, a equação $y' - y = 0$ admite dois grupos ϕ_a, ψ_b, dependentes dos parâmetros a e b que a estabilizam. Agora,

$$\phi_a \, o \, \psi_b (t,y) = \phi_a (t + b, e^b y) = (t + b, e^a e^b y) =$$

$$= \psi_b (t,e^a y) = \psi_b \, o \, \phi_a(t,y);$$

assim, se $\theta(a,b) = \phi_a \circ \psi_b$ então $\theta : IR^2 \to \text{Dif}\,(IR^2)$ é um homomorfismo de grupos, onde em IR^2 estamos considerando a adição usual de pares ordenados e em Dif (IR^2) a composição de funções, o que expressamos dizendo que a equação (2) admite um grupo a 2 - parâmetros. Isto levou Lie a definir o conceito de grupo de Lie.

Definição: Um *grupo de Lie* é uma variedade diferenciável G que admite uma estrutura de grupo tal que a aplicação $(x,y) \in G \times G \to xy^{-1} \in G$ é diferenciável.

Exemplos:

a) $(IR^2, +)$

b) $Gl(n,IR) = \{ A \in IR^{n \times n} : \det A \neq 0 \}$. De fato, $Gl(n,IR)$ é um subconjunto aberto em $IR^{n \times n}$. A aplicação xy^{-1} é uma função racional dos coeficientes x e y, como se deduz da regra de Cramer para inverter matrizes. O denominador de cada função racional é $\det y$, que é diferente de zero. Portanto, se fixarmos em $Gl(n,IR)$ a estrutura diferenciável induzida $Gl(n,IR)$ é grupo de Lie. Note que $Gl(n,IR)$ é um subgrupo de Dif(IR^n).

c) $SL(2,IR) = \{A \in IR^{2 \times 2} : \det A = 1\}$ é um grupo de Lie. De fato, seja $F : IR^{2 \times 2} \to IR$ dada por $F(A) = \det A - 1$.
Então

$$SL\,(2,IR) = \{A \in IR^{2 \times 2} : F\,(A) = 0\}.$$

Agora um pequeno cálculo mostra que $dF_A \neq 0 \; \forall \, A \in SL(2,IR)$; portanto segue do teorema da função implícita que $SL(2,IR)$ é uma subvariedade diferenciável de $IR^{2 \times 2}$. Prosseguindo como no caso de $Gl(n,IR)$ concluímos que $SL(2,IR)$ é um grupo de Lie.

Definição: Um grupo de Lie G *atua em uma variedade diferenciável* M por θ se $\theta : G \to \text{Dif(M)}$ é um homomorfismo de grupos tal que a aplicação

$G \times M \to M$, $(g,m) \to \theta(g)(m)$, é diferenciável.

Por exemplo

a) $Sl(2,IR)$ atua em $H = \{z = x + iy \in C : y > 0\}$ por

$$\theta(g) \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ se } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

b) Também $Sl(2,IR)$ atua em IR pela fórmula

$$\theta_0(g) \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ se } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

c) $Gl(n,IR)$ atua na variedade de polinômios homogêneos, de grau d, em n variáveis pela fórmula

$$[\theta_d(g)f](x_1, \ldots, x_n) = f((x_1, \ldots, x_n)g).$$

d) $SL(2,IR)$ atua no espaço $\mathrm{Hol}(H)$ das funções holomorfas em H pela fórmula

$$[\Phi(g)f](z) = f(\theta(g^{-1}) \cdot z).$$

e) Seja G o grupo das isometrias de IR^n. G atua no espaço $C^\infty(IR^n)$ das funções diferenciáveis em IR^n pela fórmula

$$[\lambda(g)f](x_1, \ldots, x_n) = f(g^{-1}(x_1, \ldots, x_n)).$$

f) Seja G o grupo das transformações conformes de IR^n. Então G atua em $C^\infty(IR^n)$ pela fórmula

$$[\tau(g)f](x) = f(g^{-1}(x)).$$

Observação: Nos exemplos **d, e** e **f,** as variedades são de dimensão infinita. Nesse caso, exigimos apenas a continuidade da aplicação $(g,m) \to \theta(g)(m)$. Em $\mathrm{Hol}(H)$ fixamos a topologia da convergência uniforme em compactos e, em $C^\infty(IR^n)$, a topologia da convergência uniforme em compactos da função e suas derivadas.

