ENSAIO

Matemática Universitária Nº 17, dezembro de 1994, 1-21

A Jaffe e F. Quinn, ao publicarem o ensaio "Treoretical Mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics", Bull. Amer. Math. Soc., 29(1993), 1-13, provocaram várias reações entre matemáticos e físicos teóricos.

O professor R. S. Palais, membro do Comitê Editorial do Bulletin da American Mathematical Society, decidiu coletar tais reações no volume 30, nº 2, de abril de 1994, do Bulletin, publicando respostas e comentários (uns encomendados, outros espontâneos) ao ensaio de Jaffe e Quinn.

Uma delas é o ensaio "On the Proof and Progress in Mathematics", assinado por Willian Thurston. Foi motivado pelo texto de Jaffe e Quinn, mas sua leitura é praticamente independente dele.

O Comitê Editorial da RMU decidiu publicar a seguir tradução para o português deste excelente ensaio de Thurston, e aproveita a oportunidade para de público agradecer à American Mathematical Society e ao autor, que gentilmente permitiram esta publicação, e aos professores Mário Jorge Dias Carneiro, Michel Spira e Pedro Mendes, da UFMG, pela tradução.

Sobre prova e progresso em matemática*

por William P. Thurston

Este ensaio sobre a natureza da prova e do progresso em matemática foi motivado pelo artigo *"Theoretical Mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and physics"*, de Jaffe e Quinn. Este último levanta questões interessantes às quais os matemáticos deveriam prestar mais atenção, mas também, perpetua algumas crenças amplamente aceitas que precisam ser questionadas e examinadas.

O artigo tem um parágrafo descrevendo parte do meu trabalho de um modo que diverge da minha experiência, e também diverge das observações de pessoas que trabalham na minha área com quem discuti sobre ele.

Após alguma reflexão, pareceu-me que o que Jaffe e Quinn escreveram é um exemplo do fenômeno de que as pessoas vêm o que têm a intenção de ver. Seu ponto de vista sobre o meu trabalho resultou de considerar a sociologia da matemática como uma escala unidimensional (especulação versus rigor), ignorando muitos fenômenos básicos.

Respostas e comentários ao artigo de Jaffe e Quinn foram solicitadas a vários matemáticos e acredito que ele receberá várias análises e críticas específicas. Portanto concentrar-me-ei neste ensaio na afirmativa em lugar da contranegativa. Descreverei minha visão do processo da matemática, referindo-me apenas ocasionalmente a Jaffe e Quinn para efeito de comparação.

Numa tentativa de eliminar suposições, é importante começar pelas perguntas corretas:

* Traduzido de William P. Thurston - *"On the Proof and Progress in Mathematics"*, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume **30**, Number 2, April 1994, pp 161-177, com a permissão do autor.

1. O que realizam os matemáticos?

Há muitos aspectos implícitos nesta pergunta, que tentei formular de modo a não pressupor a natureza da resposta.

Não seria bom, por exemplo, começar com a pergunta

Como os matemáticos demonstram teoremas?

Esta pergunta introduz um assunto interessante, mas começar com ela seria assumir implicitamente:

(1) que existem uma teoria e uma prática uniforme, objetiva e bem estabelecida de demonstração em matemática, e

(2) que o progresso feito pelos matemáticos consiste em provar teoremas.

É importante examinar essas hipóteses, em lugar de aceitá-las como óbvias e prosseguir.

A pergunta nem mesmo é

Como os matemáticos fazem o progresso em matemática?

Em vez disso, como uma forma mais explícita (e dirigida) da pergunta, eu prefiro

Como os matemáticos aumentam o entendimento humano da matemática?

Esta pergunta traz à tona algo que é fundamental e universal: o que fazemos é encontrar maneiras pelas quais as *pessoas* possam entender e pensar sobre matemática.

O rápido avanço dos computadores ajudou a enfatizar esse ponto, porque computadores e pessoas são muito diferentes. Por exemplo, quando Appel e Haken completaram a prova do Teorema do Mapa de Quatro Cores usando grande quantidade de cálculos difíceis executados por computador, levantou-se muita controvérsia. Interpreto esta como tendo muito pouco a ver com as dúvidas quanto à veracidade do teorema e à correção da prova. Em vez disso, ela refletiu o desejo contínuo da *compreensão humana* da prova, além do simples conhecimento de que o teorema é verdadeiro.

Num nível mais usual, é comum principiantes em computação fazerem longos cálculos que poderiam ser feitos à mão numa escala menor. Pode-se produzir uma lista com os 10.000 primeiros números primos apenas para verificar, posteriormente, que não era exatamente isso que se queria. Descobre-se com esta experiência que o que realmente se pretende não é um conjunto de "respostas" — mas sim *compreensão*.

Pode parecer quase circular dizer que o que os matemáticos realizam é o avanço da compreensão humana da matemática. Não tentarei resolver isso discutindo o que é a matemática, pois isso nos levaria longe demais. Os matemáticos geralmente sentem que sabem o que é a matemática, mas têm dificuldade em apresentar uma boa definição direta. É interessante tentar. Para mim, "a teoria dos modelos formais" é a que mais se aproxima, mas sua discussão nos levaria a um novo ensaio.

Poderia a dificuldade de se dar uma definição direta de matemática ser algo intrínseco, indicando que a matemática possui uma qualidade recursiva que lhe é essencial? Nessa direção poderíamos dizer que a matemática é a menor área de conhecimento que satisfaz às seguintes condições:

- A matemática inclui os números naturais e as geometrias plana e sólida.
- A matemática é o que os matemáticos estudam.
- Matemáticos são pessoas que aumentam a compreensão humana da matemática.

Em outras palavras, à medida que a matemática avança, nós a incorporamos ao nosso pensamento. À medida que este se torna mais sofisticado, geramos novos conceitos e estruturas matemáticas: os assuntos da matemática mudam para refletir a maneira como pensamos.

Se o que estamos fazendo é construir melhores maneiras de pensar, então os aspectos psicológico e social são essenciais para um bom modelo do progresso da matemática. Estas dimensões estão ausentes da visão popular. A visão popular assegura, caricatamente, que

D. Os matemáticos partem de umas poucas estruturas matemáticas e de um conjunto de axiomas "dados" sobre estas estruturas, que

T. existem várias questões importantes a serem resolvidas sobre estas estruturas que podem ser enunciadas como proposições matemáticas formais, e

P. o objetivo do matemático é encontrar a partir dos axiomas um caminho dedutivo para as proposições ou para a negação delas.

Podemos chamar isso de modelo Definição - Teorema - Prova (DTP) da matemática.

