Matemática Universitária Nº 16, julho de 1994, 46-59

Problemas Minimax e aplicações*

José Mário Martínez
Lúcio Tunes dos Santos
Sandra Augusta Santos

RESUMO O objetivo deste artigo é comentar alguns exemplos do problema Minimax, um problema clássico em Otimização, tanto contínua quanto discreta. Dedicamos maior atenção a problemas onde o objetivo é maximizar a mínima distância entre os elementos de um conjunto, ou seja, encontrar o conjunto, sujeito a determinadas restrições, tal que a menor distância possível entre seus elementos seja máxima. Esta particular versão do problema Minimax tem aplicações interessantes na Teoria de Codificação. Também apresentamos uma aplicação a um problema clássico de Geometria Combinatória, intimamente relacionado, do ponto de vista estrutural, com os problemas de codificação. Mostramos que a complexidade computacional destes problemas pode ser muito grande, o que justifica seu estudo formal matemático e o desenvolvimento de algoritmos específicos para sua resolução prática.

1. O jogo da transmissão

Numa palestra destinada a motivar estudantes do segundo grau para estudar matemática propusemos o seguinte jogo. Formam-se times de 4 pessoas: o planificador, o emissor, o transmissor e o receptor. O planificador elabora uma lista de 10 "mensagens possíveis". Cada "mensagem possível" é um vetor de quatro letras: A, B, C, D (por exemplo, ABCD, BCDA e DCBA). O receptor ganha uma cópia desta lista. O emissor escolhe 3 mensagens da lista, ao acaso, para enviar ao receptor. Ele escreve as mensagens num papel e entrega para o transmissor.

* Trabalho financiado por FAPESP (Projeto Temático 90-3724-6 e Processo 91-2441-3), CNPq e FAEP-UNICAMP.

Este levará as mensagens ao receptor mas, no processo, poderá alterar até 1 elemento de cada mensagem. Por exemplo, poderá transmitir ABCC em vez de CBCC. O receptor receberá as três "mensagens alteradas" e tentará descobrir quais eram três mensagens originais. "Vence" a equipe que conseguir descobrir mais mensagens corretas.

Depois de algumas tentativas, os jogadores descobriram que, fora considerações psicológicas, existe uma única estratégia razoável para o receptor: dada a mensagem recebida, escolher a mensagem possível "mais próxima". A proximidade é relativa a uma "distância" *d,* que pode ser definida como o número de posições em que duas mensagens diferem. Por exemplo, $d(ABBC, CBDC) = 2$ e $d(AAAA,AAAB) = 1$.

O transmissor não é, de fato, um elemento da equipe. Ele se limita a escolher, ou não, uma posição para trocar. Sua função é introduzir o "ruído" no "canal de comunicação". Não há nada inteligente que possa fazer. O emissor, por sua vez, apenas escolhe mensagens ao acaso. Numa situação real pode ter necessidade de enviar diferentes mensagens e, ao longo do tempo, talvez todas as mensagens sejam enviadas alguma vez. O verdadeiro jogador, portanto, é apenas o planificador. Se ele conseguisse que, para cada par de mensagens possíveis, a distância entre elas fosse maior ou igual a 3, o erro seria impossível. Com efeito, a mensagem modificada diferiria da mensagem verdadeira em, no máximo, uma posição. Portanto, sua distância em relação a todas as outras mensagens possíveis seria maior ou igual a 2. Assim, a mensagem possível mais próxima seria a verdadeira, e o receptor não poderia errar.

Portanto, a estratégia do planificador deve ser montar o conjunto de mensagens possíveis de maneira tal que a mínima distância entre qualquer par delas seja grande. Em outras palavras, se U é o universo de mensagens (no exemplo, os 4^4 vetores com elementos em $\{A, B, C, D\}$), o planificador deveria escolher 10 elementos em U, digamos $S = \{M_1, \ldots, M_{10}\}$ tais que o mínimo de $d(M_i, M_j)$, $i \neq j$, seja máximo. Chamando $P_{10}(U)$ ao conjunto cujos elementos são os subconjuntos de 10 elementos de U, podemos definir a função $f : P_{10}(U) \to I\!R$, dada por $f(S) =$ mínimo $\{d(M,N), M,N \in S, M \neq N\}$. O objetivo do planificador é encontrar $S \in P_{10}(U)$ que maximize f.