Exercício: Verifique que as funções $\theta_d(g)$ $(d \geq 1)$, $\theta(g)$, $\lambda(g)$ e $\tau(g)$ são operadores lineares nas "variedades" M, onde definimos a respectiva ação, e que $\theta_0(g)$ não é um operador linear em IR, exceto em casos muito particulares de g.

É claro que se conhecermos os grupos de Lie que atuam em IR^2 , podemos determinar aqueles que deixam estáveis as soluções de uma equação

$$F(t,y,y', \dots , y^{(n)}) = 0 .$$

Recordamos que um grupo de Lie, atuando em IR^2 , *deixa estável* uma equação se $\theta(g)(S)$ é uma nova solução da equação para cada solução S e cada g próximo da identidade de G.

Suponhamos que um grupo de Lie G tenha dimensão n e deixe estável a equação de ordem n $F(t,y , \dots , y^{(n)}) = 0$. Lie provou o seguinte

Teorema: Se G é solúvel então as soluções de $F(t,y , \dots , y^{(n)}) = 0$ podem ser calculadas usando as operações de soma, produto, composição, exponencial e cálculo de primitivas de funções reais de uma variável real.

Para uma demonstração e descrição do método, consulte [O1, pág. 159].

Para o caso de equações a derivadas parciais não existem teoremas tão gerais.

Em geral, o cálculo de um grupo de Lie que deixa estável uma equação é complicado. Por sorte, Lie descobriu como algebrizar este processo. Para isto, recordamos que se G é grupo de Lie, então os campos vetoriais em G que comutam com as translações à esquerda por elementos de G é uma álgebra de Lie com a operação $[X,Y] = X \circ Y - Y \circ X$. Prova-se que esta álgebra de Lie tem dimensão igual à de G e que dois grupos de Lie são localmente isomorfos se, e só se, suas álgebras de Lie são isomorfas como álgebras. Para conhecer a álgebra de Lie do grupo de Lie G, que deixa estável a equação $F(t,y , \dots , y^{(n)}) = 0$, procede-se assim: pensemos em $G \subset \mathrm{Dif}(IR^2)$; então sua álgebra de Lie $L(G)$ está contida no conjuntos dos campos vetoriais em IR^2 . Um elemento típico X em $L(G)$ é

$$X = \xi(t,y) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(t,y) \frac{\partial}{\partial y} .$$

Seja $X_{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \phi^{(i)} \frac{\partial}{\partial y^{(i)}}$ com

$$\phi^{(0)} = \xi , \ \phi^{(1)} = \phi , \ \phi^{(j)} = D(\phi^{(j-1)}) - D(\xi) y^{(j)} \ (j \geq 2) ,$$

onde $Dh = \frac{\partial h}{\partial y} + \sum_k y^{(k+1)} \frac{\partial h}{\partial y^{(k)}}, \quad h = h(t,y,y^{(1)},y^{(2)}, \dots) .$

Então $\qquad X \in L(G) \Leftrightarrow X_{(n)} F = \sum_{i=0}^{n} \phi^{(i)} \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}}$

é igual a zero nos pontos $(t,y,y',\ldots y^{(n)})$ onde $F(t,y,\ldots,y^{(n)})=0$, [O1,Teor. 2.71].

Exemplo A equação

$\dfrac{ty'-y}{t+yy'} = G(t^2+y^2)$ é invariante pelo grupo das rotações com centro (0,0) em IR^2.