Uma dificuldade óbvia do modelo DTP é que ele não esclarece a origem das questões. Jaffe e Quinn discutem a especulação (que rotulam inadequadamente de "matemática teórica") como um ingrediente adicional importante. Especulação consiste em fazer conjecturas, propor problemas e dar palpites inteligentes e argumentos heurísticos sobre o que provavelmente é verdadeiro.

O modelo DETP de Jaffe e Quinn também deixa de lado algumas questões básicas. Não estamos tentando satisfazer alguma cota abstrata de produção de definições, teoremas e provas. A medida do nosso sucesso é se o que fazemos possibilita as *pessoas* compreender e pensar mais clara e efetivamente sobre matemática.

Portanto, necessitamos de perguntar-nos:

2. Como se compreende matemática?

A compreensão é um processo individual e interno, do qual nos damos conta com dificuldade; é difícil entendê-la e freqüentemente difícil transmiti-la. Podemos apenas tratá-la superficialmente.

Existem diferentes maneiras de compreender partes específicas da matemática. Para ilustrar isso, é melhor tomar um exemplo de um conceito que os matemáticos compreendem de várias maneiras, mas que oferece grandes dificuldades aos nossos estudantes: a derivada de uma função. Esta pode ser vista como:

(1) Infinitesimal: a razão da variação infinitesimal do valor da função para uma variação infinitesimal da variável.

(2) Simbólica: a derivada de x^n é nx^{n-1}, a derivada de $sen(x)$ é $\cos(x)$, a derivada de $f \circ g$ é $f' \circ g * g'$ etc.

(3) Lógica: $f'(x) = d$ se e somente se para cada ε existe um δ tal que quando $0 < |\Delta x| < \delta$, $\left|\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d\right| < \varepsilon$.

(4) Geométrica: a derivada é o coeficiente angular da tangente ao gráfico da função, isto se o gráfico tem uma tangente.

(5) Taxa: a velocidade instantânea de f(t) quando t é o tempo.

(6) Aproximação: A derivada de uma função é a melhor aproximação linear para a função próximo a um ponto.

(7) Microscópia: A derivada de uma função é o limite que se obtém olhando-a com microscópios cada vez mais poderosos.

Esta é uma relação de modos diferentes de pensar sobre ou de conceber a derivada, em lugar de uma lista de definições lógicas diferentes. A não ser que se faça um grande esforço para se manter o tom e o sabor da intuição humana, as diferenças começam a desaparecer tão logo se traduzem conceitos mentais em definições formais, explícitas, e precisas.

Posso lembrar-me absorvendo cada um desses conceitos como algo novo e interessante, gastando muito tempo de raciocínio e esforço, digerindo e exercitando cada um deles, relacionando-o com os outros. Lembro-me também retornando a esses diferentes conceitos, adicionando-lhes significado e compreensão.

A lista continua; não há razão para que ela termine. Uma amostra de um item que ocorre bem abaixo na lista pode servir como ilustração. Podemos achar que sabemos tudo o que se pode dizer sobre certo assunto, mas novas percepções estão logo ali. Além disso uma imagem mental clara para uma pessoa é intimidação para outra:

(37) A derivada de uma função real f num domínio D é a secção Lagrangeana do fibrado cotangente T*(D) que dá a forma de conexão para a única conexão plana do fibrado real trival DxR para a qual o gráfico de f é paralelo.

Essas diferenças não são apenas curiosidades. O pensamento e a compreensão humanas não funcionam numa via única, como num computador com uma única central de processamento. Nossos cérebros e mentes parecem ser organizados em uma grande variedade de estruturas separadas e poderosas. Essas estruturas trabalham em conjunto e independentemente, comunicando-se entre si em altos níveis de organização ao invés de em níveis inferiores.

Aqui estão algumas das divisões principais que são importantes para o pensamento matemático:

(1) Linguagem Humana. Nós possuímos estruturas eficientes e especializadas destinadas à fala e compreensão da linguagem humana, que se conectam também com a escrita e leitura. Nossa estrutura lingüística é um instrumento importante para o raciocínio, e não apenas para comunicação. Um exemplo simples é a fórmula das raízes de uma equação do segundo grau que as pessoas decoram como uma ladainha "xisigual a menosbê maisomenos bedois menos quatracê sobre doisá". A linguagem simbólica da matemática está fortemente ligada à nossa estrutura de linguagem. O simbolismo matemático utilizado pela maioria dos estudantes de Cálculo tem somente um verbo, "=". Quase todos que lecionaram cálculo nos Estados Unidos viram estudantes escrever instintivamente "$x^3 = 3x^2$" e coisas parecidas.

(2) Visão, percepção espacial, percepção cinética. As pessoas possuem estruturas muito poderosas para adquirir informações visualmente ou cineticamente, e para raciocinar através de sua percepção espacial. Por outro lado, não há uma estrutura bem montada para a visão inversa, isto é, transformar uma compreensão espacial interna em uma imagem bidimensional. Conseqüentemente, os matemáticos têm em geral figuras mais pobres e em quantidade menor em seus livros e artigos que em suas mentes.

Um fenômeno interessante do raciocínio espacial é que a escala faz uma grande diferença. Podemos pensar em pequenos objetos em nossas mãos, ou podemos pensar em estruturas maiores de dimensões humanas, ou podemos pensar em estruturas espaciais que nos envolvem e onde nos movemos. Tendemos a pensar melhor com figuras em uma escala maior: é como se nossos cérebros considerassem coisas maiores mais seriamente e pudessem devotar mais recursos a elas.

(3) Lógica e dedução. Associado ao modo com que fazemos deduções lógicas temos algumas maneiras programadas de raciocinar e agrupar idéias: causa e efeito (relacionada com implicação), contradição ou negação, etc.

Em geral, parece que os matemáticos não se apóiam em regras formais de dedução quando estão pensando. Em vez disso, eles guardam apenas parte razoável da estrutura lógica de uma prova em suas mentes, quebrando provas em resultados intermediários, de modo a não lidar com muita lógica de uma só vez. De fato, é comum excelentes matemáticos não conhecerem nem mesmo as regras básicas dos quantificadores (para todo e existe), no entanto todos os matemáticos certamente executam o raciocínio que eles codificam.

É interessante que apesar de "ou", "e" e "implica" terem uso formal idêntico, nós pensamos em "ou" e "e" como conjunções e em "implica" como verbo.

(4) Intuição, associação, metáfora. As pessoas têm uma capacidade surpreendente para perceber alguma coisa sem conhecer de onde ela vem (intuição); para perceber que um fenômeno, uma situação ou um objeto é parecido com algum outro (associação); e para construir e testar conexões e comparações, mantendo em mente duas coisas ao mesmo tempo (metáfora). Essas capacidades são muito importantes para os matemáticos. Pessoalmente, faço um grande esforço para "ouvir" minhas intuições e associações, e construir a partir delas metáforas e conexões. Isso envolve um tipo de quietude e concentração simultâneas de minha mente. Palavras, lógica e figuras detalhadas agitando-se em volta podem inibir intuições e associações.