O problema em questão consiste em *maximizar* a *mínima* distância entre elementos de um conjunto. Seria justo, em conseqüência, chamá-lo *Problema Maximin*. Por tradição, preferimos a denominação *Minimax*, o que, por outra parte, faz justiça ao fato de que, como é fácil verificar, *maximizar* o mínimo entre diferentes funções é equivalente a *minimizar* o máximo entre os inversos aditivos dessas funções.

Quando estávamos desenvolvendo o jogo mais ou menos nas linhas acima, um jovem da platéia nos fez uma pergunta. Antes de responder, perguntamos seu nome. Ele disse "Osmar", mas nós entendemos "Gaspar". A confusão nos permitiu mostrar mais um exemplo de "comunicação com erro". Com efeito, uma análise rudimentar do acontecido detectaria uma "distância" igual a 3 entre OSMAR e GASPAR:

$$\begin{array}{cccccc} & O & S & M & A & R \\ \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \\ G & A & S & P & A & R \end{array}$$

O ruído acontecido entre a emissão de "Osmar" e nossa recepção deve ter convertido "Osmar" em uma palavra sem correspondência na lista de nomes residente em nosso cérebro que, porém, estava mais perto de "Gaspar" que de "Osmar". Infelizmente, nossa lista de nomes incluía nomes parecidos com "Osmar", o que possibilitou a confusão. Obviamente, trata-se de uma lista elaborada pela experiência e não sujeita a qualquer tipo de planificação Minimax.

2. Problemas minimax discretos

Suponhamos que dispomos de s símbolos $x_1, \ldots, x_s$ e consideremos o universo U de toda as n–uplas formadas por elementos de $\{x_1, \ldots, x_s\}$. Evidentemente U possui s^n elementos. Queremos escolher $S_* \subset U$ tal que S_* tem m elementos e maximiza a mínima distância entre dois elementos distintos para todos os subconjuntos de m elementos de U. Como antes, chamamos $P_m\ (U)$ ao conjunto formado por todos os subconjuntos de m elementos de U. Em outras palavras, S_* resolve este problema Minimax se, definindo $f(S) =$ mínimo $\{d(x,y), x,y \in S, x \neq y\}$ para todo $S \in P_m\ (U)$, temos que $f(S_*) \geq f(S)$ para todo $S \in P_m\ (U)$.

Os números (s,n,m) caracterizam totalmente este problema que, em alguns casos, tem solução trivial. Por exemplo, se $s = 2$, $n = 2$ e $m = 2$, temos que $U = \{AA, AB, BA, BB\}$ e há duas soluções do problema: $S_*^1 = \{AA, BB\}$ e $S_*^2 = \{AB, BA\}$. Em outros casos, a análise deste problema pode ser muito mais complexa.

Problemas Minimax discretos aparecem naturalmente na Teoria de Codificação (maiores detalhes sobre esta teoria serão fornecidos na Seção 4). Quando $s = 2$, um conjunto de vetores (palavras) com n componentes formados pelos dois símbolos possíveis constitui um *código binário de comprimento n*, ou seja, U é um subconjunto de $\mathbb{F}_2^n$ onde $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ é o corpo de Galois de ordem 2. Analogamente, um *código q-ário* é um subconjunto U de $\mathbb{F}_q^n$, onde $\mathbb{F}_q$ é o corpo de Galois de ordem q, sendo q um número primo ou uma potência de primo. Códigos q-ários são usados no *canal simétrico q-ário,* onde os símbolos de entrada e saída são elementos de $\mathbb{F}_q$.

Suponhamos agora que dos n elementos de IF_q que constituem uma palavra do código q-ário, apenas os k primeiros compõem a mensagem propriamente dita. Os $n - k$ elementos restantes são chamados *símbolos de controle*. Estes símbolos de controle podem ser obtidos a partir dos símbolos de mensagem de tal maneira que os elementos x de uma palavra satisfaçam o sistema linear homogêneo

$$H\,x = 0$$

onde H é uma matriz de ordem $(n - k) \times n$ com elementos em IF_q. O código obtido desta maneira é denominado *código linear de comprimento n sobre* IF_q. A forma padrão de H é $(A \mid I)$, onde A é uma matriz $(n - k) \times k$ e I é a matriz identidade de ordem $n - k$. Por exemplo, se $q = 2$, $n = 6$ e $k = 3$, a mensagem $x_1\, x_2\, x_3$ é codificada como $x = x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$. Tomando

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (A \mid I)$$

os símbolos de controle x_4, x_5 e x_6 são tais que $Hx = 0$, isto é,

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$x_4 = x_2 + x_3 \quad , \quad x_5 = x_1 + x_3 \quad , \quad x_6 = x_1 + x_2 \quad ,$$

ou seja, os símbolos de controle são determinados por x_1, x_2 e x_3. Se a mensagem 011 é transmitida, a palavra correspondente é $x = 011011$. Neste exemplo existem 2^3 palavras possíveis:

000000, 100011, 010101, 001110,
110110, 011011, 101101, 111000.