De fato,

$$\phi_\theta(t,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}; \quad \phi_{\theta+\tau} = \phi_\theta \circ \phi_\tau .$$

O campo tangente é $X = -y\dfrac{\partial}{\partial t} + t\dfrac{\partial}{\partial y}$.

$$X_{(1)} = -y\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial y} + (1+(y')^2)\frac{\partial}{\partial y'} .$$

Um cálculo direto mostra que $X_{(1)}F=0$ onde $F=0$ sendo

$$F(t,y,y') = \frac{ty'-y}{t+yy'} - G(t^2+y^2) .$$

Portanto a equação diferencial pode ser integrada. Se escrevermos esta equação na forma

$$(t-yG)dy-(y+tG)dt=0$$

verificamos que $1/(x^2+y^2)$ é um fator integrante.

Em geral, se o sistema $x'=P(x,y)$, $y'=Q(x,y)$ admite um grupo (ϕ_τ) a um parâmetro que o estabiliza, um fator integrante da 1-forma $Qdx-Pdy$ é $\dfrac{1}{P\eta-Q\xi}$, se $\left.\dfrac{d\phi_\tau}{dt}\right|_{t=0} = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$ e $P\eta - Q\xi \neq 0$. Portanto a equação pode ser resolvida por quadraturas [O1, pág. 138].

Deve-se ter cuidado com o fato de sistemas equivalentes poderem ter grupos de Lie, que os estabilizam, muito diferentes. Por exemplo o grupo de Lie da equação $y''=0$ tem como álgebra de Lie $\{X = \xi\dfrac{\partial}{\partial t} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}\}$,

$$\xi(t,y) = a_1 + a_2t + a_3y + a_4ty + b_4t^2$$

$$\eta(t,y) = b_1 + b_2t + b_3y + b_4ty + a_4t^2 ,$$

onde $a_1, \ldots b_4$ são números reais arbitrários.

Um sistema equivalente a $y'' = 0$ é $\frac{dy_1}{dt} = y_2$, $\frac{dy_2}{dt} = 0$.

Este sistema é estabilizado por uma álgebra de Lie de dimensão infinita, a saber

$$X_\xi = \xi\frac{\partial}{\partial t} + \xi y_1^2 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

$$Y_{g,h} = (y_1 g + h)\frac{\partial}{\partial y_1} + y_2 g \frac{\partial}{\partial y_2}$$

onde $\xi = \xi(t, y_1, y_2)$, $g = g(y_1 - ty_2, y_2)$, $h = h(y_1 - ty_2, y_2)$ são funções arbitrárias.

Lie provou que o grupo de Lie que estabiliza uma equação de 2ª ordem tem dimensão menor ou igual a 8, sendo de dimensão 8 para a equação $y'' = 0$.

Problema: Prove que o grupo de Lie estabiliza

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

é de dimensão finita e obtenha uma estimativa da dimensão em função de n e F.

Esta teoria também pode ser aplicada a equações diferenciais ordinárias com várias incógnitas ou a equações diferenciais parciais com as devidas modificações nas definições. Isto motivou Lie propor o seguinte

Problema: Dada uma variedade diferenciável M encontrar todos os grupos de Lie G que atuam em M. Isto é, encontrar todos os subgrupos $G \subset \text{Dif}(M)$ tais que G é um grupo de Lie e a aplicação $(g,m) \in G \times M \to g(m) \in M$ é diferenciável.

Este problema foi resolvido por Lie nos casos em que dim $M = 1$ ou 2; por Lie- Page para dim $M = 3$ ou 4; por Kowaleski-Beutner, se dim $M = 5$ ou 6, veja [Hel].