(5) Estímulo - resposta. Isso é sempre enfatizado nas escolas; por exemplo, se você vê 3927x253, escreve um número sobre o outro e traça uma linha por baixo, etc. Isso é também importante para a pesquisa em matemática: vendo o diagrama de um nó, posso escrever uma apresentação para o grupo fundamental de seu complementar por uma reação semelhante àquela causada pelo algoritmo da multiplicação.

(6) Processo e tempo. Nós possuímos uma habilidade para pensar sobre processos ou seqüências de ações que pode efetivamente ajudar no raciocínio matemático. Um modo de ver uma função é como uma ação, um processo, que leva o domínio no contradomínio. Isso é particularmente útil quando compomos funções. Um outro uso dessa estrutura é na recordação de provas: as pessoas freqüentemente relembram uma prova como um processo consistindo de várias etapas. Em topologia, a noção de homotipia é pensada freqüentemente como um processo temporal. Matematicamente não se distingue o tempo de uma dimensão espacial a mais; no entanto, ele é psicologicamente muito diferente pois interagimos com ele de um modo muito especial.

3. Como a compreensão matemática é transmitida?

A transferência da compreensão de uma pessoa para outra não é automática. É difícil e intrincada. Portanto, para analisar a compreensão humana da matemática, é importante considerar **quem** compreende **o que,** e **quando.**

Os matemáticos têm desenvolvido hábitos de comunicação que são freqüentemente contraproducentes. Em toda parte, organizadores de conferências para audiências não especializadas estimulam os conferencistas a explicarem as coisas em termos elementares. Apesar disso, a maioria da audiência pouco aproveita numa palestra típica desta natureza. Às vezes ficam perdidos após os 5 primeiros minutos, e no entanto permanecem presentes e silenciosos ao longo dos 55 minutos restantes. Ou então perdem o interesse rapidamente porque o conferencista mergulha em detalhes técnicos sem apresentar qualquer razão para investigá-los. Ao final da conferência, uns poucos matemáticos de área próxima à do conferencista fazem uma ou duas perguntas para evitar constrangimentos.

Este padrão é semelhante ao que freqüentemente ocorre nas salas de aula, onde dizemos mecanicamente aos estudantes o que achamos que eles "devem" aprender, enquanto eles estão tentando resolver questões mais fundamentais como aprender nossa linguagem e adivinhar nossos modelos mentais. Livros evitam este problema trazendo exemplos resolvidos para todos os tipos de problemas que serão pedidos nos trabalhos escolares. Professores fazem o mesmo dando exercícios e testes muito mais fáceis do que o material "coberto" na disciplina e atribuindo notas e conceitos numa escala que requer pouca compreensão. Supomos que o problema é com os estudantes e não com a comunicação: que os estudantes não estão aptos a entender o assunto, ou que simplesmente não se interessam.

Leigos ficam assombrados com esse fenômeno, mas dentro da comunidade matemática, nós o menosprezamos com um encolher de ombros.

Muito da dificuldade tem a ver com a linguagem e a cultura da matemática, que é dividida em áreas. Conceitos básicos usados com freqüência em uma área muitas vezes são desconhecidos em outra. Os matemáticos desistem de tentar entender conceitos básicos mesmo de uma área próxima, a não ser que sejam iniciados neles quando estudantes de pós-graduação.

Por outro lado, a comunicação entre matemáticos da mesma área funciona muito bem. Dentro de uma área, desenvolve-se um corpo de conhecimentos comuns e de técnicas conhecidas. Em contatos informais, uns aprendem a compreender e imitar a maneira de pensar dos outros, de modo que as idéias podem ser explicadas clara e facilmente.

O conhecimento matemático pode se transmitido com velocidade espantosa dentro de uma área. Quando um teorema significativo é provado, freqüentemente (mas não sempre) ocorre que a solução pode ser transmitida em questão de minutos de uma pessoa para outra dentro da área. A mesma prova seria transmitida e geralmente compreendida em uma palestra de uma hora para membros da área. Seria assunto de um artigo e 15 a 20 páginas, que poderia ser lido e compreendido em poucas horas ou talvez dias por membros da área.

Porque uma expansão tão grande da discussão informal para a conferência e da conferência para o artigo? Face a face, usam-se amplos canais de comunicação que vão muito além da linguagem matemática formal. Usam-se gestos, figuras e diagramas, sons e linguagem corporal. A comunicação provavelmente tem mão dupla, de modo que as pessoas podem se concentrar no que necessita maior atenção. Com esses canais de comunicação, fica-se numa posição muito melhor para transmitir idéias, não apenas em seus aspectos lógicos e lingüísticos, mas também em seus outros aspectos mentais.

Em conferências, as pessoas são mais inibidas e mais formais. As audiências matemáticas em geral não são muito boas para fazer as perguntas que estão nas mentes da maioria dos presentes, e os conferencistas em geral possuem um esquema irreal preestabelecido, que os inibe de tratar perguntas mesmo quando elas lhes são dirigidas.

Nos artigos, as pessoas são ainda mais formais. Escritores traduzem suas idéias em símbolos e lógica, e leitores tentam traduzir de volta.

Porque existe tamanha discrepância entre comunicação dentro de uma área e comunicação fora da área, para não mencionar comunicação fora da matemática?

A matemática, em certo sentido, tem uma linguagem comum: a dos símbolos, definições técnicas, cálculos e lógica. Esta linguagem transmite eficientemente alguns, mas não todos, os tipos de pensamento matemático. Os matemáticos aprendem a traduzir certas coisas quase que inconscientemente de um modo de pensar para outro, de modo que algumas afirmações se tornam rapidamente claras. Diferentes matemáticos estudam artigos de maneiras distintas, mas quando leio um artigo de matemática de uma área que me é familiar, concentro-me nos argumentos que estão nas entrelinhas. Examino vários parágrafos e seqüências de equações e penso comigo mesmo: "Ah sim, eles estão arrumando as coisas para desenvolver tal e tal idéia." Quando a idéia é clara o suporte formal é usualmente desnecessário e redundante — freqüentemente acho que seria mais fácil eu reescrever o artigo do que descobrir o que os autores de fato escreveram. É como uma nova torradeira que vem com um manual de 16 páginas. Se você já conhece torradeiras e se a nova é parecida com alguma que você usou, você pode imediatamente ligá-la e ver se funciona, ao invés de ler primeiro todos os detalhes no manual.