Para maiores informações sobre problemas Minimax discritos em Teoria de Codificação, veja Conway e Sloane (1988), Lidl e Pilz (1984), Blake e Mullin (1975) e referências incluídas nestes livros.

O receptor de mensagens que inclui símbolos de controle deve ter em conta a informação adicional que esses caracteres oferecem para diminuir a probabilidade de erro de interpretação. Sugerimos ao leitor que reorganize o Jogo da Transmissão para mensagens com controle. Qual deve ser agora a estratégia do receptor? Qual o problema Minimax que o Planificador precisa resolver?

3. Problemas minimax contínuos

Suponhamos que o universo U, em vez de ser um conjunto discreto, é um subconjunto arbitrário de IR^n. Para fixar idéias pensemos que d é a distância Euclidiana. Novamente, para cada subconjunto S de U com m elementos, definimos

$$f(S) = \text{mínimo} \quad \{d(x,y)\ x\ , y \in S, x \neq y\}.$$

Assim, denominando por $P_m\ (U)$ o conjunto de todos os subconjuntos de m elementos de U obtemos o seguinte problema:

$$\text{Maximizar}\, f(S). \qquad (3.1)$$
$$S \in P_m\ (U)$$

Chamamos U^m ao conjunto das m–uplas de elementos de U. Claramente, $U^m \subset IR^{mn}$ e o problema (3.1) é equivalente a

$$\text{Maximizar}\, f(x), \qquad (3.2)$$
$$x \in U^m$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_m)^T$ e $f(x) = \text{mínimo} \quad \{d(x_i,x_j)\ , i,j = 1, \ldots, m\ , i \neq j\}$.

Cada vez que um professor ministra uma prova, precisa resolver um problema desse tipo: se m é o número de alunos e U a sala de aula, trata-se encontrar posições para os m alunos tais que a menor distância entre eles seja a maior possível. A disposição de máquinas e equipamentos em indústrias é um outro exemplo de aplicação do problema (3.2).

4. O Canal Gaussiano com ruído

A transmissão segura de uma mensagem através de um canal, considerando-se a possibilidade de existirem ruídos, é um problema de codificação e decodificação de informação, constituindo uma área de aplicação da álgebra moderna que vem ganhando importância nas duas últimas décadas.

A *Teoria de Codificação* originou-se com Shannon (1948), que estabeleceu um resultado famoso garantindo a existência de códigos capazes de transmitir informações de maneira ótima com uma probabilidade de erro arbitrariamente pequena. O *Canal Gaussiano* é um modelo de comunicação também introduzido por Shannon em 1948, no qual as mensagens a serem transmitidas são representadas por vetores em IR^n. Quando o vetor x é transmitido, o sinal recebido é representado pelo vetor $y = x + z$, composto pelo vetor enviado acrescido de um vetor z de ruídos Gaussianos independente de x e cujas componentes são variáveis aleatórias estatisticamente independentes e obedecendo uma distribuição Gaussiana com média zero e variância conhecida.

No canal Gaussiano, cada mensagem pode ser representada por um ponto na esfera unitária de $I\!R^n$. Determinar o melhor conjunto de m mensagens é resolver o problema (3.2), quando $U = \{x \in I\!R^n \mid \|x\| = 1\}$, onde $\|x\| = \sqrt{< x,x >}$ (norma Euclidiana) e $< .,\ . >$ denota o produto escalar usual em $I\!R^n$. Temos então o problema Minimax:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \text{mínimo } \|x_i - x_j\| \\ \|x_k\| = 1 & i,j = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, m & i \neq j \end{array} \qquad (4.1)$$

Como $\|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2 < x_i,x_j > = 2(1 - <x_i,x_j>)$, o problema (4.1) é equivalente a

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } F(x_1, \ldots, x_m), \\ \|x_1\| = 1 \end{array} \qquad (4.2)$$

onde $F(x_1, \ldots, x_m) = \text{máximo } \{<x_i,x_j>, i,j = 1, \ldots, m,\ i \neq j\}$. O problema (4.2) consiste em minimizar a função não diferenciável F na região $U^m \subset I\!R^{mn}$. Trata-se de um problema difícil, não só devido à não diferenciabilidade de F e à não convexidade da função e do domínio, como também ao número potencialmente muito grande de variáveis (mn).

