

Sistemas não Lineares e Fractais

Lúcio Tunes dos Santos

RESUMO Neste trabalho utilizamos recursos gráficos computacionais para investigar o comportamento caótico de alguns métodos iterativos para resolver sistemas não lineares de dimensão dois. Exibimos as regiões de convergência para mostrar a geometria fractal envolvida.

1. Introdução

Todos os que trabalham com métodos iterativos para resolver sistemas de equações não lineares deparam-se, em algum momento, com teoremas de convergência local do tipo: "Se o ponto inicial é tomado suficientemente próximo de uma solução então o método converge para esta solução". Assim, pensando em duas dimensões, ao redor de cada solução do sistema existe uma região que "atrai" a seqüência gerada pelo método iterativo se o ponto inicial estiver nessa região.

Porém, o que acontece se o ponto inicial não for tomado em nenhuma dessas regiões? O teorema de convergência local não garante nada e, portanto, o método pode convergir ou não. Se não convergir tudo bem. Mas se convergir, para qual solução a seqüência gerada será "atraída". "Para a mais próxima!", dirão os mais afoitos. "Depende!", dirão os mais cautos. Para esses últimos "Depende de quê?". Mais ainda, como geralmente (e porque não dizer nunca) não temos nenhum conhecimento a priori das soluções e muito menos de quão próximo estamos de uma, não podemos sequer afirmar se o ponto inicial está ou não em uma dessas regiões. Claramente, se algum termo da seqüência gerada pertencer a uma dessas regiões, a solução correspondente irá atrair o resto da seqüência fazendo com que o método convirja. A partir dessa observação, podemos afirmar que a "região de convergência" do método iterativo é maior do que a prevista pelo teorema de convergência local.

O objetivo deste trabalho é discutir as questões levantadas acima, investigando o comportamento de alguns métodos iterativos aplicados a sistemas não lineares relativamente simples em duas dimensões. O surpreendente é que fre-

qüentemente esses métodos apresentam um comportamento caótico: uma pequena perturbação em um parâmetro muda completamente o resultado final.

2. Newton e os Fractais

No final do século XIX A. Cayley publicou vários artigos sobre o Método de Newton para encontrar os zeros de uma função complexa. Cayley procurou dividir o plano complexo em regiões onde qualquer ponto, tomado como aproximação inicial para o método de Newton, faz com que a seqüência de pontos gerada pelo método convirja para um determinado zero da função. Mais precisamente, Cayley conseguiu determinar tais regiões para a função $F(z) = z^2 - c$. Ao tentar abordar outras funções como, por exemplo, $F(z) = z^3 - 1$, ele se deparou com cálculos muito complexos, o que acabou interrompendo suas pesquisas.

No início deste século, Gaston Julia e Pierre Fatou publicaram uma série de artigos sobre o estudo de propriedades iterativas tendo como um dos objetivos o Método de Newton. Eles provaram que a convergência desse método pode não ser tão simples: aplicando o método a uma dada função é possível que haja seqüências que convirjam, que sejam periódicas ou ainda que divirjam. Eles observaram ainda que as fronteiras entre as regiões de convergência eram curvas extremamente complicadas.

Na década de 60, Benoit Mandelbrot começou a estudar alguns conjuntos irregulares da natureza altamente interessantes tais como as galáxias e os flocos de neve. Ele conseguiu perceber certos padrões nas irregularidades apresentadas por essas formas e assim definiu a noção de CONJUNTO FRACTAL. Essencialmente, um conjunto fractal é um conjunto que possui a propriedade de auto-similaridade, isto é um número finito de translações de qualquer subconjunto, não importa o quão pequeno, recria o conjunto inteiro (para maiores detalhes veja Bridger [3], Edgar [5] e Mandelbrot [6]). Posteriormente Mandelbrot retomou os trabalhos de Fatou e Julia utilizando computadores para desenhar as regiões estudadas por eles de maneira a observar o comportamento caótico que produz a estrutura fractal.

Atualmente existe uma extensa bibliografia sobre o comportamento do Método de Newton para o cálculo de zeros de funções complexas, que é equivalente a encontrar a solução de um sistema de equações reais de dimensão dois (veja, por exemplo, Arney e Robinson [1], Barnsley et al [2], Peitgen e Richter [8] e Vrscay [10]).

3. Métodos Iterativos para Sistema Não Lineares

Consideremos o sistema não linear de dimensão 2,

$F(z) = 0, F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $F \in C^1$. Denotaremos por $F'(x)$ o Jacobiano de F

calculado em x , isto é, $F_{ij}'(x) = \partial F_i(x) / \partial x_j$, $i, j = 1, 2$.

Todos os métodos iterativos que analisaremos neste trabalho têm a forma geral: dado $x^0 \in \mathbb{R}^2$, $x^{k+1} = \phi(x^k)$, $k = 0, 1, \dots$ onde ϕ é a função de iteração correspondente ao método utilizado. Separaremos os métodos em três grupos: tipo Newton, quase-Newton e de projeção.

3.1. Métodos tipo Newton

No método de **Newton** a nova aproximação x^{k+1} é dada pela solução do sistema linear $L_k(x) = F(x^k) + F'(x^k)(x - x^k) = 0$. $L_k(x)$ é a aproximação de Taylor de ordem 1 de F na vizinhança de x^k . Supondo $F'(x^k)$ inversível, temos que

$$x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1}F(x^k).$$

A Figura 1a ilustra geometricamente a iteração acima.