Pessoas familiarizadas com os métodos de uma certa área reconhecem vários padrões de fórmulas e afirmações como expressões idiomáticas ou paráfrases para certos conceitos ou imagens mentais. Mas, para quem ainda não está familiarizado com o que se passa, os mesmos padrões não são muito esclarecedores, e muitas vezes nada significam. A linguagem só é viva para aqueles que a usam.

Gostaria de fazer uma observação importante aqui: existem alguns matemáticos que estão familiarizados com as maneiras de pensar de mais que uma área, algumas vezes de várias áreas. Alguns aprendem o jargão de várias áreas como alunos de pós-graduação, outros são muito rápidos em aprender a linguagem e cultura matemática de outras áreas, e outros estão em centros matemáticos em que são expostos a várias áreas. Pessoas que se sentem confortáveis em mais de uma área podem ter freqüentemente uma influência muito positiva, servindo de ponte, e ajudando diferentes grupos de matemáticos a aprender uns com os outros. Mas podem também ter um efeito negativo, intimidando outros, e ajudando a manter um sistema de comunicação pobre em geral. Por exemplo, freqüentemente ocorre em conferências de um colóquio, que uma ou duas pessoas de amplo conhecimento matemático sentadas na primeira fila sejam tomadas pelo conferencista como indicativo da platéia.

Há um outro fato causado pelas grandes diferenças entre como pensamos sobre matemática e como a escrevemos. Um grupo de matemáticos interagindo uns com os outros podem manter viva uma coleção de idéias por um período de anos, apesar da versão escrita de seus trabalhos diferir do que de fato pensam, dando ênfase muito maior à linguagem, ao simbolismo, à lógica e ao formalismo. Mas quando novos grupos de matemáticos aprendem o assunto, eles tendem a interpretar o que lêem e ouvem mais literalmente, de modo que o formalismo e a maquinaria, que são mais facilmente gravados, tendem gradualmente a se sobrepor a outras formas de pensamento.

Existem dois antídotos para essa tendência dos matemáticos se atolarem inteiramente no formalismo. Primeiro, as novas gerações de matemáticos estão continuamente descobrindo e redescobrindo idéias por si mesmas, e assim reintroduzindo diferentes formas de pensamento na matemática.

Em segundo lugar, os matemáticos às vezes inventam nomes e descobrem definições unificadoras que substituem floreios técnicos e criam boas chances para melhor percepção das idéias. Nomes como "grupo" em lugar de *"um sistema de substituições satisfazendo..."* e "variedade" para substituir

> *"Não podemos dar coordenadas para parametrizar simultaneamente todas as soluções de nossas equações, mas numa vizinhança de qualquer solução particular podemos introduzir coordenadas* $(f_i(u_1, u_2, u_3), i = 1,2,3,4,5)$ *onde pelo menos um dos dez determinantes . . . [dez determinadas* 3×3 *da matriz das derivadas parciais] . . . não é zero."*

pode ou não ter representado avanços na compreensão entre especialistas, mas eles facilitaram enormemente a *comunicação* desta.

Nós, matemáticos, precisamos fazer um esforço muito maior no sentido de comunicar *idéias* matemáticas. Para isso, precisamos dar muito mais atenção à comunicação não apenas de definições, teoremas e provas, mas também de nossos modos de pensar. Precisamos levar em conta o valor das diferentes maneiras de ver uma mesma estrutura matemática.

Precisamos concentrar muito mais energia na compreensão e na explicação da infra-estrutura mental básica da matemática — e conseqüentemente menos para os resultados mais recentes. Isso implica o desenvolvimento de linguagem matemática efetiva para o objetivo radical de familiarizar as pessoas com idéias que elas ainda não conhecem.

Parte desta comunicação é através de provas.

4. — O que é uma prova?

Quando iniciei meu curso de pós-graduação em Berkeley, tive dificuldades em imaginar como poderia "provar" um teorema matemático novo e interessante. De fato, eu não compreendia o que era uma "prova".

Participando de seminários, lendo artigos, e conversando com outros alunos de pós-graduação, comecei gradualmente a dominar o assunto. Em qualquer área, existem certos teoremas e certas técnicas que são comumente conhecidas e comumente aceitas. Quando você escreve um artigo, refere-se a eles sem prova. Você lê outros artigos da área, e vê quais fatos são admitidos sem demonstração, e o que citam em suas bibliografias. Você aprende de outras pessoas algumas idéias das provas. Aí você está livre para usar os mesmos teoremas e fazer as mesmas citações. Você não tem que ler todos os artigos e livros que estão em sua bibliografia. Muitas das coisas comumente conhecidas são coisas para as quais podem não existir fontes escritas conhecidas. Enquanto os especialistas da área confiarem que a idéia funciona, não é necessário haver uma referência escrita.

Inicialmente eu estava bastante desconfiado desse processo. Tinha dúvidas sobre quando uma idéia estava realmente estabelecida. Mas descobri que poderia perguntar às pessoas, e elas poderiam fornecer-me explicações e provas, ou indicar-me outras pessoas ou fontes escritas que me dariam explicações e provas. Existiam teoremas publicados que eram reconhecidamente falsos, ou cujas provas eram reconhecidamente incompletas. O conhecimento e a compreensão da matemática estão mergulhados nas mentes e no tecido social daqueles que pensam sobre um tópico específico. Este conhecimento está apoiado em documentos escritos, mas estes não são realmente indispensáveis.

Penso que esse modelo varia bastante de uma área para outra. Eu estava interessado em áreas geométricas da matemática, onde é difícil aparecer um trabalho que reflita bem o modo como as pessoas pensam. Em áreas mais algébricas ou simbólicas, não é necessariamente assim, e tenho a impressão que em algumas áreas os documentos estão muito próximos de trazerem consigo a vida do assunto. Mas em qualquer área, existe um forte padrão social de validade e de verdade. A prova de Andrew Wiles para o Último Teorema de Fermat é uma boa ilustração disso, numa área que é muito algébrica. Os especialistas começam a acreditar que a prova está basicamente correta com base em idéias de alto nível, muito antes dos detalhes terem sido checados. Esta demonstração passará por maior verificação e escrutínio se comparada com a maioria das provas matemáticas; mas independente de como o processo de verificação ocorra, ele ajuda a ilustrar como a matemática evolui por processos psicológicos e sociais basicamente orgânicos.

Quando se faz matemática, o fluxo de idéias e o padrão social de validade são muito mais confiáveis que documentos formais. As pessoas não são usualmente muito boas para checar a *correção formal* das provas, mas o são para detectar pontos fracos e falhas potenciais em uma prova.

