

# Estabilidade de Posições de Equilíbrio em Sistemas com Chaveamento

Marco Antonio Teixeira

## 1 - Introdução

O objetivo desta nota é abordar, na forma mais simples possível, alguns aspectos da estabilidade de pontos de equilíbrio de uma classe de equações diferenciais com segundo membro descontínuo, modeladas a partir de sistemas com chaveamento ("relay system"). Discutiremos aqui o primeiro trabalho científico (segundo seu próprio testemunho) de D.V. Anosov por volta de 1957 e cuja publicação traduzida em inglês data de 1959 (ver [A]). Historicamente (não sabemos com exatidão quando), Tsytkin colocou o problema em questão à Boltyanskii e Pontryagin, juntamente com uma solução que apresentava certas imperfeições. Entretanto estes últimos matemáticos se convenceram que os resultados apresentados eram corretos apesar das provas apresentadas. Estimulado por Pontryagin, Anosov apresentou uma demonstração correta e muito mais simples que a anterior e cujo teor iremos discutir a seguir.

O trabalho original estuda uma equação diferencial no  $IR^n$ ; por simplicidade, nesta nota iremos nos restringir ao caso  $n = 3$ .

O leitor interessado no assunto poderá encontrar em [AVK] ou [U] um leque muito grande de modelos físicos que abordam sistemas com chaveamento.

## 2 - Descrição do Sistema

Um sistema com chaveamento a 3 variáveis é descrito pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + k_1 \operatorname{sgn} x \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + k_2 \operatorname{sgn} x \\ \dot{z} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + k_3 \operatorname{sgn} x ,\end{aligned}\tag{2.a}$$

onde  $a_{ij}$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  são escalares e  $\text{sgn } x$  é o sinal da coordenada  $x$  no  $\mathbb{R}^3$ .

O problema que se apresenta é caracterizar as curvas soluções (ou trajetórias) deste sistema que passam pelos pontos de descontinuidade  $(0, y, z)$ . Hoje, é usual nos referirmos às leis estipuladas por Filippov (ver [F]) para se definir as soluções de um sistema descontínuo como acima. Anosov utilizou-se destas leis em seu trabalho e no que se segue iremos discuti-las superficialmente e de uma forma heurística.

Estaremos supondo que  $k_1 \neq 0$ .

### 2.1 - Definição matemática de um sistema com chaveamento

No semiplano  $S^+ = \{x > 0\}$  as trajetórias de (IIa) são definidas por

$$\dot{X} = AX + K \quad (2a^+)$$

onde  $X^t = (x, y, z)$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $(i, j = 1, 2, 3)$  e  $K^t = (k_1, k_2, k_3)$ . ( $X^t$  denomina a transposta de  $X$ ).

Analogamente no semiplano  $S = \{x < 0\}$  as trajetórias do sistemas são dadas através de

$$\dot{X} = AX - K \quad (2a^-)$$

Sobre os pontos do plano  $S = \{x = 0\}$ , 3 situações distintas devem ser consideradas:

1 - As trajetórias de  $(2a^+)$  e  $(2a^-)$  apontam para a mesma direção quando encontram  $S$  (ver Figura 1). Isto é traduzido por:

$$(a_{12}y + a_{13}z + k_1)(a_{12}y + a_{13}z + k_1) > 0.$$

A região em  $S$  definida por esta desigualdade é chamada de Região de Costura e a curva solução passando por qualquer um de seus pontos  $(0, y, z)$  é simplesmente a colagem das trajetórias de  $(2a^+)$  e  $(2a^-)$ .

2 - As direções das trajetórias de  $(2a^+)$  e  $(2a^-)$  são reversas e ambas apontam para o plano  $S$  (ver Figura 2). Este fenômeno é traduzido por

$$(a_{12}y + a_{13}z + k_1) < 0 \quad \text{e} \quad (a_{12}y + a_{13}z + k_1) > 0.$$

A região em  $S$  associada a estas desigualdades é denominada Região Escorregante. Observe que se  $k_1 < 0$  então a origem pertence à esta região.

