ARTIGOS
Matemática Universitária Nº 17, dezembro de 1994, 22-28

O leão e o homem: perseguição e fuga com posição e velocidade limitadas

Miriam Abdón, Carlos Gustavo T. de A. Moreira, Nicolau Corção Saldanha

Depois que Von Neumann e Morgenstern criaram a teoria dos jogos e a utilizaram para estudar certos jogos discretos, vieram tentativas de aplicar esta teoria a situações contínuas. Havia um interesse especialmente grande por problemas com aplicações militares, como a perseguição de um avião ou navio por um míssil. Qual estratégia deveria ser seguida pelo perseguidor? Seria possível ao fugitivo evitar o choque? Por quanto tempo? Destas perguntas surgiu a teoria dos *jogos diferenciais* que já conta com uma imensa literatura; alguns textos gerais sobre o assunto são [Fr], [I] e [KS].

Consideraremos neste artigo um problema particularmente simples de perseguição e fuga: o problema do leão e do homem. Este problema é bem conhecido (veja [L] ou [F1] para a versão contínua) e foi usado na prova por equipes da 9ª Olimpíada Iberoamericana de Matemática. Dois jogadores A (o leão) e B (o homem) movem-se em uma arena limitada e a única restrição sobre suas trajetórias é que as velocidades são limitadas; A persegue e tenta alcançar B (o leão quer comer) e B tenta fugir de A (o homem não quer ser comido). Consideramos duas versões do problema: na primeira discretizamos o tempo de forma que os jogadores saltam alternadamente; na segunda, o tempo é contínuo. Nosso objetivo é em cada caso saber se existe uma estratégia para A (ou B) que garanta sua vitória.

Este problema é mais simples que a maioria daqueles tratados na literatura de jogos diferenciais pois não impomos restrições à aceleração ou curvatura das trajetórias; também não tentamos estimar o tempo até o choque. Apesar de simples, este problema *não é* discutido em muitos livros de jogos diferenciais por não se adequar bem a parte da teoria geral. Todos os argumentos são elementares e o leitor só precisa saber geometria plana e os rudimentos do cálculo para seguir as demonstrações.

I. Caso discreto

O leão A persegue sua vítima humana B em uma arena convexa limitada S. As posições iniciais de A e B são p_A e p_B; A e B pulam alternadamente distâncias de no máximo l_A e l_B. O leão A consegue golpear e assim vencer B se e somente se conseguir chegar a uma distância menor ou igual a d de B (no caso $d = 0$, entendemos que A vence apenas se conseguir saltar exatamente sobre B).

a. Caso $l_A = l_B$, $d > 0$

Neste caso, A tem uma estratégia para alcançar B. De fato, uma tal estratégia consiste em dar passos de tamanho $\min\{l_A, d(p_A, p_B)\}$ na direção de B. Suponha sem perda de generalidade que $l_A = 1$. Com esta estratégia, a distância entre A e B nunca aumenta e, se a distância logo antes do salto de A é menor ou igual a $1 + d$ então A ganha o jogo imediatamente. Na verdade, a distância só se mantém inalterada enquanto B anda com passos de tamanho l_B ao longo da linha reta p_Ap_B. Como a arena é limitada, B deverá em algum momento freiar ou desviar-se desta direção, o que implica em uma redução da distância. Queremos verificar que a distância em algum momento será menor que d.

Para isso, note primeiramente que, se o passo de B desvia de um ângulo θ da direção p_Ap_B, $|p_A - p_B| = h > d$, no próximo lance de A a distância diminuirá de pelo menos $h + 1 - \sqrt{1 + h^2 + 2h\cos\theta}$, como pode-se ver pela Figura A. Por outro lado,

$$h + 1 - \sqrt{1 + h^2 + 2h\cos\theta} \geq d + 1 - \sqrt{1 + d^2 + 2d\cos\theta}$$

pois esta expressão é monótona em h, como pode ser verificado estudando o sinal de sua derivada.