Para evitar más interpretações, gostaria de enfatizar duas coisas que não estou dizendo. Primeiro, não estou advogando qualquer relaxamento do modelo de provas de nossa comunidade; estou tentando descrever como o processo funciona na realidade. Demonstrações cuidadosas que sobrevivem ao escrutínio são muito importantes. Penso que o processo da prova como um todo funciona muito bem na comunidade matemática. A natureza da mudança que eu advogaria é que os matemáticos tenham mais cuidado em suas provas, tornando-as realmente tão claras e simples quando possível, de modo que se elas tiverem alguma falha, esta seja facilmente detectada. Em segundo lugar, não estou criticando o estudo matemático das provas formais, nem criticando os que gastam suas energias tornando argumentos matemáticos mais explícitos e formais. Ambas são atividades úteis que trazem novas descobertas para a matemática.

Tenho feito bastante esforço em parte da minha carreira explorando questões matemáticas por computador. Devido a esta experiência, fiquei espantado com a afirmação de Jaffe e Quinn de que a matemática é extremamente lenta e árdua, e que é reconhecidamente a mais disciplinada de todas as atividades humanas. O padrão de correção e completitude necessários para obter-se um programa de computador que funcione é um par de ordens de grandeza mais alto que o padrão de validade de provas da comunidade matemática. Entretanto, extensos programas de computador, mesmo quando muito cuidadosamente escritos e testados, sempre parecem ter defeitos.

Acho que a matemática é uma das atividades humanas mais gratificantes intelectualmente. Como temos um critério elevado para o raciocínio claro e convincente e valorizamos muito ouvir e tentar entender uns aos outros, não nos envolvemos em argumentos intermináveis e num refazer sem fim de nossa matemática. Estamos preparados para sermos convencidos pelos outros. Intelectualmente, a matemática avança muito rapidamente. Contextos matemáticos inteiros mudam e mudam novamente de maneiras surpreendentes no período de uma única vida profissional.

Quando se considera a dificuldade de escrever um programa de computador que chegue pelo menos perto do alcance intelectual de um bom artigo de matemática, e quão maior é o tempo e o esforço necessário para torná-lo "quase" formalmente correto, é absurdo dizer-se que a matemática como é feita está próxima de ser formalmente correta.

A matemática como a fazemos é formalmente muito mais completa e precisa que qualquer outra ciência, mas é muito menos completa e precisa na sua essência do que programas de computador. A diferença não é apenas o volume de esforço: o tipo de esforço é qualitativamente diferente. Em programas de computador extensos, uma enorme parte do esforço deve ser dedicada a um sem número de questões de compatibilidade: assegurando que todas as definições sejam consistentes, desenvolvendo "boas" estruturas de dados que tenham generalidade útil mas não atrapalhem, decidindo a generalidade "correta" para as funções, etc. A proporção de energia dedicada à implementação de um programa extenso, diferentemente da parte de elaboração, é surpreendentemente pequena. Como as definições "corretas" mudam com o aumento de generalidade e funcionalidade, os programas de computador necessitam ser reescritos freqüentemente, muitas vezes a partir do nada, por causa de questões de compatibilidade que quase inevitavelmente aumentam sem limite.

Um esforço de natureza muito semelhante teria que ser implementado na matemática para torná-la formalmente correta e completa. Não que a correção formal seja proibitivamente difícil em pequena escala — é que existem muitas escolhas possíveis de formalização em pequena escala que implicam em enorme quantidade de escolhas interdependentes em grande escala. É muito difícil tornar essas escolhas compatíveis; para fazê-lo certamente seríamos forçados a voltar atrás e reescrever a partir do zero todos os velhos artigos de matemática de cujos resultados dependemos. É também muito difícil realizar boas escolhas técnicas para definições formais que venham a ser válidas na variedade de situações em que os matemáticos desejam usá-las, e que venham prever futuras extensões da matemática. Se fôssemos continuar a trabalhar em conjunto, muito de nosso tempo seria dedicado a comissões internacionais de padronização para estabelecer definições uniformes e resolver controvérsias.

Quando motivados ou exigidos, os matemáticos podem completar provas, corrigir erros ou fornecer mais detalhes. Nosso sistema é muito bom na produção de teoremas confiáveis que podem ser solidamente justificados. O fato é que esta confiabilidade não provém primariamente da verificação de argumentos formais pelos matemáticos; ela provém do raciocínio cuidadoso e crítico sobre idéias matemáticas.

No nível mais fundamental, as bases da matemática são muito mais instáveis do que a matemática que fazemos. Muitos matemáticos adotam princípios fundamentais que são sabidamente mitos. Por exemplo, existe um teorema que diz não existir nenhum modo de construir efetivamente ou mesmo definir uma boa ordenação dos números reais. Existe considerável evidência (mas não uma prova) de que podemos passar ao largo desses mitos sem cometer erros, mas isso não os torna corretos. Especialistas em teoria dos conjuntos construíram muitos "universos matemáticos" alternativos e mutuamente contraditórios, tais que se um é consistente os outros também são. Isso deixa muito pouca certeza de que um ou outro é a escolha correta ou natural. O teorema de incompletitude de Göedel implica que não existe um sistema formal que seja consistente, e ao mesmo tempo abrangente o suficiente para servir de base para toda a matemática que fazemos.

Em contraste com os seres humanos, os computadores executam processos formais muito bem. Há pessoas trabalhando tenazmente no projeto de formalização efetiva de partes da matemática por computador, já com deduções formais formalmente corretas. Penso que este é um projeto muito grande mas importante, e estou confiante que aprenderemos muito com ele. O processo ajudará a simplificar e a clarificar a matemática. Daqui a poucos anos, presumo que teremos programas de computador interativos que permitam compilar partes significativas de matemática formalmente completas e corretas (baseados em algumas hipóteses, talvez inseguras porém explícitas), e que eles virão a ser parte integrante do ambiente de trabalho usual dos matemáticos.

Entretanto, devemos reconhecer que as provas humanamente compreensíveis e verificáveis que realmente fazemos constituem o mais importante para nós, e que elas são muito diferentes das provas formais. No presente, as provas formais estão fora de alcance e são em sua maioria irrelevantes: temos um bom processo humano para verificar a validade matemática.

5. O que motiva as pessoas a fazer matemática?

Existe uma verdadeira alegria em fazer matemática, em aprender maneiras de pensar que explicam, organizam e simplificam. Pode-se sentir esta alegria descobrindo novos resultados em matemática, redescobrindo resultados antigos, aprendendo um modo de pensar com alguém ou em um texto, ou encontrando uma nova maneira de explicar ou de olhar para uma estrutura matemática conhecida.