O método de Newton é o método mais popular e eficiente para a resolução de sistemas não lineares. O custo, porém, é avaliar o Jacobiano e resolver um sistema linear a cada iteração ($F'(x^k)s^k = F(x^k)$, $x^{k+1} = x^k - s^k$). A taxa de convergência do método de Newton é quadrática.

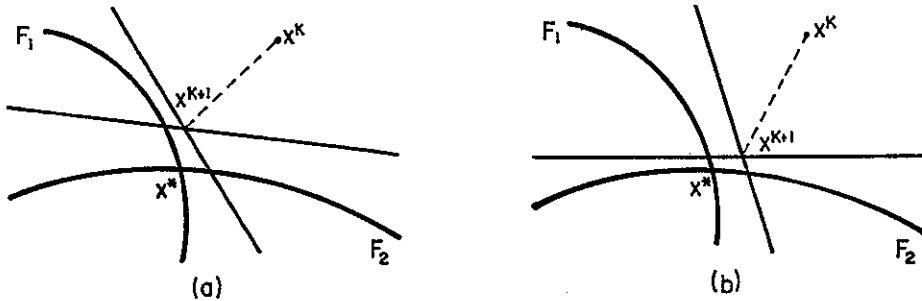


Fig. 1: Interpretação geométrica dos métodos: (a) Newton e (b) quase-Newton.

O método de **Newton discreto** consiste em aproximar o Jacobiano de F através de diferenças finitas, isto é, tomamos

$\partial F_i(x) / \partial x_j \cong (F_i(x + he_j) - F_i(x)) / h$ onde $h > 0$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. A interpretação geométrica e a convergência do método de Newton discreto é muito semelhante a do método de Newton.

3.2. Métodos quase-Newton

A idéia central dos métodos quase-Newton (veja Martínez [7]) é baratear a iteração do método de Newton. Tais métodos obedecem a fórmula geral:

$$x^{k+1} = x^k - B_k^{-1} F(x^k),$$

onde a matriz B_k não é necessariamente a matriz $F'(x^k)$ como no método de Newton, mas uma matriz "parecida" com esta. Existem vários métodos quase-Newton na literatura. Concentraremos nossa atenção em apenas dois deles. O primeiro, conhecido como primeiro método de Broyden, ou simplesmente, **Broyden 1**, atualiza as matrizes B_k da seguinte maneira:

$$B_{k+1} = B_k + (q_k - B_k p_k) p_k' / p_k' p_k,$$

onde $q_k = F(x^{k+1}) - F(x^k)$, $p_k = x^{k+1} - x^k$ e $B_0 = I$ (matriz identidade). O segundo método de Broyden, **Broyden 2**, atualiza diretamente as inversas das matrizes que aparecem na fórmula, ou seja,

$$H_{k+1} = H_k + (p_k - H_k q_k) q_k' / q_k' q_k,$$

onde $H_k \equiv B_k^{-1}$ e $H_0 = I$.

Geometricamente, em ambos os métodos, x^{k+1} é a solução do sistema linear proveniente de uma aproximação linear de F , não necessariamente a de Taylor, na vizinhança de x^k (veja a Figura 1b). A convergência dos métodos de Broyden 1 e 2 quando ocorre, é superlinear.

3.3. Métodos de Projeção

Apresentaremos aqui dois métodos dessa classe de algoritmos: o método de Kaczmarz não linear e o de Cimmino não linear (veja Martínez [7] e Santos [9]). A característica principal desses métodos, também chamados de métodos de ação por linhas (Censor [4]), é que podemos trabalhar com uma equação de cada vez, sem a necessidade de armazenar o sistema por completo.

Uma iteração do método de **Kaczmarz não linear** é dada por

$$\tilde{x}^k = x^k - F_1(x^k) \nabla F_1(x^k) / \|\nabla F_1(x^k)\|^2,$$

$$x^{k+1} = \tilde{x}^k - F_2(\tilde{x}^k) \nabla F_2(\tilde{x}^k) / \|\nabla F_2(\tilde{x}^k)\|^2$$

onde $F'(x) = [\nabla F_1(x), \nabla F_2(x)]'$ e $\|y\|^2 = y'y$.

O significado geométrico da iteração acima é o seguinte: \tilde{x}^k é a projeção ortogonal de x^k no hiperplano correspondente a aproximação linear de F_1 na vizinhança de x^k e x^{k+1} é a projeção ortogonal de \tilde{x}^k no hiperplano correspondente a aproximação linear de F_2 na vizinhança de \tilde{x}^k (veja a Figura 2a).

O método de **Cimmino não linear** é uma versão paralela do método de Kaczmarz. A iteração é dada por

$$\tilde{x}^k = x^k - F_1(x^k) \nabla F_1(x^k) / \|\nabla F_1(x^k)\|^2,$$

$$\hat{x}^k = x^k - F_2(x^k) \nabla F_2(x^k) / \|\nabla F_2(x^k)\|^2,$$

$$x^{k+1} = \lambda \bar{x}^k + (1 - \lambda) \hat{x}^k,$$

onde $0 < \lambda < 1$ (neste trabalho adotamos $\lambda = 1/2$). Nas fórmulas acima, x^{k+1} é uma combinação convexa entre as projeções ortogonais de x^k nos hiperplanos gerados pelas aproximações lineares de F_1 e F_2 em torno de x^k (veja a Figura 2b). A convergência dos métodos de Kaczmarz e Cimmino não lineares é linear.