A solução do sistema neste caso para tempo positivo desliza sobre  $S$  e seu comportamento é descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= a_{22}y + a_{23}z - (k_2/k_1)(a_{12}y + a_{13}z) \\ \dot{z} &= a_{32}y + a_{33}z - (k_3/k_1)(a_{12}y + a_{13}z) \end{aligned} \quad (2b)$$

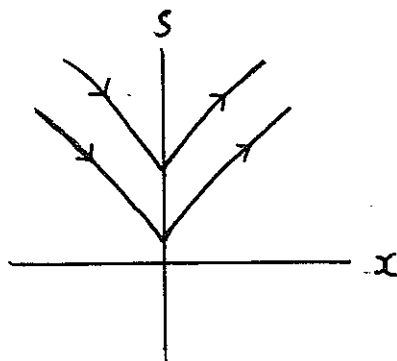


Figura 1. Região de Costura

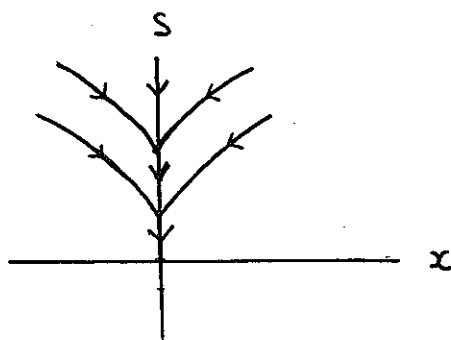


Figura 2. Região Escorregante

Observe que a origem  $(0,0,0)$  é um ponto de equilíbrio deste sistema. Este novo sistema é denominado Sistema Escorregante associado a  $(2a)$ .

3 - As direções das trajetórias de  $(2a^+)$  e  $(2a^-)$  são reversas e ambas apontam para o exterior de  $S$  (ver Figura 3) Este caso é traduzido pelas desigualdades:

$$(a_{12}y + a_{13}z + k_1) > 0 \quad \text{e} \quad (a_{12}y + a_{13}z - k_1) < 0.$$

As desigualdades acima caracterizam uma região em  $S$  denominada Região de Escape. Não iremos nos ocupar deste caso assim como daqueles pontos de  $S$  pertencentes à fronteira das regiões abertas definidas acima. O leitor interessado em mais detalhes deverá se dirigir a [F] ou a [T].

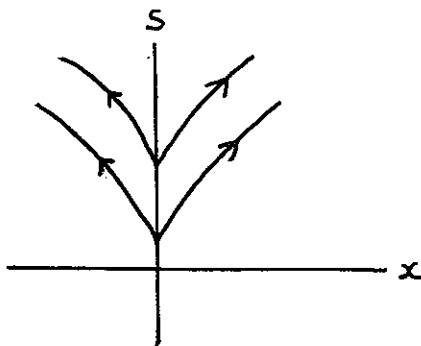


Figura 3. Região de Escape

### 3 - Descrição Formal do Sistema

Seja  $D$  o operador diferencial. O sistema (2a) pode então ser descrito por:

$$(DI - A)X = (\text{sgn } x)K \quad (3b)$$

onde  $(DX)' = (Dx, Dy, Dz)$  e  $I$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ .

Através do método da eliminação (ver [P]) podemos eliminar  $y$  e  $z$  transformando (3b) em:

$$K(D)(x) + ML(D)(\text{sgn } x) = 0 \quad (3c)$$

onde  $M$  é uma constante,

$$K(D) = D^3 + \alpha_2 D^2 + \alpha_1 D + \alpha_0,$$

e  $L(D)$  é um polinômio (formal) de grau  $m = (3 - r)$  onde o número  $r \in \{1, 2, 3\}$  depende exclusivamente da matriz  $B = (a_{ij})$ ,  $i, j = 2, 3$  (veja os exemplos nesta seção).

O caso  $L(D) = 0$  não é considerado.

É de verificação direta que o polinômio  $K$  coincide exatamente com o polinômio característico da matriz  $A$ .