Esta motivação interna pode nos levar a pensar que fazemos matemática por si mesma. Isto não é verdade: o contexto social é extremamente importante. Somos inspirados por outras pessoas, buscamos a apreciação dos outros e gostamos de ajudar outras pessoas a resolver seus problemas matemáticos. O que nos dá prazer muda por influência de outras pessoas. A interação social ocorre durante encontros pessoais. Também ocorre através de correspondência escrita e eletrônica, de pre-publicações e de artigos de periódicos. Um efeito deste sistema altamente social da matemática é a tendência dos matemáticos de seguirem modas. Para o objetivo de produzir novos teoremas isto não é provavelmente muito eficiente: seria melhor ter matemáticos cobrindo as diversas áreas de um modo mais equilibrado. Mas a maior parte dos matemáticos não gosta de estar só, e eles têm dificuldades em se entusiasmar com um assunto, mesmo quando estão progredindo, a não ser que tenham colegas com quem partilhar esse entusiasmo.

Além de nossa motivações internas e sociais para fazer matemática, somos influenciados por considerações econômicas e de status. Matemáticos, como outros acadêmicos, julgam e são julgados com grande freqüência. Começando com classificações, e continuando por cartas de referências, decisões de contratação, decisões de promoção, relatórios de "referees", convites para proferir conferências, prêmios, ... estamos envolvidos em muitas avaliações, num sistema extremamente competitivo.

Jaffe e Quinn analisam a motivação para fazer matemática em termos de uma moeda corrente em que muitos matemáticos acreditam: o crédito por teorema.

Penso que nossa forte ênfase coletiva no crédito por teorema tem um efeito negativo para o progresso da matemática. Se o que estamos realizando é o avanço da compreensão humana da matemática, então seria melhor reconhecer e valorizar um espectro muito mais amplo de atividades. Os que descobrem o caminho de provar teoremas o fazem no contexto da comunidade matemática; e não por si mesmos. Dependem da compreensão da matemática que obtêm de outros matemáticos. Uma vez provado um teorema, a comunidade matemática depende da rede social para divulgar as idéias para as pessoas que possam usá-las posteriormente — a via impressa é muito obscura e incômoda.

Mesmo do ponto de vista estreito de que o que produzimos são teoremas, a equipe é importante. O futebol pode servir como metáfora. Pode ser que aconteçam apenas um ou dois gols durante uma partida, marcados por um ou dois jogadores. Isso não significa que os esforços dos outros atletas foram em vão. Não julgamos os jogadores de um time de futebol por fazerem pessoalmente gols; julgamos o time por sua atuação como time.

Em matemática, acontece freqüentemente que um grupo de matemáticos progrida com um certo conjunto de idéias. Existem teoremas no caminho deste progresso que serão quase inevitavelmente provados por uma ou outra pessoa. Algumas vezes o grupo pode até prever quais serão estes teoremas. É muito difícil predizer quem efetivamente provará um tal teorema, embora existam usualmente alguns "atacantes" que têm mais chances de fazê-lo. Entretanto, eles estão em condições de provar tais teoremas por causa do esforço coletivo da equipe. A equipe tem uma função adicional, a de absorver e fazer uso dos teoremas uma vez provados. Mesmo se uma pessoa pudesse provar todos os teoremas sozinha, eles estariam perdidos se ninguém mais os aprendesse.

Existe um fenômeno interessante relativo aos "atacantes". Acontece com regularidade que algum membro de um grupo prova um teorema que recebe grande reconhecimento como sendo significativo. Seu status na comunidade — sua posição hierárquica — cresce imediata e enormemente. Quando isso acontece, ele se torna muito mais produtivo como irradiador de idéias e fonte de teoremas. Porque? Primeiro há um grande aumento da auto-estima e conseqüentemente de produtividade. Segundo, quando o status cresce, as pessoas ficam mais no centro da rede de idéias — os outros as levam mais a sério. Finalmente e talvez o mais importante, um grande avanço na matemática comumente representa uma nova maneira de pensar, e maneiras efetivas de pensar podem usualmente ser aplicadas em mais de uma situação.

Este fenômeno me convenceu de que toda a comunidade matemática se tornaria muito mais produtiva se abríssemos nossos olhos para os valores reais do que temos feito. Jaffe e Quinn propõem um sistema de papéis específicos dividido em "especulação" e "prova". Uma tal divisão apenas perpetua o mito de que nosso progresso é medido em unidades padrão de teoremas demonstrados. Isso é um pouco parecido com a falácia da pessoa que consegue imprimir a lista dos 10.000 primeiros números primos. O que estamos produzindo é compreensão humana. Temos muitas maneiras de compreender e muitos processos diferentes que contribuem para nossa compreensão. Ficaríamos mais satisfeitos, mais produtivos e felizes se reconhecêssemos e concentrássemo-nos nisso.

6. Algumas experiências pessoais

Como este ensaio nasceu da reflexão sobre divergências entre minhas experiências e a descrição delas por Jaffe e Quinn, vou discutir duas experiências pessoais, incluindo uma mencionada por eles.

Sinto um certo desconforto nisso, porque arrependo-me de certos aspectos de minha carreira: se pudesse fazer as coisas novamente com os benefícios do conhecimento que tenho hoje sobre mim mesmo e sobre os processo da matemática, há muito que eu faria de outra maneira. Espero que descrevendo estas experiências tão abertamente quanto as lembro e compreendo, eu possa ajudar os outros a entender melhor o processo e a aprender de antemão.

Primeiro vou discutir brevemente a teoria das folheações, que foi meu primeiro assunto de interesse, quando eu era aluno de pós-graduação. (Não importa aqui se você sabe ou não o que são folheações).

Nessa ocasião, folheações tinham se tornado um grande centro de atenção para topólogos geométricos, pessoal de sistemas dinâmicos e geômetras diferenciais. Provei bem rapidamente alguns teoremas espetaculares. Provei um teorema de classificação para folheações, dando uma condição necessária e suficiente para que uma variedade admita uma folheação. Provei vários outros teoremas significativos. Escrevi artigos de peso e publiquei pelo menos os teoremas mais importantes. Era difícil encontrar tempo para escrever num ritmo compatível com o que conseguia provar, e fiquei com muito por publicar.

Aconteceu então um fenômeno interessante. Dentro de dois anos, teve início um dramático abandono da área. Ouvi alguns matemáticos dizerem que estavam orientando ou sendo orientados a não entrar na área de folheações — diziam que Thurston estava esgotando o assunto. Foi-me dito (não como uma reclamação mas como uma congratulação) que eu estava matando a área. Alunos de pós-graduação pararam de estudar folheações, e em pouco tempo eu também mudei para outros interesses.

Não penso que o abandono ocorreu porque o terreno estava intelectualmente esgotado — existiam (e ainda existem) muitos problemas que permanecem e que são provavelmente atacáveis. Desde aqueles anos, têm sido feitos avanços interessantes pelas poucas pessoas que permaneceram na área ou que nela entraram, e tem havido também importantes avanços em áreas próximas, que penso que teriam sido muito mais acelerados se os matemáticos tivessem continuado a trabalhar intensamente na teoria de folheações.