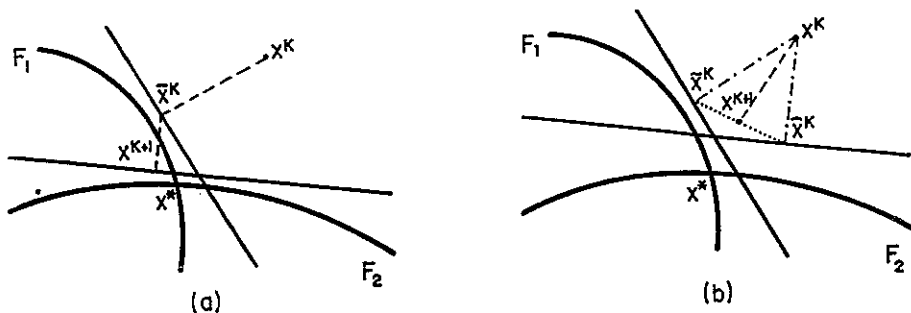


Figura 2: Interpretação geométrica dos métodos: (a) Kaczmarz e (b) Cimmino.

A convergência de todos esses métodos depende claramente da localização do ponto inicial. Pode não haver convergência (a sequência gerada vai para ∞ ou é periódica) para pontos iniciais perto da fronteira que separa duas regiões que convergem para soluções diferentes. Essas regiões de convergência são chamadas “bacias de atração” e as soluções são chamadas “atratores”. As fronteiras comuns a essas bacias de atração constituem um “conjunto de Julia”.

No caso do método de Newton, quando aplicado a sistema polinomial, o conjunto de Julia é dado pelo fecho do conjunto dos pontos tais que tomados como pontos iniciais, para algum k finito $F'(x^k)$ é singular (Barnsley et al [2]). Para os outros métodos não se conhecem resultados semelhantes mas, como poderemos observar na próxima seção, os conjuntos de Julia para os outros métodos parecem estar “sintonizados” com o conjunto de Julia do método de Newton.

4. Exemplos computacionais gráficos

Considerando que a tela do computador representa uma região R do plano Euclidiano, associamos a cada solução x^* de $F(x) = 0$ uma cor diferente das associadas a qualquer outra solução. Seja M o número máximo de iterações

permitidas e $\varepsilon > 0$ a precisão desejada. Tomamos cada $x \in R$ como uma aproximação inicial para o método iterativo em estudo e se $\|x^k - x^*\| < \varepsilon$ para algum $\|x^k - x^*\| < \varepsilon$ para algum $k \leq M$ associamos a x a cor correspondente a x^* e alternamos a tonalidade de acordo com o valor de k ; caso contrário associamos uma cor diferente das associadas as soluções.

O resultado, devido a computação numérica e a erros de arredondamento, é uma aproximação da região de convergência em R e inclui o conjunto de Julia. Construímos também uma cópia dessas regiões, onde a cor associada a cada $x \in R$ está relacionada com o número de iterações k . Temos assim dois mapas para cada método: "Para onde convergiu" e "Como convergiu".

Em nossos experimentos adotamos $\varepsilon = 10^{-5}$ e $M = 20$ para os métodos tipo Newton, $M = 50$ para os quase-Newton e $M = 100$ para os métodos de projeção.

A implementação computacional foi feita em um micro-computador AT-386 Turbo Pascal 6.0 com uma resolução de 640×480 pixels e 16 cores. As figuras deste trabalho são versões em preto e branco com tonalidades de cinza para diferenciar as regiões. Os pontos iniciais que não causam convergência são mostrados em branco.

4.1. Sistema quadrático

Consideremos as partes real e imaginária da equação complexa $z^2 - 1 = 0$, fazendo $z = x_1 + ix_2$:

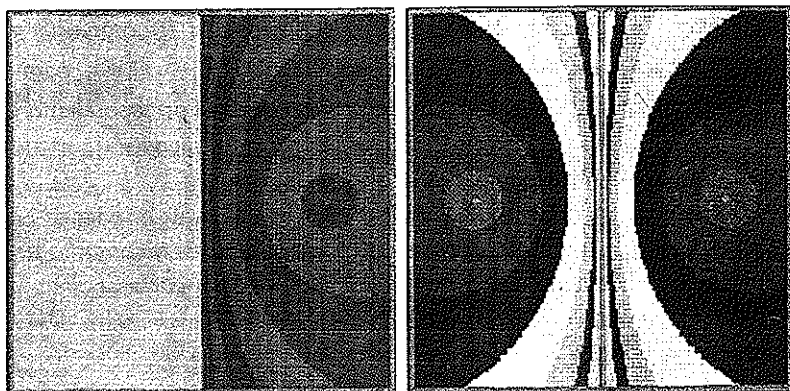
$$F(x) = \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 \\ 2x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

Claramente as soluções são $(-1,0)$ e $(1,0)$. As regiões de convergência para o domínio de interesse, $-1.5 \leq x_1 \leq 1.5$ e $-1.5 \leq x_2 \leq 1.5$ são mostradas nas Figuras 3 e 4.