Para ilustrar o método de eliminação utilizado acima, daremos a seguir alguns exemplos:

#### 3.1 - Exemplo

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = z$$

$$\dot{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + k \text{sgn } x$$

Introduzindo o operador  $D$  obtemos que  $Dx = y$ ,  $D^2x = z$  e  $D^3x = a_{31}x + a_{32}Dx + a_{33}D^2x + k \operatorname{sgn} x$ .

Portanto o sistema toma a forma  $K(D) + ML(D)(\operatorname{sgn} x) = 0$  onde  $K(D) = D^3 - a_{33}D^2 - a_{32}D - a_{31}$ ,  $M = -k$  e  $L(D) = 1$ .

Observe que neste caso que  $r = 3$  e que  $K(D)$  é o polinômio característico da parte linear de (3.1)

O sistema em questão possui as seguintes propriedades:

- A reta  $h = \{(0, 0, z)\}$  em  $S$  é caracterizada pelos conjuntos dos pontos de tangência entre  $(2a^+)$  ou  $(2a^-)$  com  $S$ . Mais ainda, o contacto entre as trajetórias e  $S$  é quadrático se  $z \neq 0$ ; na origem este contacto é cúbico (desde que  $k \neq 0$ );
- A curvatura de cada trajetória de  $(2a^+)$  ou  $(2a^-)$  em  $(0, 0, z)$  muda de sinal quando  $z$  atravessa o valor  $z = 0$  retrato de fase deste sistema está ilustrado na Figura 4;
- A reta  $h$  constitui a fronteira entre duas regiões de costura.

Para uma melhor visualização do leitor, preferimos representar na Figura 4, a "reta  $h$ " por uma curva denominada  $h'$ .

### 3.2 - Exemplo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z k \operatorname{sgn} x \\ \dot{z} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.\end{aligned}$$

Neste caso o sistema acima é levado à forma  $K(D)(x) + ML(D)(\operatorname{sgn} x) = 0$  onde  $K(D)$  é o polinômio característico da matriz  $A = (a_{ij})$  (com  $a_{11} = 0$ ,  $a_{12} = 1$  e  $a_{13} = 0$ ),  $M = -k$  e  $L(D) = D - a_{33}$ . Neste caso temos que  $r = 2$ .

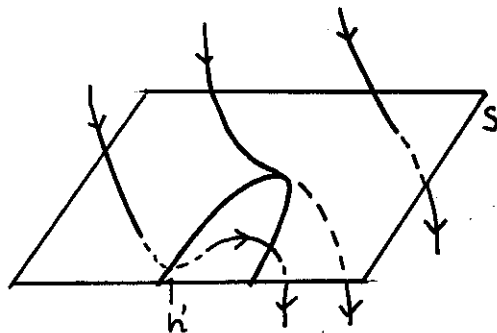


Figura 4. Sistema (3.1)

O sistema em questão possui as seguintes propriedades:

- A reta  $h = \{(0,0,z)\}$  em  $S$  é caracterizada pelo conjunto dos pontos de tangência entre  $(2a^+)$  ou  $(2a^-)$  com  $S$ ; mais ainda o contacto entre as trajetórias e  $S$  é quadrático (desde que  $k \neq 0$ );
- A reta  $h$  constitui a fronteira entre duas regiões de costura;
- Se  $k < 0$  então as trajetórias em torno da reta  $h$  são como “espirais” e o correspondente retrato de fase está ilustrado na Figura 5. Neste caso a trajetória do sistema passando por  $P = (0,0,z)$  é constituída somente por este ponto;
- Se  $k > 0$  as trajetórias do sistema em torno da reta  $h$  se afastam da origem (veja Figura 6).

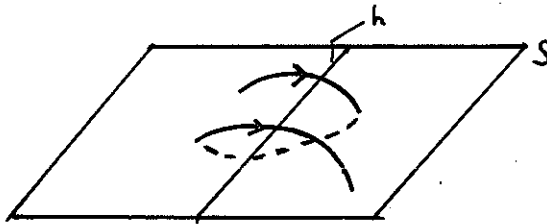


Figura 5. Sistema (3.2) - Caso  $k < 0$ .