Como $GL(n, IR^n) \subset \text{Dif}(IR^n)$, o problema acima para $M = IR^n$ sugere o seguinte problema mais simples: determinar os subgrupos de Lie de $GL(n, IR^n)$. Este último problema ficará resolvido se formos capazes de resolver o problema de Killing (1880):

Fixado um grupo de Lie G, determinar os inteiros n tais que $G \hookrightarrow GL(n, IR)$ isto é, encontrar as ações θ de G em IR^n tais que $\theta(g)$ seja um operador linear bijetivo (isomorfismo) em IR^n.

Para grupos de Lie compactos o problema de Killing foi resolvido por Cartan-Weyl [Wa]. A título de exemplo, descreveremos todas as representações irredutíveis de $SL(2, IR)$. Cabe ressaltar que para um grupo de Lie solúvel ou nilpotente não são conhecidas todas as suas representações.

Definimos uma *representação* de um grupo de Lie G em IR^n como sendo um homomorfismo $\theta : G \to GL(n,IR)$ tal que a aplicação

$$(x,y) \in IR^n \times G \to \theta(g)(x) \in IR^n$$

é contínua. Por definição uma representação (θ, IR^n) é *irredutível* se para todo vetor não-nulo $v \in IR^n$ o subespaço gerado por $\{\theta(g)v,\ g \in G\}$ é IR^n. Ou, de modo equivalente, se para todo subespaço W de IR^n tal que

$$\theta(g)W \subset W, \quad \forall g \in G, \quad \text{tem-se que } W = \{0\} \text{ ou } W = IR^n.$$

Agora descrevemos as representações irredutíveis de $SL(2, IR)$. Para cada $n \geq 1$, seja V_{n+1} o espaço das funções polinomiais em IR^2, homogêneas de grau n; portanto $\dim V_{n+1} = n + 1$. Seja $\pi_{n+1} : SL(2,IR) \to GL(V_{n+1})$ definida por

$$[\pi_{n+1}(g)f](x_1,x_2) = f((x_1,x_2)g).$$

Seja (π_1, IR) a representação de $SL(2,IR)$ em IR, definida por $\pi_1(g)\,v = v$ $\forall\, g \in G$ e $v \in IR$.

Teorema a) (π_{n+1}, V_{n+1}) é uma representação irredutível de $SL(2,IR)$ para cada $n \geq 0$.

b) Estas são todas as representações irredutíveis a menos de equivalência.

2. Representações de grupos e operadores diferenciais

Suponhamos agora que G atua em M por θ. Seja D um operador diferencial em M que comuta com G isto é, se $\theta_g f$ denota a aplicação $(\theta_g f)(x) = f(\theta(g^{-1})x)$, tem-se que $D(\theta_g f) = \theta_g(Df)$, para cada $f \in C^\infty(M)$ e $g \in G$. Então Ker$D$, ou, mais geralmente, se $\lambda \in C$ está fixado, $E_\lambda := \{f : Df = \lambda f\}$ tem a propriedade de que se $f \in E_\lambda$ então $\theta_g f \in E_\lambda$, pois

$$D(\theta_g f) = \theta_g(Df) = \theta_g(\lambda f) = \lambda\theta_g(f),$$

para $f \in E_\lambda$. Se fixamos em $C^\infty(M)$ a topologia da convergência uniforme em compactos da função e suas derivadas, um problema que surge é analisar a irredutibilidade para a representação de G em E_λ definida por $\theta_g f$, isto é, se para todo h em E_λ, não nulo, o subespaço gerado por $\{\theta_g h : g \in G\}$ é denso em E_λ.

A resposta depende de G, M, λ e D. A título de exemplo, consideramos:

$M = IR^n$, $G =$ grupo das isometrias euclideanas, $\theta =$ inclusão de G em $\text{Dif}(IR^n)$ e $D = \Delta$ o laplaciano usual. Como estas hipóteses temos

Teorema (Helgason) [Hel]. Se $\lambda \neq 0$, a representação de G em E_λ é irredutível.