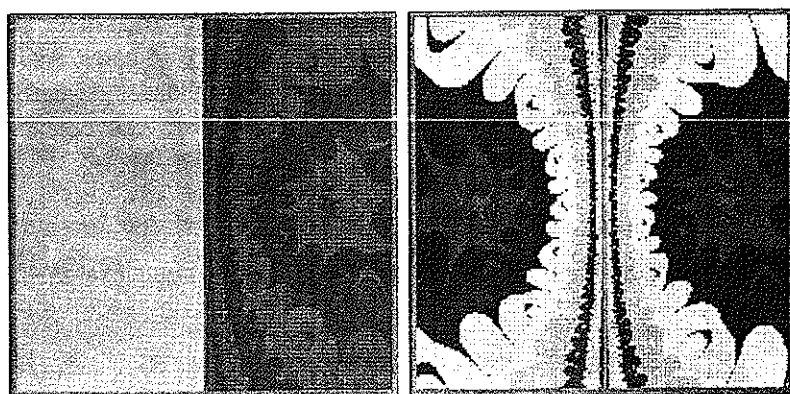
Para os métodos tipo Newton não ocorre o caos, há somente duas bacias de atração: se $x_1^0 > 0$, os métodos convergem para $(1,0)$ e se $x_1^0 < 0$, convergem para $(-1,0)$. O eixo x_2 é o conjunto de Julia correspondente.

Já para os métodos quase-Newton o comportamento é bem diferente. O conjunto de Julia é altamente complicado sendo impossível prever o comportamento das seqüências geradas. Podemos ter dois pontos iniciais tão próximos quanto se queira, e cada um deles levar a convergência para soluções diferentes. Notemos que há uma simetria em relação ao eixo x_1 .

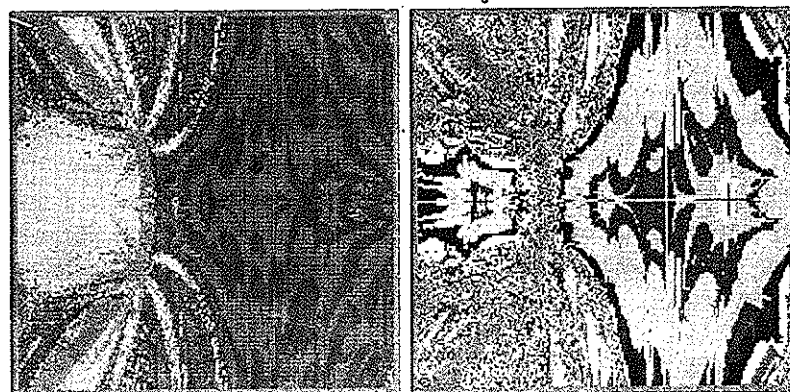
Para este sistema, os métodos de projeção têm um comportamento muito parecido com os métodos tipo Newton, a menos da região em torno do eixo x_2 .



(a)

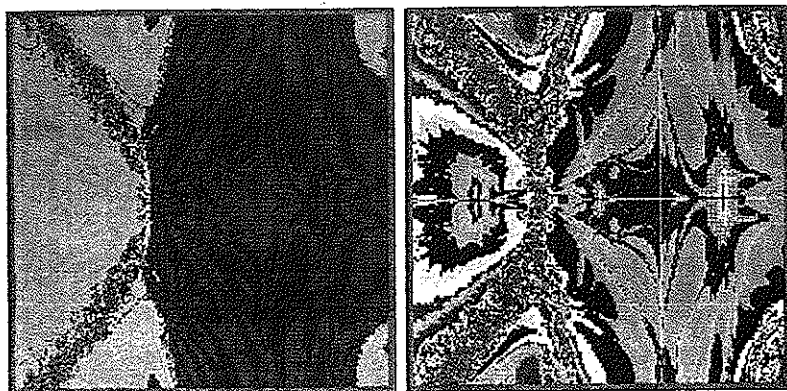


(b)

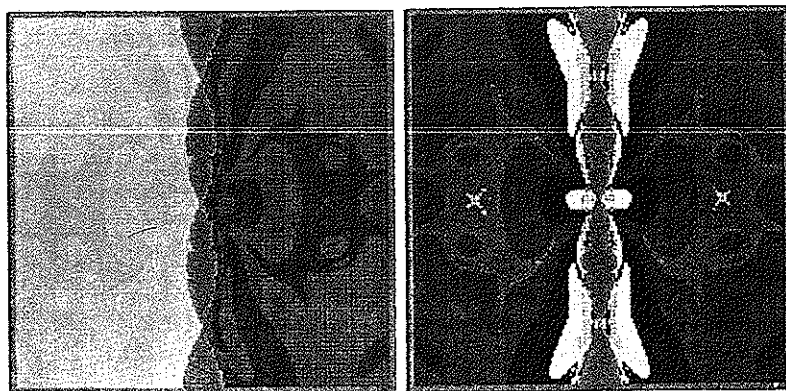


(c)