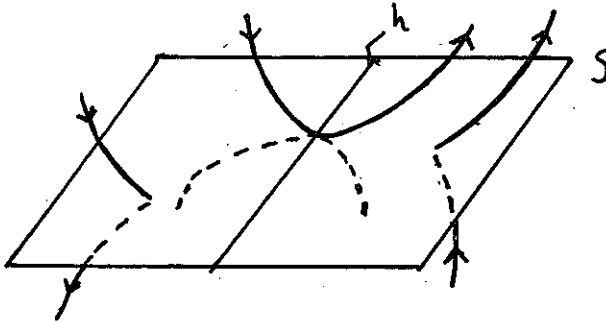


Figura 6. Sistema (3.2) - Caso  $k > 0$ .

### 3.3 - Exemplo

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + k \operatorname{sgn} x$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$

$$\dot{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Neste caso  $K(D)$  é o polinômio característico de  $A = (a_{ij})$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $M = -k$  e  $L(D)$  é o polinômio característico de  $B = (a_{ij})$  com  $i, j = 2, 3$ . Portanto neste caso  $r = 1$ .

#### 4 - Enunciado do Resultado Principal

Consideremos o sistema original dado em sua forma formal. O resultado que iremos enunciar a seguir, dá condições necessárias e suficientes para que a origem seja um ponto de equilíbrio estável do sistema. Lembramos que um ponto  $p \in \mathbb{R}^3$  é um ponto de equilíbrio estável da equação se dada qualquer vizinhança  $V$  de  $p$  existe uma vizinhança  $W$  de  $p$  tal que se  $q \in W$  então a solução do sistema passando por  $q$ ,  $\Phi(t, q)$  pertence a  $V$  para todo  $t \geq 0$ .

##### Teorema

a) Suponhamos que  $r = 1$ . Uma condição necessária para que a origem seja um ponto de equilíbrio estável do sistema é:  $M > 0$  e  $L(D)$  não possui autovalores com parte real positiva. Se  $M > 0$  e os autovalores de  $L(D)$  são negativos então a origem é estável.

b) Suponhamos que  $r = 2$ . Uma condição necessária para a estabilidade da origem é:  $M > 0$  e  $L(D)$  não possui autovalores com parte real positiva e  $\alpha \geq \beta$ . Se  $M > 0$ , os autovalores de  $L(D)$  são negativos e  $\alpha \geq \beta$  então a origem é um ponto de equilíbrio estável do sistema.

c) Se  $r = 3$  então a origem é um ponto de equilíbrio instável.

#### 5 - Demonstração do Teorema

Iremos nesta seção dar um "sketch" da demonstração do teorema acima.

##### Mudança de coordenadas

Pode se demonstrar que existe uma mudança de coordenadas no  $\mathbb{R}^3$  da forma

$X = CU$ , onde  $X' = (x, y, z)$ ,  $U' = (u, v, w)$ ,  $C = (c_{ij})$ ,  $ij = 1, 2, 3$ , e tal que

- a) se  $r = 3$  então (2a) é transformado em (3.1);
- b) se  $r = 2$  então (2a) é transformado em (3.2);
- c) se  $r = 1$  então (2a) é transformado em (3.3);

**Observação:** na mudança de variáveis acima a coordenada  $x$  não é afetada e a descrição formal dos sistemas correspondentes é preservada no sentido que os

graus dos polinômios envolvidos permanecem os mesmos. O sistema nas novas variáveis apresenta  $M = -k$ ,  $L(D) = \det(DI - \tilde{a}_{ij})$ ,  $i, j = r + 1, \dots, 3$ . Mais ainda, se  $r = 2$  e nas novas coordenadas tivermos  $K(D) = D^3 + \alpha_1 D^{3-1} + \dots$  e  $L(D) = D^{3-r} + \beta_1 D^{3-r-1} + \dots$  então  $a_{22} = \alpha_1 - \beta_1$ .

