Matemática Universitária Nº 16, julho de 1994, 67-69

O Teorema de A. H. Stone

Antônio Zumpano

Em 1944, J. Dieudonné [1] investigou uma classe de espaços que ele chamou de paracompactos. Neste artigo, J. Dieudonné mostrou que todo espaço métrico separável é paracompacto, e conjecturou que este fato permaneceria verdadeiro sem separabilidade. Em 1947, C. H. Dowker[2] estabeleceu o seguinte resultado: todo subconjunto de um espaço de Hilbert é paracompacto, e todo espaço métrico paracompacto pode ser topologicamente imerso em um espaço de Hilbert. Já se sabia que os espaços que podiam ser topologicamente imersos em um espaço de Hilbert separável eram os espaços métricos separáveis. Com isso, Dowker via a pracompacidade, em espaços métricos, com uma imediata generalização de separabilidade. No ano seguinte, ou seja, em 1948, A. H. Stone[6] publica um artigo confirmando a conjectura de J. Dieudonné. Mas, a confirmação desta conjectura vem em um contexto muito mais geral. A. H. Stone mostra na verdade que paracompacidade é equivalente à propriedade de "full normality", propriedade esta introduzida por J. W. Turkey[7] em 1940. Precisamente, o teorema de Stone é o seguinte: todo espaço T_1 e "fully normal" é paracompacto. Como coralário temos que, todo espaço métrico é paracompacto pois, J. W. Turkey[7] havia mostrado que um espaço métrico é "fully normal". Não há necessidade de encontrar uma tradução para o termo "fully normal" pois, não é muito usado na literatura. O termo aparece em J.L. Kelley[4] apenas em um exercício. J. Dugundji[3] usa conceito de refinamento baricêntrico para caracterizar esta propriedade, desconsiderando completamente a denominação "fully normal".

Nosso objetivo é apresentar uma demonstração do teorema de Stone usando argumentos estritamente relacionados com a métrica do espaço. Isso simplifica substancialmente a prova evitando o penoso percurso das generalizações topológicas apresentadas nas referências [3], [4], [5] e [6].

O teorema de Stone diz que todo espaço métrico é paracompacto. Logo, é um teorema fundamental para garantir a existência de partição da unidade, que por sua vez é um objeto amplamente usado em várias áreas da matemática. Por isso, se torna vantajoso ter uma demonstração mais direta que evite generalizações maiores de topologia.

Precisamos de algumas definições antes de iniciar a demonstração do teorema. Uma relação binária em um conjunto A é chamada uma ordem parcial (denotada por " $\leq$ ") se satisfaz $i)$ $a \leq a$ $\forall a \in A$ (reflexividade) $ii)$ $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$ (antissimetria) $iii)$ $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (transitividade).

Um conjunto munido de uma relação de ordem parcial é dito parcialmente ordenado. Dizemos que um conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ é bem-ordenado se todo subconjunto não vazio $B \subset A$ possui um primeiro elemento, i.e. para todo $B \subset A$, $B \neq \varnothing$ existe $b_o \in B$ tal que, $b_o \leq b$ para todo $b \in B$. (Observe que em um conjunto bem-ordenado, dois elementos quaisquer podem ser comparados pela relação binária, pois um subconjunto constituído de dois elementos possui um primeiro elemento).

Um resultado que usaremos é o teorema de Zermelo: todo conjunto pode ser bem-ordenado. Seja X um espaço topológico. Dizemos que uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ de subconjuntos de X é localmente finita se cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V_x tal que, $V_x \cap A_\lambda \neq \varnothing$ apenas para uma quantidade finita de índices λ.

Sejam $\mathbf{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ e $\mathbf{F'} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in j}$ duas famílias de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathbf{F'}$ é um refinamento de $\mathbf{F}$ se, para cada $\alpha \in j$, existe $\lambda \in I$ tal que, $B_\alpha \subset A_\lambda$; ou seja, todo elemento de $\mathbf{F'}$ está contido em algum elemento de $\mathbf{F}$.

Definição: Seja X um espaço topológico de Hausdorff. X é paracompacto se toda cobertura de X possui um refinamento aberto, localmente finito que também cobre X, i.e. se $\mathbf{C}$ é uma cobertura aberta de X então existe uma cobertura aberta $\mathbf{C'}$ tal que, $\mathbf{C'}$ é um refinamento de $\mathbf{C}$ e $\mathbf{C'}$ é localmente finita.