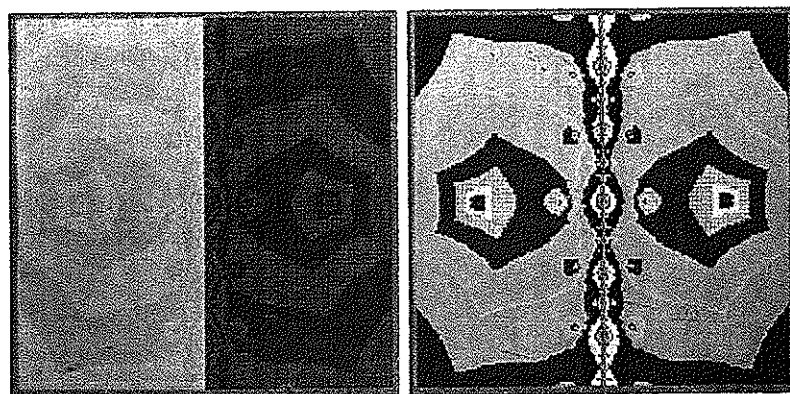
Figura 3: Regiões de convergência para o sistema quadrático. Métodos: (a) Newton, (b) Newton discrto e (c) Broyden 1.



(a)



(b)



(c)

Figura 4: Regiões de convergência para o sistema quadrático. Métodos: (a) Broyden2, (b) Kaczmarz e (c) Cimmino.

O surpreendente em todos os métodos são os padrões que aparecem nas regiões de convergência quando observamos o número de iterações. Cada método tem um padrão diferente, porém semelhantes quando analisados por grupos. Outra observação importante é que o número de iterações cresce a medida que o ponto inicial se aproxima de alguma fronteira.

4.2. Sistema cúbico

Consideremos novamente uma equação complexa $z^3 - 1 = 0$ que pode ser transformada no sistema não linear:

$$F(x) = \begin{cases} x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1 = 0 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

As soluções são $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(1,0)$. As regiões de convergência no domínio $R = [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ estão ilustradas nas Figuras 5 e 6.

Nos métodos tipo Newton e de projeção o comportamento caótico na fronteira das regiões é bem aparente e mostram uma simetria bem definida. Novamente, o comportamento dos métodos quase-Newton é extremamente diferente dos outros dois grupos. Outro aspecto interessante é que a seqüência gerada por qualquer um dos métodos pode convergir a soluções em regiões opostas no domínio ignorando completamente soluções mais próximas.

Analisando as regiões de convergência em função do número de iterações, vemos que os comportamentos dos grupos são bem diferentes mas, novamente, métodos do mesmo grupo tem padrões semelhantes.

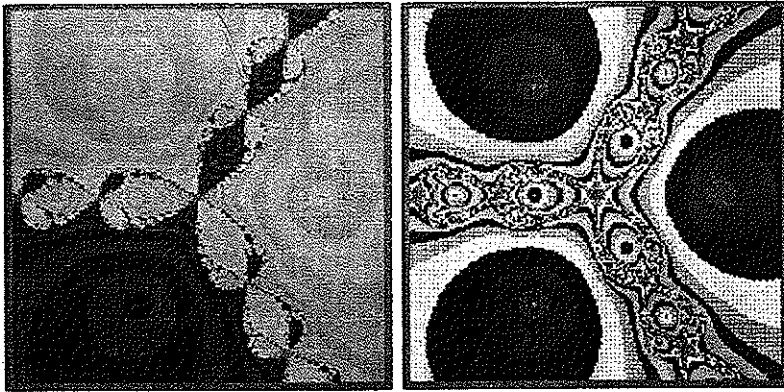
4.3. Sistema quártico

O objetivo deste exemplo é observar que os três grupos de métodos podem ter comportamentos tremendamente diferentes. Consideremos então o sistema:

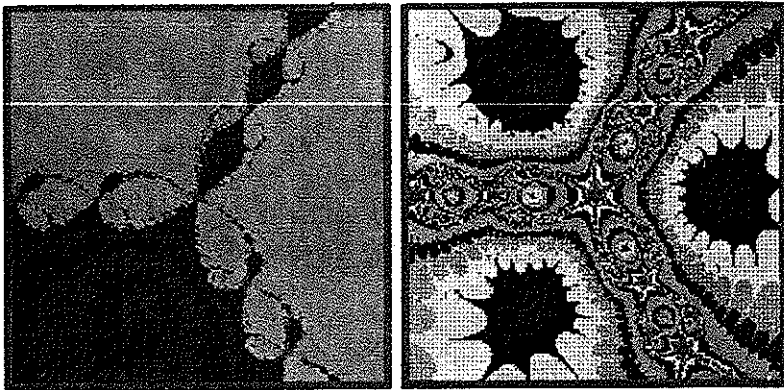
$$F(x) = \begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 \\ (x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

Este sistema possui seis soluções distribuídas simetricamente na região $R = [-2, 2] \times [-2, 2]$: $(\pm 1, 0)$ e $(\pm 1.58, \pm 1.22)$. $F'(x)$ é singular nos eixos coordenados e no círculo C de centro em $(0,0)$ e raio $3/2$. As Figuras 7 e 8 ilustram os resultados obtidos.