Assim podemos restringir a nossa análise para os exemplos dados em 3.

### Caso $r = 1$

Se  $k > 0$ , usando elementos básicos de continuidade concluímos que as trajetórias do sistema em torno da origem se afastam dela.

No caso  $k < 0$  a origem pertence ao interior da região escorregante que por sua vez age como um atrator em torno do ponto. Mais ainda, as trajetórias do sistema escorregante convergem para a origem se as partes reais dos autovalores associados (Sistema 2b) são negativas. A conclusão do teorema neste caso é imediata.

### Caso $r = 2$

No caso  $k > 0$  observa-se imediatamente a instabilidade da origem para o sistema (3b) (veja Figura 6).

No caso  $k < 0$ , se introduz uma função de Lyapunov associada ao sistema da forma

$$E(x, y, z) = (y^2 - a_{21}x^2)/2 + |k| |x| - a_{22}xy/2 - a_{23}xz.$$

A derivada de  $E$  em relação a  $t$  é:

$$\dot{E} = [a_{22}y + a_{22}|x|(|k| - a_{21}|x| - a_{22}y \operatorname{sgn} x - a_{23}z \operatorname{sgn} x + 2(a_{23}/a_{22})z \operatorname{sgn} x)]/2.$$

Numa vizinhança da origem podemos determinar reais positivos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que:

- se  $a_{22} < 0$  então  $\beta E < \dot{E} < -\alpha E$ ;
- se  $a_{22} > 0$  então  $\alpha E < \dot{E} < -\beta E$ ;
- e para qualquer  $\alpha_{22}$ ,  $-\alpha E < \dot{E} < \alpha E$ .

Não existe dificuldade agora em concluir o teorema para o caso  $r = 2$ . A título de ilustração, no caso  $k < 0$  temos o seguinte:

Dado um ponto  $p = (0, y, z)$ ,  $y > 0$ , seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  a solução do sistema com  $\gamma(0) = p$ . Defina  $r(t) = \gamma(t)$ . Prova-se que existe (um menor)  $t_0 > 0$  tal que  $x(t_0) = 0, y(t_0) > 0$ . Se  $a_{22} < 0$  (resp.  $> 0$ ) tem se  $r(0) < r(t)$  (resp.  $r(0) > r(t)$ ).



**Caso  $r = 3$** 

A prova da instabilidade para o caso  $k > 0$  é imediata.

Se  $k < 0$  iremos apenas ilustrar a demonstração para o caso particular:  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = z$  e  $\dot{z} = k \operatorname{sgn} x$ . Este sistema é simétrico em relação à origem; o que se mostra é que se  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  é uma solução qualquer com  $\gamma(0)$  próximo da origem e tal que  $x(0) = 0$ ,  $y(0) > 0$  e  $z(0) > 0$  então existe  $r > 0$  satisfazendo  $x(r) = 0$ ,  $y(r) < 0$  e  $|z(r)| > 2z(0)$ ; este fenômeno se repete com relação às condições iniciais  $\gamma(r)$ . Isto implica na instabilidade do sistema.

**Referências**

- [A] Anosov D.V., Stability of the equilibrium positions in relay systems, *Automation and Remote Control* 20, 2, 1959.
- [AVK] Andronov A., Vitt A. and Khaikin S., *Theory of oscillators*, Dover Pub., NY, 1987.
- [F] Filippov A.F., *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Kluwer Ac. Publishers, 1988.
- [P] Pontryagin L., *Équations différentielles ordinaires*, Ed. Mir, Moscou, 1969.
- [T] Teixeira M. A., Stability conditions for discontinuous vector fields, *J. of Diff. Eq.*, V. 88, 1, 1990.
- [U] Utkin V. *Sliding modes and their application in variable structure systems*, Mir, Moscow, 1978.

*Departamento de Matemática - IMECC  
Universidade Estadual de Campinas  
Caixa Postal 6065  
13083-970 - Campinas - SP - Brasil*