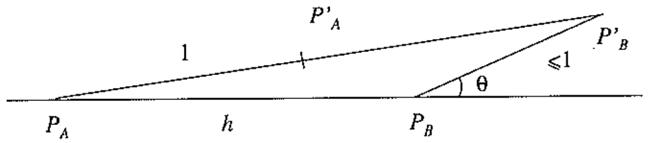

Figura A

Seja D o diâmetro da arena; B pode dar no máximo $\lfloor 4D \rfloor$ (= parte inteira de $4D$) passos de comprimento maior ou igual a $1/2$ com desvio menor ou igual a $\pi/\lfloor 12D \rfloor$: caso contrário, B sairia da arena. De fato, se B desse mais de $\lfloor 4D \rfloor$ passos com desvios tão pequenos, o ângulo entre qualquer passo e a reta ligando as posições iniciais de A e B seria sempre menor ou igual a $\pi/3$ e, considerando as projeções dos passos nesta reta, vemos que a distância entre as posições inicial e final de B seria maior que o diâmetro da arena.

Assim, a cada $\lfloor 4D+1 \rfloor$ passos, ou existe um passo de B de comprimento menor que $1/2$, caso em que a distância diminui de pelo menos $1/2$, ou existe um passo com desvio maior que $\pi/\lfloor 12D \rfloor$, caso em que a distância diminui de pelo menos $d+1-\sqrt{1+d^2-2d\cos(\pi/\lfloor 12D \rfloor)}$. Portanto, A terminará por vencer.

b. Caso $l_A = l_B$, $d = 0$

Se A seguir a estratégia do item anterior, provavelmente nunca alcançará B. Por exemplo, consideremos a situação onde a arena contém um disco suficientemente grande e B adota a estratégia de mover-se no bordo deste disco afastando-se o máximo possível de A. Excluindo-se algumas posições iniciais onde A pega B quase imediatamente, A nunca pega B: tente construir uma seqüência de posições de A e B de trás para frente e ficará claro porquê.

Entretanto, A ainda tem uma estratégia vencedora. Suponha novamente $l_A = 1$ e seja D o diâmetro da arena. O jogador A pode seguir a estratégia do item anterior até tornar sua distância a B menor que $1/(4D)$. Seja O um ponto que permanecerá fixo durante o resto do processo e que coincide com a posição de A neste momento; a partir de agora a estratégia de A será sempre saltar para um ponto do segmento OB tão próximo de B quanto possível. É fácil ver que esta estratégia está bem definida, isto é, que é sempre possível a A manter-se neste segmento. Mais: esta estratégia garante que a distância entre A e B nunca aumenta. De fato, sejam p_A e p_B as posições em um dado momento; supomos que B então salta para p'_B e A para p'_A. Sejam p''_A e p''_B as projeções ortogonais de p_A e p_B na reta que passa por O, p'_A e p'_B (veja a Figura B). Claramente, $d(p''_A , p''_B) < d(p_A , p_B)$, e portanto $d(p'_A , p''_A) > d(p'_B , p''_B)$, donde $d(p'_A , p'_B) < d(p_A , p_B)$, como afirmamos. Falta apenas provar que esta distância torna-se igual a zero após um número finito de jogadas.