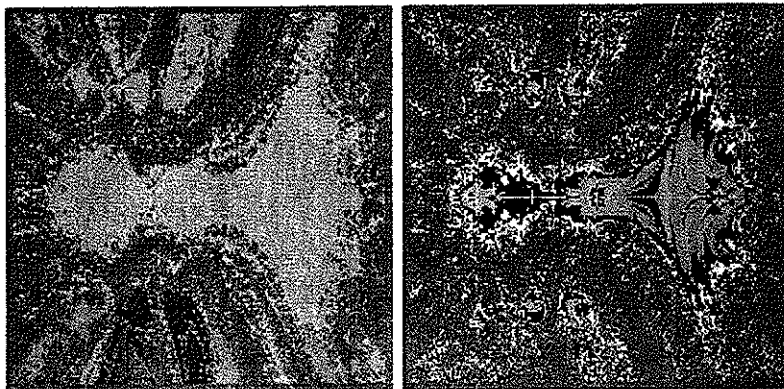
Analisemos primeiramente o método tipo Newton. Pontos iniciais tomados no exterior de C podem levar a convergência apenas para uma das soluções exteriores a C e localizados no mesmo quadrante. Já para pontos iniciais no interior de C , podemos ter convergência para qualquer uma das soluções: algumas seqüências "escapam" para fora de C . A distribuição do número de iterações



(a)

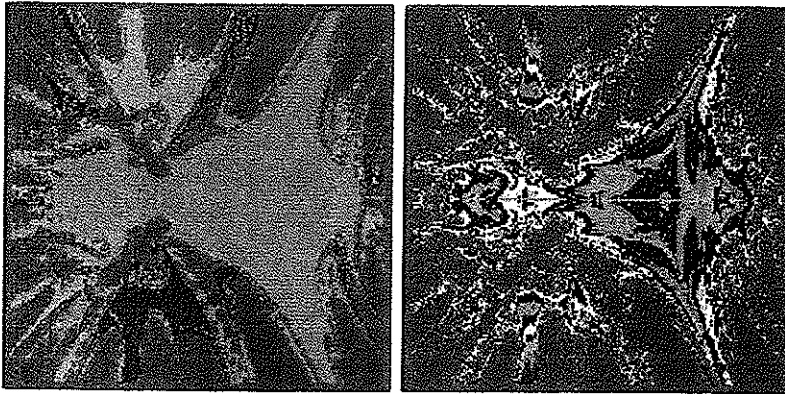


(b)

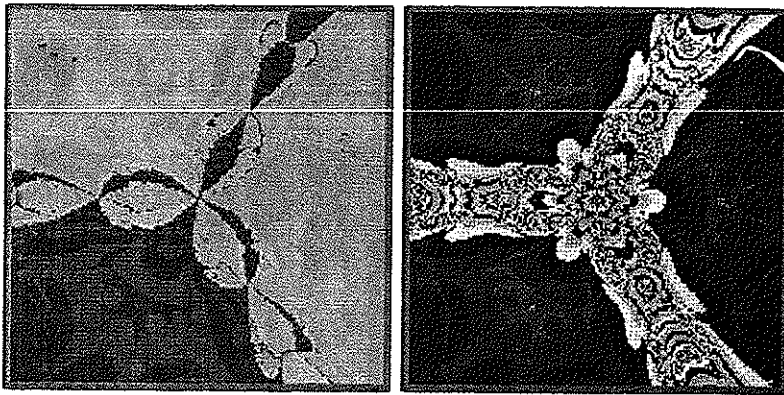


(c)

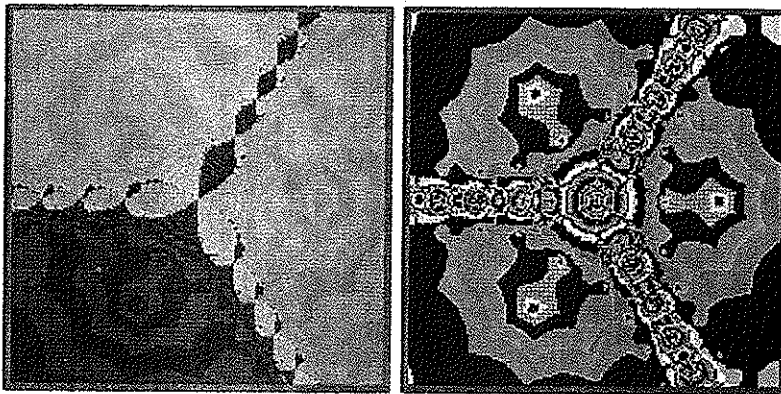
Figura 5: Regiões de convergência para o sistema cúbico. Métodos: (a) Newton, (b) Newton discreto e (c) Broyden 1.