Hoje, penso que existem poucos matemáticos que compreendem algo próximo ao estado da arte em folheações se comparado àquela ocasião, embora existam algumas partes da teoria das folheações, incluindo desenvolvimentos desde aquele tempo, que ainda evoluem.

Creio que dois fatores ambientais foram muito mais importantes no desaquecimento do assunto do que uma eventual exaustão de recursos intelectuais.

Primeiro, os resultados que provei (bem como alguns resultados importantes de outras pessoas) foram documentados no estilo pesadamente convencional dos matemáticos. Dependeram fortemente de leitores que compartilhassem certa formação e certas intuições. A teoria das folheações era uma área jovem e oportunista, e seus pré-requisitos não estavam padronizados. Não hesitei em usar toda a matemática que aprendi com os outros. Nos artigos que escrevi não gastei muito tempo (e nem poderia) explicando os pré-requisitos culturais. Estes documentam raciocínios e conclusões em um nível a que cheguei, em geral, após muita reflexão e esforço. Também usei de pérolas enigmáticas de intuição, tais como "o invariante de Godbillon-Vey mede o balanço helicoidal de uma folheação", que permaneceram misteriosas para a maioria dos matemáticos que as leram. Isso criou uma forte barreira: penso que muitos estudantes de pós-graduação e matemáticos ficaram desencorajados porque era muito difícil aprender e compreender as provas dos teoremas mais importantes.

Em segundo lugar vem a questão do que está em jogo para as outras pessoas da área. Quando comecei a trabalhar em folheações, eu tinha a concepção de que o que as pessoas queriam era saber as respostas. Pensava que o que procuravam era uma coleção de teoremas poderosos e bem estabelecidos que pudessem ser aplicados para resolver outros problemas matemáticos. Mas isso é apenas uma parte da história. Mais do que conhecimento, as pessoas querem ter sua própria compreensão. E em nosso sistema movido a créditos, também querem e necessitam de *créditos por teorema.*

Passarei alguns anos à frente, para o assunto mencionado por Jaffe e Quinn, quando comecei a estudar variedades tridimensionais e sua relação com geometria hiperbólica. (Novamente, não importa se você sabe ou não o que isso significa.) Gradualmente acumulei ao longo de alguns anos uma certa intuição sobre variedades hiperbólicas tridimensionais, com um repertório de construções, exemplos e provas. (Este processo começou quando eu era aluno de graduação, e foi reforçado pelas suas aplicações à teoria das folheações.) Um pouco depois, conjecturei ou especulei que as variedades tridimensionais possuem uma certa estrutura geométrica; esta conjectura veio a ser conhecida como conjectura da geometrização. Dois ou três anos depois provei o teorema de geometrização para as variedades de Haken. Foi um teorema difícil, e dediquei um enorme esforço pensando sobre ele. Depois de completada a prova, dediquei esforço muito maior à sua verificação, procurando as dificuldades e testando-a à luz de informações independentes.

Gostaria de explicitar melhor o que quero dizer quando falo que provei este teorema. Significa que tive um fluxo de idéias claro e completo, incluindo detalhes, que resistiu a um grande exame crítico feito por mim e por outros. Os matemáticos têm muitos estilos diferentes de raciocínio. O meu não é o de fazer amplas afirmações gerais mas descuidadas, que são meramente sugestões ou inspirações: faço modelos mentais claros e penso de maneira bem completa. Minhas provas têm se mostrado bastante confiáveis. Não tenho tido dificuldades para demonstrar afirmações ou para detalhar coisas que provei. Sou eficiente para descobrir falhas em raciocínios, tanto meus como de outros.

Entretanto, existe algumas vezes um fator de expansão enorme na decodificação de meu próprio pensamento em alguma coisa que possa ser acessível a outros. Minha educação matemática foi bastante independente e personalista, tendo eu por alguns anos aprendido por mim mesmo, desenvolvendo modelos mentais próprios de como pensar sobre matemática. Isso muitas vezes me proporcionou uma grande vantagem ao pensar sobre matemática, porque é fácil pegar depois modelos mentais padrão compartilhados por grupos de matemáticos. Isso significa que alguns conceitos que uso livre e naturalmente em meu modo pessoal de raciocinar são desconhecidos para a maioria dos matemáticos com quem interajo. Meus modelos e estruturas pessoais de raciocínio são semelhantes em espírito aos compartilhados por grupos de matemáticos — mas com freqüência são diferentes. Quando da formulação da conjectura da geometrização, minha compreensão da geometria hiperbólica era um bom exemplo. Um outro exemplo é o da compreensão dos espaços topológicos finitos, um tópico exótico que pode dar uma boa ajuda na percepção de uma variedade de problemas, mas que geralmente não vale a pena desenvolver em casos particulares porque existem paráfrases típicas que o evitam.

Nem a conjectura da geometrização nem sua prova para as variedades de Haken estavam no caminho de qualquer grupo de matemáticos na época — isso veio contra as tendências da topologia dos 30 anos precedentes, e pegou as pessoas de surpresa. Para a maioria dos topólogos da época, a geometria hiperbólica era um ramo marginal da matemática, se bem que existissem outros grupos de matemáticos como os geômetras diferenciais que a compreendiam de certos pontos de vista. Levou algum tempo para que os topólogos compreendessem o significado da conjectura da geometrização, para que ela servia, e porque era relevante.

Ao mesmo tempo, comecei a escrever notas sobre geometria e topologia de variedades tridimensionais, paralelamente a um curso de pós-graduação que estava lecionando. Distribui as notas a umas poucas pessoas, e em pouco tempo várias pessoas de todo o mundo escreviam solicitando cópias. A lista de solicitantes pelo correio cresceu para algo da ordem de 1200 pessoas, para as quais eu enviava notas a cada dois meses. Tentei comunicar o que de fato pensava nestas notas. Foram realizados muitos seminários baseados em minhas notas e obtive um grande retorno. Na maioria das vezes recebi observações como "Suas notas são realmente inspiradoras e belas, mas devo dizer-lhe que gastei 3 semanas de nosso seminário preenchendo os detalhes do parágrafo *nn*. Mais explicações certamente ajudariam."

Fiz também muitas exposições para grupos de matemáticos sobre as idéias do estudo das variedades tridimensionais do ponto de vista da geometria, e sobre a prova da conjectura da geometrização para as variedades de Haken. No início o assunto era desconhecido para quase todo mundo. Foi difícil de transmitir — a infra-estrutura estava em minha cabeça, não na comunidade matemática. Existiam várias teorias matemáticas em que se baseava o conjunto de idéias: topologia das variedades tridimensionais, grupos Kleinianos, sistemas dinâmicos, topologia geométrica, subgrupos discretos de grupos de Lie, folheações, espaços de Teichmüller, difeomorfismos pseudo-Anosov, teoria geométrica de grupos, bem como geometria hiperbólica.