Teorema: (A.H. Stone) Todo espaço métrico é paracompacto.

Demonstração: Seja X um espaço métrico. A demonstração será dividida em duas partes.

1ª parte. Dada uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in j}$ de X, existe uma cobertura aberta $\{E_{\alpha,n}\}_{\alpha \in j,\, n \in N}$ tal que $E_{\alpha,n} \subset U_\alpha$ para todo $\alpha \in j, n \in N$; e para cada $n \in N$, $\{E_{\alpha,n}\}_{\alpha \in j}$ é localmente finita. Com efeito: pelo teorema de Zermelo, o conjunto j pode ser bem-ordenado. Seja " $\leq$ " uma relação binária em j de forma que $(j,\leq)$ fique bem-ordenado. Para cada α, n defina

$$A_{\alpha,n} = \{x \in X\,;\, B(x;\tfrac{1}{n}) \subset U_\alpha \text{ e } x \notin U_\lambda \text{ se } \lambda \leq \alpha,\ \lambda \neq \alpha\}$$

(os conjuntos $A_{\alpha,n}$ não são necessariamente abertos, na verdade é possível provar facilmente que eles são fechados, mas isso não nos interessa). Observe que $d(A_{\alpha,n}\,;A_{\gamma,n}) \geq 1/n$ se $\alpha \neq \gamma$. Defina agora $E_{\alpha,n} = \bigcup_{x\in A_{\alpha,n}} B(x;\frac{1}{3n})$. Temos então que, $E_{\alpha,n}$ é aberto, $A_{\alpha,n} \subset E_{\alpha,n} \subset U_\alpha$ para todo $\alpha \in j$ e $n \in N$. Além disso, $X = \bigcup_{\alpha\in j, n\in N} E_{\alpha,n}$, pois se $x \in X$, seja $j_o = \{\alpha \in j\,;\, x \in U_\alpha\}$; certamente $j_o \neq \emptyset$ e possui um primeiro elemento α_o; escolha então $n \in N$ tal que $B(x;\frac{1}{n}) \subset U_{\alpha_o}$, ou seja $x \in E_{\alpha_o,n}$. Agora, vamos mostrar que para cada n fixo, $\{E_{\alpha,n}\}_{\alpha\in j}$ é localmente finita. Isso decorre do fato de que $d(E_{\alpha,n}\,;E_{\gamma,n}) \geq \frac{1}{3n}$ se $\alpha \neq \gamma$: dado $x \in X$, a bola $B(x, \frac{1}{6n})$ intercepta $E_{\alpha,n}$ no máximo para um elemento de j.

2ª parte. A cobertura aberta $\{E_{\alpha,n}\}_{\alpha\in j, n\in N}$ é um refinamento da cobertura original, mas ainda não é necessariamente localmente finita. Defina então $V_n = \bigcup_{\alpha\in j} E_{\alpha,n}$ e $W_n = V_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} V_j$. Temos que, $\{W_n\}_{n\in N}$ cobre X e é localmente finita, porém, os conjuntos W_n não são em geral abertos. Para contornar esse problema ponha $Z_n = \bigcup_{x\in W_n} B(x, \frac{1}{n})$. Obtemos assim uma cobertura aberta de X e localmente finita a saber $\{Z_n\}_{n\in N}$. Agora, seja $B_{\alpha,n} = Z_n \cap E_{\alpha,n}$. Verifica-se facilmente que $\{B_{\alpha,n}\}_{\alpha\in j, n\in N}$ é uma cobertura aberta de X, localmente finita e que refina $\{U_\alpha\}_{\alpha\in j}$. Logo, X é paracompacto.

Referências

1. Dieudonné, J.: Une généralisation des espaces compacts, *J. Math. Pures Appl. vol. 23 (1944) pp. 65-76.*
2. Dowker, C.H.: An imbedding theorem for paracompact metric spaces, *Duke Math. J. 14 (1947) 639-645.*
3. Dugundji, J.: *Topology,* Allyn and Bacon, Boston, 1966.
4. Kelley, J.L.: *General Topology,* Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1955.
5. Munkres J.R.: *Topology a first course,* Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
6. Stone, A.H.: Paracompactness and product spaces, *Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948) 977-982.*
7. Turkey, J. W.: *Convergence and uniformity in general topology,* Annals of Mathematics Studies, n° 2, Princeton, 1940.

Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas - UFMG
Caixa Postal 702
30161-970 - Belo Horizonte/MG