(a)

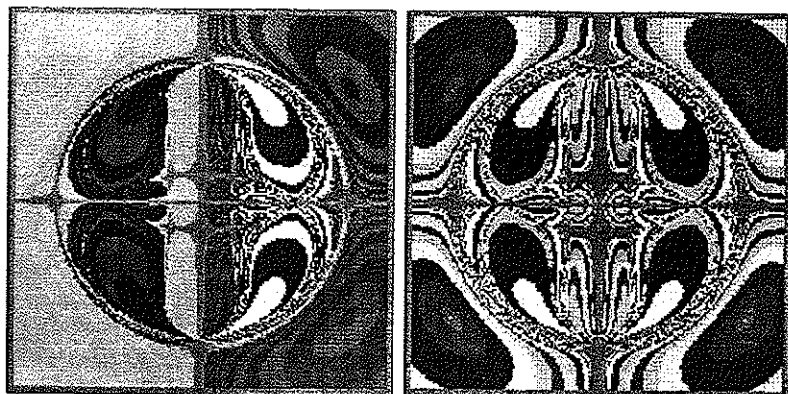


(b)

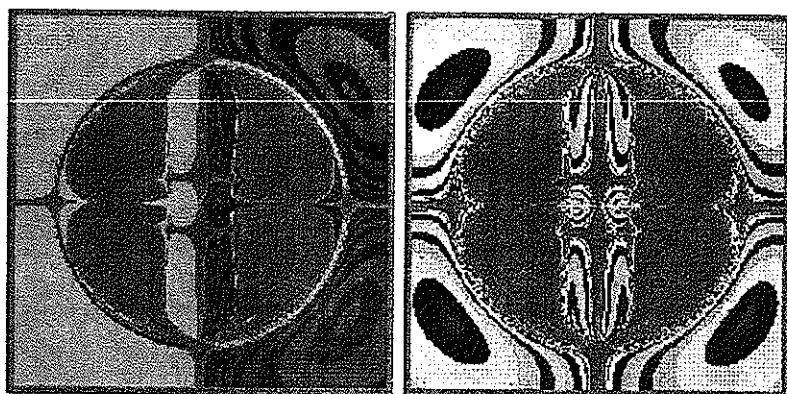


(c)

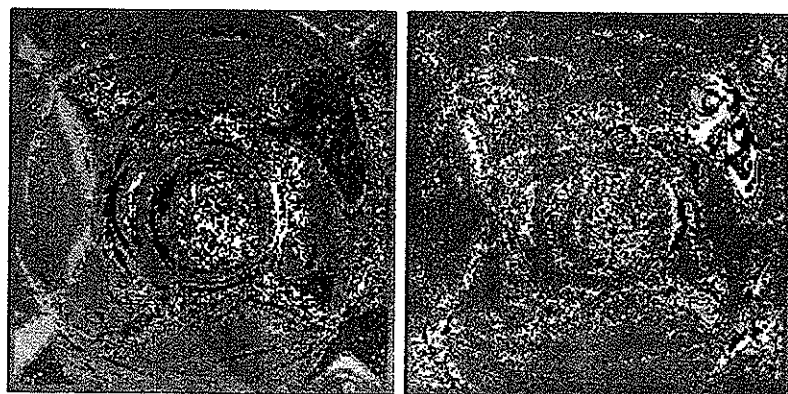
Figura 6: Regiões de convergência para o sistema cúbico. Métodos: (a) Broyden 2, (b) Kaczmarz e (c) Cimmino.



(a)

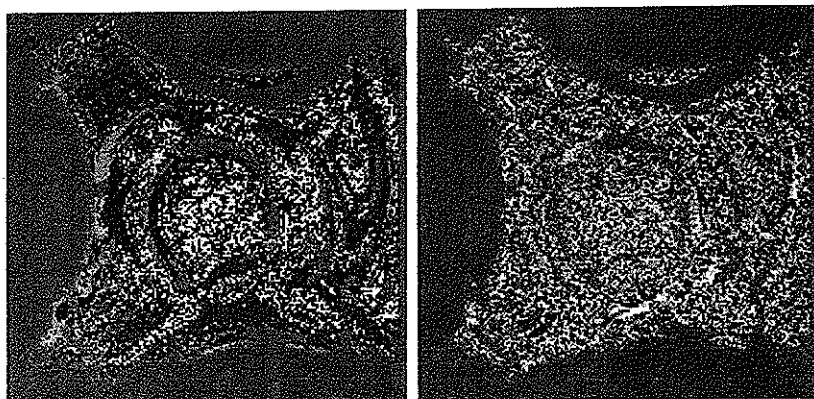


(b)

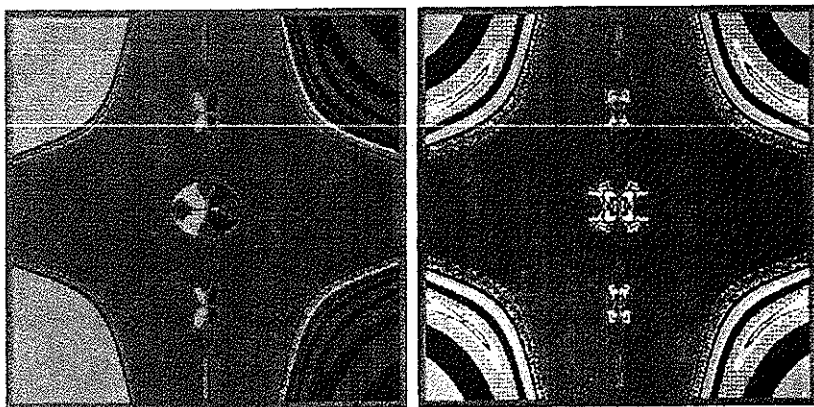


(c)