Se $\lambda = 0$, E_0 consiste do espaço das funções harmônicas em IR^n e a resposta é negativa, já que as funções polinomiais harmônicas de grau d formam um subespaço invariante por θ_g (g uma isometria de IR^n). No entanto, se considerarmos o grupo H das transformações conformes em IR^n, então Helgason demonstrou que H atua escalarmente irredutível em IR^n, isto é, os únicos operadores lineares contínuos em E_0 que comutam com todos os operadores definidos por H são os múltiplos da identidade.

Desta maneira as representações de grupos contribuem para construir soluções de equações diferenciais e, por outro lado, as equações diferenciais contribuem para a construção de exemplos concretos de representações de grupos.

3. Aplicações à Teoria dos Números

Euler demonstrou a existência de infinitos números primos usando a identidade

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in IP} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

$$IP = \{2,3,5,7,\ \ldots\},\quad s > 1,$$

raciocinando da maneira seguinte: se tivesse um número finito de números primos, o segundo membro, para $s = 1$, seria um número finito, entretanto, o primeiro membro é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Absurdo!

Dirichlet usou esta idéia e representações de grupos para provar o seguinte

Teorema: Se a e b são números naturais, $a < b$ e $mdc(a,b) = 1$, então a progressão aritmética $\{a + nb\ ,\ n \in \mathbb{Z}\}$ contém infinitos primos.

[Por exemplo, como todos os primos, exceto 2, são ímpares, a progressão aritmética $1 + 2n$ contém infinitos números primos].

Para demonstrar o teorema, Dirichlet procedeu mais ou menos do seguinte modo:

Fixe a e b naturais, com $a < b$ e mdc $(a,b) = 1$, e seja

$$\theta(p) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \text{ é primo em } \{a+nb\}, \\ 0, & \text{caso contrário }. \end{cases}$$

Portanto se provarmos que $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\theta(n)}{n} = \infty$ concluiremos que existem infinitos

primos na progressão aritmética $\{a+nb\}$. Agora, $U(\mathbb{Z}_b)$ - elementos inversíveis em $(\mathbb{Z}_b\ ,.)$ - é um grupo abeliano, portanto admite $h =$ cardinal $(U(\mathbb{Z}_b))$ representações $\chi_1 = 1$, $\chi_2 ,..., \chi_n$, em C, ou seja $\chi_i : U(\mathbb{Z}_b) \to C^*$ e $\chi_j\ (nm) = \chi_j(n)\ \chi_j(m)$. Dirichlet as construiu explicitamente. Como na teoria das séries de Fourier (descoberta quase na mesma época em que este teorema foi demonstrado) Dirichlet prova que $\theta = C_1\chi_1 + \ldots + C_h\chi_h$, C_j números complexos. Além disso, tendo definido $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\chi(n)}{n^s}$, onde $s \geq 1$ é inteiro e $\chi : U(\mathbb{Z}_b) \to C^*$ é uma representação, êle demonstrou também que:

i) $C_1 \neq 0$, usando a teoria de formas quadráticas desenvolvidas nas "Disquisiones" de Gauss que eram recém- nascidas!

ii) $L(1,\chi_j)$ é um número finito para $j \geq 2$.

Como

$$L(1,\chi_1) = \sum_{\substack{o<r<b \\ \mathrm{mdc}(r,b)=1}} \ \sum_{n \geq 0} \frac{1}{r+nb} = \infty ,$$

tem-se que $\sum_{n \geq 1} \dfrac{\theta(n)}{n} = \infty$.

Esta foi talvez a primeira aplicação da análise harmônica à teoria dos números.

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n par, $\{v_1,\ldots,v_n\}$ uma base de V , $L = \{v \in V : v$ é combinação linear com coeficientes inteiros de $v_1 , \ldots v_n\}$. Por último, fixemos uma forma quadrática q em V tal que $q\ (v)$ é inteiro para cada v em L.