Uma maneira de diminuir a dificuldade do problema, através da redução do número de variáveis, foi introduzida por Slepian (1968) e posteriormente utilizada por Karlof (1989). Tal estratégia consiste em escolher um grupo $\overline{g}$ de matrizes ortogonais de ordem n e um subconjunto g de $\overline{g}$ que não contenha a identidade e tal que para cada par $\{G, G^{-1}\} \subset \overline{g}$, $G \neq I$, uma e apenas uma dessas matrizes está em g. Tomando $g = \{G_1, \ldots, G_m\}$, ao invés do problema (4.2), podemos considerar

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) \equiv F(G_1x, \ldots, G_mx), \\ \|x\| = 1 \end{array} \qquad (4.3)$$

onde F é definida como em (4.2). Temos portanto,

$$f(x) = \text{máximo } \{<G_ix,\ G_jx>, i,j = 1, \ldots, m,\ i \neq j\}. \qquad (4.4)$$

Agora, $< G_ix, G_jx> = <x, G_i^{-1}G_jx> = <(G_i^{-1}G_j)^{-1}x,x> = <x,(G_i^{-1}G_j)^{-1}x>$. Mas, por definição de g, $G_i^{-1}G_j \neq I$ e um dos elementos $\{G_i^{-1}G_j, (G_i^{-1}G_j)^{-1}\}$ pertence a g. Portanto, existe $l \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $<G_ix, G_jx> = <x,G_lx>$. Isto significa que a função objetivo de (4.3) pode ser escrita como

$$f(x) = \text{máximo } \{<x,G_ix>, i = 1, \ldots, m\}. \qquad (4.5)$$

Podemos observar que a simplificação de (4.4) para (4.5) foi grande. Em (4.4) o máximo é tomado sobre um conjunto de $m(m + 1)/2$ produtos escalares, enquanto em (4.5) o máximo é tomado sobre m produtos escalares. A simplificação de (4.2) para (4.3), então, é dupla, já que em (4.3) a função a ser minimizada não somente é muito mais simples que a de (4.2) mas, também, o número de variáveis independentes é apenas n (e não nm).

Slepian (1968) considerou $\mathcal{g}$ como sendo o grupo de permutação simétrico para n elementos (S_n). Para este grupo, Blake (1972) apresentou uma solução analítica para o problema do vetor inicial. Já Karlof (1989), além dos grupos simétricos S_n considerou também os grupos alternados $A_n (5 \leq n \leq 12)$ e o grupo de Mathieu M_{11}, entre outros.

5. O problema das 13 bolas

O chamado "problema das 13 bolas" é um problema ancestral em Geometria Combinatória. Sua formulação é muito simples: quantos pontos podem ser colocados na esfera unitária de $\mathbb{R}^n$ de maneira que a distância entre cada par deles seja maior ou igual a 1 (equivalente, o ângulo entre os vetores correspondentes maior ou igual a 60°, ou, ainda, o produto escalar menor ou igual a 1/2)?

A formulação clássica deste problema é: quantas bolas de um tamanho dado podem ser colocadas tangentes a uma bola central de mesmo tamanho, e sem se interseccionarem entre si? Para $n = 2$, a solução é óbvia: 6. Para $n = 3$, é fácil ver que podem ser colocados 12 pontos na esfera unitária com distâncias mútuas maiores ou iguais a 1.

Newton conjecturava que não era possível colocar mais de 12 pontos nas condições descritas, mas o fato de existirem soluções do problema com bastante "folga" levou muitos pesquisadores a pensar que era possível colocar 13 pontos. O problema só foi resolvido satisfatoriamente no século XX, quando se demonstrou que, de fato, o número máximo de bolas no espaço tridimensional tangentes a uma bola dada é 12.