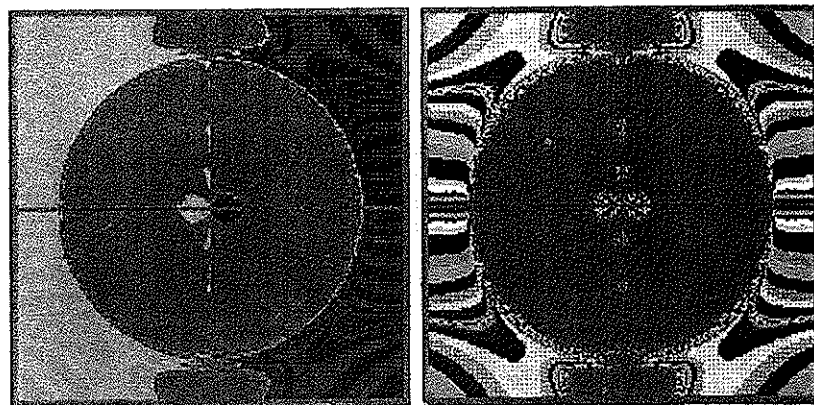
Figura 7: Regiões de convergência para o sistema quártico. Métodos: (a) Newton, (b) Newton discreto e (c) Broyden I.



(a)



(b)



(c)

Figura 8: Regiões de convergência para o sistema quártico. Métodos: (a) Broyden 2, (b) Kaczmarz e (c) Cimmino.

também fornece um padrão bastante interessante. No método de Newton discreto quase não há convergência para as soluções $(\pm 1, 0)$. Notemos que $F'(x)$ é singular nessas soluções o que contribui para esse comportamento.

Para os métodos quase-Newton podemos concluir muito pouco. Não aparece nenhum padrão bem definido nas regiões de convergência. Podemos notar apenas que o círculo C influi quase imperceptivelmente no mapa de convergência do método de Broyden 1. A convergência é extremamente complicada, sendo praticamente impossível prever o comportamento dos métodos.

O método de Kaczmarz apresenta um comportamento muito interessante. Só há convergência para as soluções $(\pm 1, 0)$ se os pontos iniciais estiverem sobre o eixo x_1 . Mais ainda, aproximações iniciais em um certo quadrante podem levar a convergência para uma solução no quadrante oposto. É interessante observar as "borboletas" que aparecem sobre o eixo x_2 . No método de Cimmino as regiões de convergência para as soluções externas de C são semelhantes as dos métodos tipo Newton, exceto na região perto do eixo x_2 ; para as soluções internas a C o comportamento é idêntico ao do método de Kaczmarz. Os grandes espaços em branco nesses mapas indicam que os métodos de projeção não são muito adequados para esse sistema.

5. Conclusão

A representação gráfica do comportamento caótico dos métodos iterativos para sistemas não lineares é uma ferramenta poderosa para demonstrar e compreender o fenômeno matemático que aparece nessas aplicações.

Esta é uma área totalmente nova e ainda pouco explorada em Análise Numérica. O avanço da computação gráfica propicia o aparecimento de novas questões sobre a análise e convergência de algoritmos, induzindo-nos a refletir e pesquisar mais sobre o "real" significado de taxas de convergência e teoremas de convergência local e global.

Evidentemente, a discussão levantada neste trabalho está longe de terminar. Nosso objetivo é instigar os analistas numéricos a abrirem suas mentes e encararem a Análise Numérica sob uma perspectiva diferente da usual. Poderíamos, por exemplo, estudar a classificação da convergência não apenas em local ou global, linear ou quadrática, mas também em "padrões de comportamento" analisando as características geométricas das seqüências geradas pelos algoritmos.

A capacidade computacional gráfica é determinante nessa linha de pesquisa. Devemos explorar ao máximo os recursos computacionais disponíveis criando condições para que entendamos cada vez mais os fenômenos matemáticos envolvidos não só na aplicação de métodos iterativos para sistemas não lineares, como também em toda a Análise Numérica.

Agradecimentos: Ao Prof. Mario Martínez pelo incentivo e sugestões que permitiram a elaboração deste trabalho.

Referências

- [1] D.C. Arney e B.T. Robinson, *Exhibiting Chaos and Fractals with a Microcomputer*, Computers Math. Applic., 19, 1-11, 1990
- [2] M.F. Barnsley et al, *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, 1988
- [3] M. Bridger, *Looking at the Mandelbrot Set*, The College Mathematics Journal, 19, 353-363, 1988
- [4] Y. Censor, *Row-Action Methods for Huge and Sparse Systems and their Applications*, SIAM Review, 23, 444-466, 1981
- [5] G.A. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, 1990
- [6] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman & Co., 1982
- [7] J.M. Martínez, *Algorithms for Solving Nonlinear Systems of Equations*, Relatório de Pesquisa - IMECC/UNICAMP, 44, 1992
- [8] H.O. Peitgen e P.H. Richter, *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, 1986
- [9] L.T. Santos, *A Parallel Subgradient Projections Method for the Convex Feasibility Problem*. J. Comp. Appl. Math., 18, 307-320, 1987
- [10] E.R. Vrscay, *Julia Sets and Mandelbrot-Like Sets Associated with Higher-Order Schröder Rational Iteration Functions: a Computer Study*, Math. Comput., 46, 151-169, 1986

*Departamento de Matemática Aplicada
IMECC - UNICAMP, CP6065
13081 Campinas (SP) Brasil
E-mail: Lucio @ IME. UNICAMP. BR*