Realizamos um workshop de verão da AMS em Bowdoin em 1980, onde muitos matemáticos das áreas de topologia em dimensões baixas, sistemas dinâmicos e grupos Kleinianos estiveram presentes.

Foi uma experiência interessante de intercâmbio cultural. Ficou extremamente claro o quanto as provas dependem da audiência. Provamos as coisas num contexto social e dirigimo-las a uma certa audiência. Partes desta prova eu transmitia em dois minutos aos topólogos, mas os analistas necessitavam de uma conferência de uma hora para começarem a compreendê-las. Da mesma forma, existiam coisas que eu podia dizer em dois minutos aos analistas que tomavam uma hora antes que os topólogos começassem a entender. E existiam muitas outras partes da prova que em princípio levariam dois minutos, mas que ninguém da platéia possuía a infra-estrutura mental para entender em menos de uma hora.

Naquela ocasião, não existia praticamente nem infra-estrutura nem contexto para este teorema, de modo que a expansão de uma idéia que estava organizada em minha cabeça para o que tive de dizer para comunicá-la, sem mencionar a quantidade de energia que a platéia teve que usar para compreendê-la, foi enorme.

Tendo em vista a minha experiência com folheações e em resposta às pressões sociais, concentrei a maior parte da minha atenção ao desenvolvimento e à apresentação da infra-estrutura do que escrevi e falei. Expliquei os detalhes para algumas poucas pessoas que estavam "prontas" para entendê-los. Escrevi alguns artigos dando partes substantivas da prova do teorema de geometrização para variedades de Haken — destes artigos, não obtive quase nenhum retorno. Da mesma forma, poucas pessoas realmente trabalharam nas seções mais difíceis e profundas de minhas notas por muito tempo.

O resultado é que agora um bom número de matemáticos tem o que estava faltando no começo: uma compreensão operacional dos conceitos e da infra-estrutura que são naturais para este assunto. Tem havido e continua havendo uma grande quantidade de atividades matemáticas produtivas. Concentrando-me na construção da infra-estrutura e explicando e publicando definições e modos de pensar, mas sendo lento em enunciar ou publicar provas de todos os "teoremas" que eu sabia como provar, deixei espaço para que muitos outros recebessem crédito. Tem havido espaço para as pessoas descobrirem e publicarem outras provas do teorema de geometrização. Estas provas ajudaram o desenvolvimento de conceitos matemáticos que são muito interessantes por si só, e levaram a novos avanços da matemática.

O que os matemáticos mais queriam e necessitavam de mim era aprender minhas maneiras de raciocinar, e não aprender minha prova da conjectura da geometrização para as variedades de Haken. É improvável que esta se generalize para a prova da conjectura da geometrização no caso geral.

Uma outra questão é que as pessoas as vezes necessitam e querem um resultado válido e aceito não para aprendê-lo, mas para que possam usá-lo e mencioná-lo.

Os matemáticos foram de fato muito rápidos em aceitar minha prova, e começaram a citá-la e a usá-la baseados na documentação então existente, em sua experiência e confiança em mim, e na aprovação por especialistas aos quais dediquei grande tempo transmitindo a prova. O teorema agora está documentado, através de fontes publicadas por mim e por outros, de modo que as pessoas se sentem seguras para citá-lo; as pessoas da área certamente não me questionaram sobre sua validade, nem manifestaram a necessidade de mais detalhes que os disponíveis.

Nem todas as provas têm o mesmo papel no suporte lógico que estamos construindo para a matemática. É possível que esta prova, em particular, tenha valor lógico apenas temporário, apesar de ter grande valor de motivação apoiando uma certa visão das variedades tridimensionais. A conjectura ampla da geometrização é ainda uma conjectura. Tem sido provada em muitos casos, e é igualmente fortalecida por muitas evidências computacionais, mas não foi provada em sua generalidade. Estou convencido de que a prova geral será descoberta; espero que em poucos anos. Quando isso ocorrer, as provas dos casos especiais provavelmente ficarão obsoletas.

Por enquanto, para se usar a tecnologia geométrica é melhor começar com a hipótese "Seja M^3 uma variedade que admite uma decomposição geométrica." de vez que isso é mais geral que "Seja M^3 uma variedade de Haken." Pessoas que não querem usar a tecnologia ou que suspeitam dela podem evitá-la. Mesmo quando um teorema sobre variedades de Haken pode ser provado usando técnicas geométricas, é importante descobrir técnicas puramente topológicas que o provem.

Nesse episódio (que ainda continua) acho que consegui evitar as duas piores conseqüências possíveis: ou não divulgar que descobri o que descobri e provei o que provei, retendo-o para mim mesmo (talvez com a esperança de provar a conjectura de Poincaré), ou apresentar uma teoria inatacável e de difícil aprendizado, sem adeptos para mantê-la viva e fazê-la crescer.

Posso facilmente apontar arrependimentos sobre minha carreira. Não publiquei tanto quanto deveria. Existem alguns projetos matemáticos além do teorema de geometrização para variedades de Haken que não divulguei bem ou simplesmente não mencionei ao público matemático. Quando me concentrei mais no desenvolvimento da infra-estrutura que nos teoremas de alto nível da teoria geométrica das variedades tridimensionais, fiquei um pouco desengajado enquanto o assunto continuava a evoluir; e não promovi ativa ou efetivamente a área ou as carreiras de excelentes pessoas da área. (Mas algum grau de desengajamento parece-me um subproduto quase inevitável da orientação de alunos de pós-graduação e outros: para de fato passar adiante autênticas linhas de pesquisa, é necessário abandoná-las e parar de pensar intensamente sobre elas.)

Por outro lado tenho estado ocupado e produtivo em várias atividades diferentes. Nosso sistema não cria tempo extra para gente como eu escrever e pesquisar; ao contrário, inunda-nos com solicitações e oportunidades de trabalho extra, e minha reação visceral tem sido dizer "sim" para várias delas. Dediquei muito esforço a atividades não produtoras de créditos que valorizo tanto quanto provar teoremas: política matemática, revisão de minhas notas para um livro com elevado padrão de comunicação, exploração da computação em matemática, educação matemática, desenvolvimento de novas formas de comunicação da matemática através do Centro de Geometria (tal como nosso primeiro experimento, o vídeo "Not Knot"), direção do MSRI, etc.

Penso que o que fiz não maximizou meus "créditos". Estou numa posição em que não sinto necessidade de competir por mais créditos. De fato, comecei a sentir outros grandes desafios além de provar teoremas.

Penso que minhas ações foram boas para estimular a matemática.