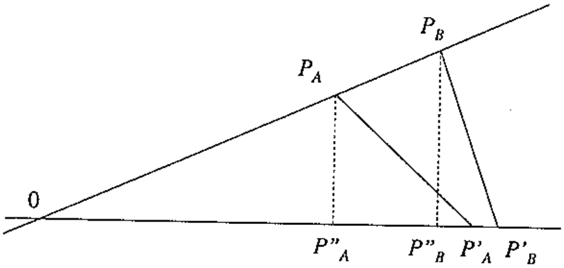

Figura B

Dadas as posições p_A e p_B de A e B em um dado momento, seja p'_B um ponto que dista no máximo 1 de p_B e mais de 1 de p_A, de tal forma que B pode mover-se para p'_B sem ser imediatamente capturado. Como $d(p'_B, p_A) > d(p'_B, p_B)$, o ângulo $\widehat{Op_A p'_B}$ é obtuso. Seja $k = d(O, p_B)$. Pela lei dos cossenos, $d(O,p'_B) > \sqrt{d(O,p_A)^2 + d(p_A, p'_B)^2} > \sqrt{(k - 1/(4D))^2 + 1} > k + 1/(4D)$ (lembre que $k < D$). Assim, B deve, a cada jogada, afastar-se de O de pelo menos $1/(4D)$ sob pena de perder imediatamente. Como a arena é limitada, isto conclui a demonstração.

c. Caso $l_A < l_B$, $d > 0$

Neste caso, se a arena for suficientemente grande, a posição inicial distante dos bordos e a distância inicial entre A e B não permitir vitória imediata de A, B tem uma estratégia para manter A à distância. Um exemplo de estratégia para B é o seguinte: B se manterá sobre um grande círculo fixo contido na arena e a cada jogada ele salta, sempre sobre este círculo, de tal forma a aumentar tanto quanto possível sua distância a A. O jogador A estará sempre ou longe do círculo por sua distância a O ser pequena ou terá seu argumento muito diferente do de B já que, como a velocidade angular de A ao tentar aproximar-se do círculo é substancialmente menor que a de B, B tem tempo suficiente para afastar-se bastante.

Vamos ilustrar isto com um exemplo. Suponha que S seja um disco de raio $100km$, $l_A = 1m$, $l_B = 1{,}05m$ e $d = 10m$. Suponha ainda que B está no bordo deste disco e segue a estratégia acima. Na faixa em que a distância de A ao bordo é menor que $3km$, a velocidade angular de B é maior que a de A: a cada passo, a distância entre B e a projeção radial de A no círculo aumentará de mais de $1cm$. Assim, se A tentar reduzir sua distância ao círculo para menos de $1km$, será necessário dar pelo menos 2000 passos nesta faixa e a distância entre B e a projeção de A passará a ser de mais de $20m$, demonstrando que neste caso B foge facilmente de A.

II. Caso contínuo

No caso discreto os jogadores se movem aos saltos; queremos agora imaginar que os jogadores, ao invés de saltarem alternadamente, movem-se continuamente. Da mesma forma que no caso discreto limitamos o tamanho dos saltos, no caso contínuo limitamos a velocidade dos jogadores. Mais precisamente, a trajetória de A (resp., B) deve ser derivável por partes (em relação ao tempo) e seu vetor velocidade deve sempre ter módulo menor ou igual a υ_A (resp., υ_B).

No mundo real, um jogador não tem informação instantânea sobre a posição e seu adversário: é preciso esperar o tempo necessário para a luz ir de um ao outro. Motivados por essa observação, vamos introduzir um ingrediente extra no problema: o *tempo de reação*. Suponhamos assim que cada um dos jogadores tem informação sobre a posição do adversário até um tempo $f(d)$ anterior, onde d é a distância entre o jogador e a imagem do adversário. A imagem do adversário é definida como a sua posição no mesmo tempo $f(d)$ anterior. Observe que d e a imagem do adversário estão implicitamente definidas por estas condições desde que f seja crescente e derivável com $f(0) = 0$ e $f'(d) \leq 1/(\upsilon_A + \upsilon_B)$ para todo d, hipóteses que sempre assumiremos.

a. Caso $\upsilon_B > \upsilon_A$

Neste caso, B consegue manter-se longe de A para toda f. A estratégia é análoga ao caso discreto: B deve manter-se num círculo de raio grande e mover-se com velocidade máxima na direção que o afasta da imagem de A. A demonstração de que esta estratégia funciona é como no caso discreto. Os detalhes são deixados a cargo do leitor.