O problema permanece aberto para quase todo $n \geq 4$.. Para cada n, o número máximo de pontos na esfera unitária com distâncias pelo menos 1 é o chamado "Kissing Number" (Kiss). Assim Kiss (2) = 6, Kiss (3) = 12. Para maiores detalhes, veja Conway e Sloane (1988). Na Tabela 1 mostramos o que se sabe sobre Kiss (s) para alguns valores de n.

n	Kiss (n)	n	Kiss (n)
2	6	14	1582-3492
3	12	15	2564-5431
4	24-26	16	4320-8313
5	40-46	17	5346-12215
6	72-82	18	7398-17877
7	126-140	19	10668-25901
8	240	20	17400-37974
9	306-380	21	27720-56852
10	500-595	22	49896-86537
11	582-915	23	93150-128096
12	840-1416	24	196560
13	1130-2233		

Tabela 1. "Kissing Number"

Por exemplo, para $n = 4$ já se sabe que existem 24 pontos na esfera unitária com distâncias maiores ou iguais a 1, mas não existem 27 pontos nessas condições. Permanece em aberto o problema de se existem 25 ou 26 pontos na esfera unitária de $I\!R^4$ com todas as distâncias maiores ou iguais a 1.

O problema "Kiss (4) $\geq$ 25?" estaria obviamente resolvido se soubéssemos resolver o seguinte problema Minimax:

$$\underset{\|x_i\| = 1, x_i \in I\!R^4}{\text{Minimizar}} \quad \text{máximo} \quad \{<x_i,x_j>, i,j = 1, \ldots, 25 \ , i \neq j\}.$$

De fato, precisamos menos que isso. Com efeito, definimos

$$\beta(x_1, ..., x_{25}) \ = \ \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{25} (<x_i,x_j> -1)_+^2 + \sum_{i=1}^{25} (\|x_i\|^2 - 1)^2,$$

onde $z_+ = \max\{0,z\}$. Se encontrarmos $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{25}$ tais que $\beta(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{25}) = 0$, teremos provado que Kiss (4) $\geq$ 25. O problema é, em conseqüência, encontrar um minimizador global de β que é uma função de 100 variáveis. Se no minimizador global $\beta > 0$, então Kiss (4) = 24. Infelizmente, existem muitos algoritmos numéricos que "provavelmente" são capazes de encontrar o minimizador global de β mas nenhum deles é capaz de garantir que tal minimizador foi efetivamente encontrado. Portanto é muito mais provável que métodos numéricos sejam úteis para provar sentenças do tipo "Kiss (n) $\geq k$" do que para provar "Kiss (n) $\leq k$".

Computacionalmente, o problema de minimizar β poderia ser simplificado se, ao invés de considerarmos $x_1, ..., x_{25}$ "livres", introduzíssemos vínculos, analogamente ao que foi feito no problema do canal Gaussiano com ruído.

6. Aproximação uniforme por polinômios

Para não dar a imagem falsa de que todos os problemas Minimax aplicados se referem a maximizar a mínima distância, mencionaremos nesta seção e na próxima dois problemas Minimax de tipos diferentes. O primeiro é o mais clássico dos problemas Minimax da Análise Numérica: a aproximação uniforme por polinômios. Trata-se de encontrar um polinômio p de grau menor ou igual a l que aproxime de maneira uniforme uma dada função real g conhecida apenas nos pontos $\{z_i \in [a,b]\ , i = 1, ..., m\}$. Isto significa que a medida do erro na aproximação de g por p é dada por

$$\|g - p\|_\infty = \underset{i=1,\ldots,m}{\text{Máximo}} \ |g(z_i) - p(z_i)|$$

Idealmente, queremos a "melhor aproximação uniforme", isto é, o polinômio p^* tal que

$$\|g - p^*\|_\infty = \underset{p}{\text{Mínimo}} \ \|g - p\|_\infty$$

Em outras palavras, de todos os polinômios de grau menor ou igual l, p^* está o mais próximo possível, de maneira uniforme, da função g.

Associando ao polinômio $p(z) = x_1 z^l + x_2 z^{l-1} + \ldots + x_l z + x_{l+1}$ o vetor $x = (x_1, \ldots, x_{l+1}) \in I\!R^{l+1}$, podemos formular o seguinte problema Minimax:

$$\underset{x \in I\!R^{l+1}}{\text{Minimizar}} \quad \underset{i=1,\ldots,m}{\text{máximo}} \quad |g(z_i) - p(z_i)|$$

Um estudo mais detalhado deste problema pode ser encontrado em Conte e de Boor (1981).