Atualmente, trabalha-se intensamente no seguinte

Problema: Para cada natural m estimar o número $r_L(m)$ de elementos do conjunto $\{v \in L : q(v,v) = 2m\}$.

Uma idéia clássica para atacar este problema é considerar a série

$$g(z) = \sum_{m \geq 0} r_L(m) e^{2\pi i m z} , \quad \Im(z) > 0 .$$

Como as propriedades de g se refletem nos coeficientes da série de potências que a define, segue que obteremos informações sobre $r_L(m)$.

Usando séries e transformadas de Fourier prova-se que

$$g(-1/z) = (iz)^{n/2}\, g(z)$$

É evidente que $g(z+1) = g(z)$. Agora olhemos isto sob um outro ângulo. Lembramos que o grupo $SL(2,IR)$ atua no semiplano superior H por

$$\theta(g)\cdot z = \frac{az+b}{cz+d}\ , \quad \text{se } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$SL(2,IR)$ contém o subgrupo $SL(2,\mathbb{Z}) := \{A \in \mathbb{Z}^{2\times 2} : \det A = 1\}$. Este subgrupo é gerado pelas matrizes [L]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

As equações acima implicam que

$$g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{n/2}\ i^{\,n/2}\, g(z)\ , \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})\ ,$$

ou seja

$$(cz+d)^{-n/2}\ i^{-n/2}\, g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = g(z)\ , \quad \forall g \in SL(2,\mathbb{Z})\ .$$

Consideramos agora a seguinte observação devida a Bargman [L].

Seja W o espaço das funções holomorfas no semiplano superior H. Fixemos n natural par. Para cada $f \in W$, seja

$$[\pi_n(x)\cdot f]\,(z) = (cz+d)^{-n/2}\, i^{-n/2} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \quad x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,IR)\ .$$

Então $\pi_n(x)$ é um operador linear de W em W e $\pi_n(x_1x_2) = \pi_n(x_1)\pi_n(x_2)$ $\forall\, x_1,x_2$, ou seja, (π_n,W) é uma representação de dimensão infinita de $SL(2,IR)$ e nossa função g é um vetor fixo pelo subgrupo $SL(2,\mathbb{Z})$. Este problema e outros problemas da teoria dos números motivaram o seguinte

Problema: Se G é grupo de Lie, $\Gamma \subset G$ um subgrupo discreto e (π,W) uma representação de G, calcular

$$S = \dim_{\mathbb{C}} \{v \in W : \pi(\gamma)v = v,\ \forall\gamma \in \Gamma\}.$$

No caso de representações integráveis de um grupo G semi-simples e

G/Γ compacto, é possível calcular o número S. Ver [Sc]. Para o caso G/Γ não compacto, pouco se conhece [L1].

Uma das últimas aplicações de representações de grupos de Lie à teoria dos números constitui o seguinte resultado de Margulis [M].

Seja $q(x_1,\ldots,x_n)=\sum a_{ij}\,x_i\,x_j$ uma forma quadrática não degenerada em $I\!R^n$, $n\geq 2$. É fácil verificar que se existem λ em $I\!R$, b_{ij} em $\mathbb{Q}$ tais que $a_{ij}=\lambda b_{ij}$ $\forall i,j$, então $\{q(v) : v\in \mathbb{Z}^n\}$ é um subconjunto discreto de $I\!R$.

Margulis provou a recíproca:

Se $n\geq 3$, e $\{q(v) : v\in \mathbb{Z}^n\}$ é um subconjunto discreto de $I\!R$ então existem λ em $I\!R$ e b_{ij} em $\mathbb{Q}$ taisque $a_{ij}=\lambda b_{ij}$ $\forall\, i\,,j$. Isto é, q é proporcional a uma forma racional.