7. Teoria dos jogos

Uma fonte conhecida de problemas Minimax é a Teoria dos Jogos, onde se trabalha com estratégias envolvendo-se dois ou mais participantes com interesses conflitantes. Além dos jogos propriamente ditos, tais como pôquer e xadrez, existem outras situações de conflito em que a teoria dos jogos se aplica: pesquisa operacional, ciências econômicas, políticas e sociais, bem como táticas militares. Por exemplo, quando um sindicato e a direção de uma companhia se dispõem a discutir algum contrato, cada lado tem estratégias pré-estabelecidas de conduta.

Ambos irão utilizar as mais diversas artimanhas na tentativa de descobrir a estratégia do oponente e ao mesmo tempo resguardar a sua própria. Com o conhecimento de informação suficiente, resultados da Teoria dos Jogos podem determinar qual o comportamento mais racional possível ou qual a melhor estratégia para cada jogador. Naturalmente, a Teoria dos Jogos não nos permite prever qual será o comportamento das pessoas, mas sim estudar maneiras de se atuar racionalmente em situações de conflito.

Consideremos a seguinte situação competitiva: existem duas pessoas (ou empresas, nações, etc.); cada uma tem um número finito de linhas de ação; simultaneamente, cada uma delas escolhe uma linha de ação; para cada par (i,j) de escolhas, existe um pagamento a_{ij} de um dos jogadores para o outro. A esta situação corresponde um jogo finito determinado, pela matriz $A = (a_{i,j})$, em que o termo competição é interpretado estritamente, isto é, nunca é vantajoso haver qualquer cooperação entre as partes. Este tipo de jogo é conhecido como *jogo a duas pessoas com soma nula*, pois tudo o que é ganho por um é perdido pelo outro e vice-versa. Embora existam muitas situações competitivas envolvendo mais do que dois lados, vamos nos restringir apenas a jogos a duas pessoas.

Tomemos como exemplo o jogo matricial a duas pessoas (L *e* C) em que cada jogador mostra, ao mesmo tempo, um ou dois dedos. Se a soma dos dedos é par, L ganha esta soma de C e se a soma é ímpar, L perde esta scoma para C. Apresentamos a seguir a matriz deste jogo do ponto de vista de L, isto é, em que cada unidade positiva ou negativa indica, respectivamente, um ganho ou uma perda para L: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Vamos supor que os jogadores L *e* C adotem as estratégias $p = (p_1,p_2)$ e $q = (q_1,q_2)$, com $p_i \geq 0$, $i = 1,2$, $p_1 + p_2 = 1$, $q_i \geq 0$, $i = 1,2$, $q_1 + q_2 = 1$. Isto significa que L mostra um dedo com probabilidade p_1, bem como C o faz com probabilidade q_1. Desta forma, ambos mostram um dedo com probabilidade p_1q_1. Analogamente, a probabilidade de L mostrar dois dedos e C apenas um é p_2q_1, assim como L mostra um dedo e C dois com probabilidade p_1q_2 e ambos mostram dois dedos com probabilidade p_2q_2. Neste caso, o jogador L tem um ganho esperado dado por:

$$E(p,q) = (p_1\ p_2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

As estratégias $\alpha^1 = (1,0)$ e $\alpha^2 = (0,1)$ são ditas *puras*, de tal forma que $E(\alpha^i, \alpha^j) = a_{ij}$, $i,j = 1,2$. Em outras palavras, o elemento a_{ij} da matriz A expressa o ganho do jogador L quando L adota a estratégia pura α^i e C escolhe α^j. Embora estejamos introduzindo os conceitos da Teoria dos Jogos através de um exemplo em que $A \in I\!R^{2x2}$, é importante ressaltar que as mesmas idéias se aplicam naturalmente para $A \in I\!R^{m \times n}$.

Suponhamos que o jogador L soubesse a priori que C iria adotar a estratégia q^0. Neste caso, buscando maximizar seu ganho, L deveria escolher uma estratégia p^0 tal que $E(p^0,q^0) = \max_p E(p,q^0)$. Assim, a melhor política para C seria adotar q^0 tal que $\max_p E(p,q^0) = \min_q \max_p E(p,q) = \overline{v}$. O valor $\overline{v}$ pode ser interpretado como o máximo que L pode obter se C adota a estratégia q^0.

Por outro lado, se C soubesse que L iria escolher p^0, sua estratégia ótima seria tomar q^0 tal que $E(p^0,q^0) = \min_q E(p^0,q)$. Desta forma, L estaria se garantindo com a escolha de p^0 tal que $\min_q E(p^0,q) = \max_p \min_q E(p,q) = \underline{v}$. Este valor $\underline{v}$ pode ser interpretado como o máximo que L pode obter independentemente da escolha de C.

Um resultado clássico da Teoria dos Jogos (ver, por exemplo, Karlin (1959)) assegura a existência de p^0, q^0 e v tais que $E(p^0,q) \geq v$ para todo q e $E(p,q^0) \leq v$ para todo p se, e somente se, $\overline{v} = \min_q \max_q E(p,q) = v = \max_p \min_q E(p,q) = \underline{v}$. Este número v é conhecido como *valor do jogo*. Quando $v = 0$ o jogo é dito *honesto*.

No exemplo considerado anteriormente, supondo $q^0 = (x, 1-x)$, $0 \leq x \leq 1$, temos $\overline{v} = \max_{\substack{p_1+p_2=1 \\ p_1,p_2 \geq 0}} ((5x-3)p_1 + (4-7x)p_2)$. Analogamente, supondo $p^0 = (y, 1-y)$, $0 \leq y \leq 1$, segue que $\underline{v} = \min_{\substack{q_1+q_2=1 \\ q_1,q_2 \geq 0}} ((5y-3)q_1 + (4-7y)q_2)$. Desta forma, a igualdade $\overline{v} = \underline{v}$ ocorre para as estratégias ótimas $p^0 = q^0 = (7/12, 5/12)$ e consequentemente o valor do jogo é $v = -1/12$. Trata-se, portanto, de um jogo favorável ao jogador C.

Para finalizar esta seção vamos apresentar um exemplo de *jogo a duas pessoas com soma não nula,* conhecido como "dilema dos prisioneiros". Nos jogos com soma não nula leva-se em consideração a possibilidade de cooperação ou perda mútua. Imaginemos dois prisioneiros que cometeram um crime juntos, mas estão em celas separadas antes de um interrogatório. Cada um deles pode interferir no destino do companheiro. Se apenas um dos dois confessar, este terá sua sentença suspensa enquanto o outro prisioneiro cumprirá pena de 10 anos. Se ambos confessarem, cada um ficará 6 anos na prisão e se nenhum dos dois confessar, a sentença de cada um será de 2 anos. Lembrando que eles estão incomunicáveis, pergunta-se: o que os prisioneiros devem fazer? Neste jogo, existem duas atitudes possíveis para cada jogador: confessar ou ficar calado. Usando a notação (0,10) para indicar que o primeiro prisioneiro fica livre se apenas ele confessar, podemos estabelecer a seguinte matriz para este jogo:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{confissão} & \text{silêncio} \\
\begin{array}{c}\text{confissão} \\ \text{silêncio}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (6,6) & (0,10) \\ (10,0) & (2,2) \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

Os interesses dos prisioneiros neste dilema não são mutuamente conflitantes como nos jogos com soma nula, já que a alternativa de nenhum deles confessar é atraente para ambos. Neste caso, cada jogador quer minimizar sua própria pena e não ocorre diretamente a batalha entre as estratégias minimax e maxmin. De qualquer forma, o elemento essencial da teoria dos jogos está presente: a perda ou ganho de cada jogador depende fundamentalmente da atitude adotada por ambos. Se cada prisioneiro resolvesse adotar uma política de interesse individual, ambos acabariam confessando e ficando 6 anos na prisão. Por outro lado, se eles permanecessem calados, cumpririam apenas uma pena de dois anos. Neste exemplo vemos que, embora um acordo pudesse ser favorável para ambos, a possibilidade de que cada um aja em benefício próprio jamais pode ser eliminada.

Para maiores detalhes sobre a Teoria dos Jogos, ver Karlin (1959), Mizrahi e Sullivan (1973), Moore e Yachel (1974), Lipschutz (1977) e referências sugeridas nestes livros.