Outro problema em representações de grupos de Lie é o seguinte:

Todo grupo de Lie G admite uma medida de Radon μ tal que $\mu(xA)=\mu(A)$, $\forall\, x\in G$, A mensurável. Esta medida é única, a menos de constantes positivas (Teoria de Haar). Fixemos uma dessas medidas dg. Uma representação (π,V) em um espaço de Hilbert $(V,<,>)$ se diz de quadrado integrável se

$$\int_G |<\pi(g)v,w>|^2\,dg<\infty \qquad \forall v,w\in V.$$

(Aqui supomos que G não tem centro, o que se verifica se G é simples).

Se G é um grupo de Lie simples, Harish-Chandra [HC] determinou quando G admite representações de quadrado integrável e deu uma parametrização deles.

Se agora $H\subset G$ um grupo de Lie simples, um problema de interesse é: decompor V como H - representações, denotadas por $\mathrm{res}_H(V)$, V visto como H - módulo.

Pela teoria espectral tem-se que

$$\mathrm{res}_H(V)=\sum_{i=1}^{\infty} n_iV_i+\int_X t_\tau W_\tau dr\,,$$

onde V_i, W_τ serão representações unitárias de H, $n_i\in N\cup\{\infty\}$, $t_\tau\in I\!R\cup\{\infty\}$.

Em [V] provamos que V_i são representações de quadrado integrável de H e W_τ são representações temperadas de H.

Por exemplo, se

$$G = SO\,(n,1) = \left\{ A \in IR^{(n+1)\times(n+1)} : {}^t A \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

então segue de [HC] que G admite representação de quadrado integrável se, e só se, n é par. Seja $n = 2k$ e seja $H = \{A \in G : A - e_1 = e_1\}$. Então $H \cong SO(2k-1,1)$ e portanto H não tem representações de quadrado integrável. Assim

$$\mathrm{res}_{\mathrm{H}}(V) = \int_X t_\tau \, W_\tau \, dr \, .$$

Usando teoremas de Harish-Chandra podemos provar que W_τ é uma representação que denominamos série principal unitária. O problema que subsiste é determinar t_τ ; cremos que $t_\tau = 1$ e que $\mathrm{res}_{\mathrm{H}}(V)$ é uma representação induzida de um subgrupo maximal compacto de H em H .

A ligação de representações de quadrado integrável para $G = SO(2n,1)$ e operadores diferenciais é a seguinte:

G atua na bola unitária B_n de IR^n por transformações homográficas. Para cada representação de quadrado integrável de G Schmid em [Sc] define um espaço F, de funções em B_n a valores vetoriais, e um operador elíptico D em F, de modo que o espaço das funções de quadrado integrável que são soluções da equação $Df = 0$ constitui um modelo da dita representação.

Bibliografia

[E] Endler, Otto, *"Teoria dos Grupos"*, Monografias de Matemática nº 44 IMPA.

[HC] Harish-Chandra, *Discrete Series for semisimple Lie Groups II.* Acta Mathematicas Vol. 116 (1966) 1-111.

[Hel] Helgason, S. *Invariant differential equations on homogeneous manifolds.* Bull Amer. Math. Soc. 83 (1977) 751-774.

[L] Lang, *SL (2, IR)*, Springer Verlag 1987.

[L1] Labesse and Shuverner, *Arithmetic groups and cohomology.* Lecture Notes in Mathematics 1447. Springer Verlag.

[M] Margulis, G. A. *"Formes quadratiques indéfines et flots unipotents sur les espaces homogénes"* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (304) 1987,249-253.

[Ol] Olver, P. *Applications of Lie Groups to differential equations.* Springer Verlag 1986.

[Sc] Schmid, W. *On a conjecture of Langlands* Annals of Math. Vol. 93 (1971). 1-42.

[V] Vargas, J. *Restriction of some unitary representations.* A aparecer em Journal of Funct. Analysis.

[Wa] Wallach, N. *Harmonic Analysis on homogeneous spaces.* Marcel Deker - New York, 1974.

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília
70910 - Brasília - DF
Brasil