8. Problemas minimax em geral

Dadas m funções diferenciáveis $f_i : I\!R^n \to I\!R$ e $\Omega \subset I\!R^n$, o problema Minimax geral consiste em

$$\underset{x \in \Omega}{\text{Minimizar}} \quad f(x) = \text{máximo} \quad \{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}. \tag{8.1}$$

Todos os problemas mencionados neste artigo passam a ter a forma (8.1), depois de transformações triviais. O problema Minimax genérico tem múltiplas aplicações.

Podemos resolver (8.1) como uma seqüência de problemas com função objetivo diferenciável:

$$\underset{x \in \Omega}{\text{Minimizar}} \quad f_\theta(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} [f_i(x) - \theta]_+^2. \tag{8.2}$$

A idéia é que, se para algum $x \in \Omega, f_\theta(x) = 0$, então $\underset{x \in \Omega}{\text{Mínimo}}\ f(x) \leq \theta$. Reciprocamente, se na solução de (8.2), $f_\theta(x) > 0$, então $\underset{x \in \Omega}{\text{Mínimo}}\ f(x) > \theta$.

De maneira a ilustrar o esforço computacional empregado na resolução de um problema Minimax mostramos na Tabela 2 os resultados relativos ao problema do Vetor Inicial descrito na Seção 4. Utilizamos a formulação (8.1)-(8.2) com diferentes valores para n e m, trabalhando numa SU-Sparcstation 2 em linguagem FORTRAN 77. Na coluna $N\ S$ indicamos o número de subproblemas (8.2) necessários em cada caso.

n	m	NS	Tempo
4	16	34	1"
5	72	31	8"
6	397	49	20"
7	2635	80	1'
8	20541	69	10'
9	182749	93	1h 10'
10	1819147	96	18h

Tabela 2. Esforço em resolver (8.1)

9. Conclusões

Alguns dos problemas Minimax mais desafiantes do ponto de vista computacional e teórico tratam da maximização, possivelmente com restrições, da mínima distância entre elementos de um conjunto. Se a cardinalidade do conjunto é grande, o número de distâncias a serem calculadas em cada avaliação da função objetivo pode ser astronômica. Portanto, por um lado, se faz necessário implementar processos que ataquem o problema diminuindo radicalmente o número de distâncias necessárias, como no caso da restrição a grupos de permutações, analisado na Seção 4. Por outro lado, os algoritmos de otimização destinados a resolver o problema devem levar em conta a complexidade da função a ser minimizada poupando avaliações tanto quanto for possível, a expensas, talvez, de outros custos computacionais. Ambos os problemas são bastante atraentes e suscitam atualmente o desenvolvimento de pesquisa ativa. Esperamos com este pequeno artigo atrair a atenção dos leitores para este interessante ramo da otimização.

Referências

1. Blake, I.F., Distance Properties of Group Codes for the Gaussian Channel, *SIAM J. Appl. Math.*, 23, nº3, pp. 312-324, 1972.
2. Blake, I.F. e Mullin, R.C., *The Mathematical Theory of Coding*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
3. Cotes, S.D. e de Boor, C., *Elementary Numerical Analysis - An Algorithmic Approach*, 3 ed., McGraw-Hill, Singapore, 1981.
4. Conway, J.H. e Sloane, N.J.A., *Sphere Packings, Lattices and Groups*, a series of Compre-

hensive Studies in Mathematics 290, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1988.

5. Karlin, S. *Mathematical Methods and Theory in Games,* Programming and Economics vols. I, II, Addison-Wesley, Reading, *Massachuchetts,* Palo Alto, London, 1959.
6. Karlof, J.K., Permutation Codes for the Gaussian Channel, *IEEE Transactions on Information Theory,* 35, n° 4, pp. 726-732, 1989.
7. Lidl, R. e Pilz, G., *Applied Abstract Algebra,* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984.
8. Lipschutz, S. *Matemática Finita,* coleção Schaum, Mc Graw-Hill do Brasil, 1977.
9. Mizrahi, A. e Sullivan, M. *Finite Mathematics with Applications for Business and Social Science,*John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1973.
10. Moore, D.S. e Yackel, J.W. *Applicable Finite Mathematics,* Houghton Mifflin Co., Boston, 1974.
11. Shannon, C.E., A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Thech. J., 27, pp.* 379-423, 623-656, 1948.
12. Slepian, D., Group Codes for the Gaussian Channel, *Bell System Tech. J.,* 47, pp. 575-602, 1968.

Departamento de Matemática Aplicada,
IMECC-UNICAMP,
CP 6065, 13081-970 Campinas, SP.