b. Caso $\upsilon_B = \upsilon_a$, $d > 0$

Uma estratégia análoga à do caso discreto funciona para o jogador A qualquer que seja f. Basta A andar por um tempo $d/2\upsilon_A$ na direção da imagem de B e a distância, como no caso discreto, diminuirá, tornando-se eventualmente menor que qualquer número positivo dado. Novamente, deixamos os detalhes como exercício.

c. Caso $\upsilon_B = \upsilon_A$, $d = 0$

Aqui, tudo depende de f. Se $f(d)$ é da forma λd, B tem dificuldade em saber como fugir e (exceto se sempre adivinhar bem) termina por ser alcançado por A. Entretanto, se $f(d)/d$ tender a zero quando d tende a zero, A nunca alcançará B.

Neste último caso, passamos a descrever uma boa estratégia para B. É conveniente trabalhar em coordenadas polares. O jogados B escolhe uma espiral tendendo para um círculo com concavidade sempre para dentro: por exemplo, a parametrizada por $r = r_0(1 - 1/(\theta + 2))$, $\theta \in [0, +\infty)$. Feito isso, B anda com velocidade máxima nessa espiral sempre que a imagem A' de A estiver a uma distância menor que, digamos, $r_0/2$ e que seu ângulo satisfizer $\theta_{A'} < \theta_B + f(d)$. Se $\theta_{A'}$ chegar a ser $\theta_B + f(d)$, B passa a percorrer a mesma espiral refletida em relação ao raio que liga a posição nesse instante a O.

Suponhamos por absurdo que existe uma estratégia para A que permita alcançar B. Suponha ainda que tenha ocorrido uma inversão no sentido em que B corre a espiral. Isto significa que pouco antes da inversão o ângulo $\theta_{A'}$ da imagem A' de A satisfazia $\theta_{A'} < \theta_B + f(d)$ e no momento da inversão valia a igualdade $\theta_{A'} = \theta_B + f(d)$. Como, entretanto, neste momento B inverteu o sentido de percurso, passamos a ter uma situação equivalente a $\theta_{A'} = \theta_B - f(d)$. O jogador A poderia facilmente, entretanto, reduzindo seu próprio argumento, ter chegado a uma tal posição sem fazer com que B invertesse o sentido de percurso. Assim, para cada estratégia vitoriosa para A existe uma outra estratégia, também vitoriosa, para a qual B nunca inverte o sentido de percurso da espiral. Podemos portanto supor, sem perda de generalidade, que tais inversões não ocorrem e que sempre vale $\theta_{A'} < \theta_B + f(d)$.

Ainda supondo que A alcance B, seja p_0 o ponto onde A e B se encontram em um tempo t_0. Passando por p_0, tomemos uma reta r qualquer contida no ângulo menor formado entre o raio e a perpendicular à espiral, como na Figura C. Consideremos ainda um feixe de retas paralelas a r; as curvas de nível de uma coordenada auxiliar w definida como uma função afim das coordenadas usuais. Podemos ainda supor que w é crescente no tempo para as coordenadas de B pouco antes do choque.

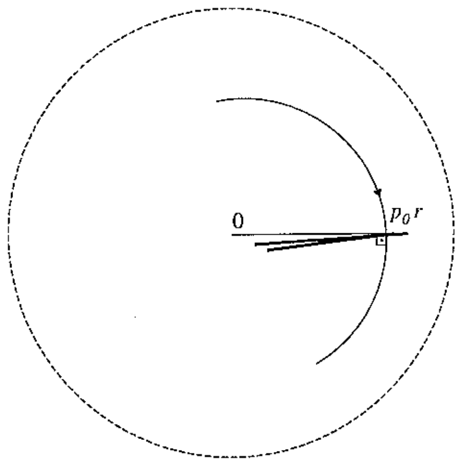

Figura C

Sejam $w_A(t)$ e $w_B(t)$ as coordenadas w de A e B em um tempo t: para t próximo de t_0, devemos ter $w_A(t) < w_B(t)$, pois do contrário teríamos $\theta_{A'} > \theta_B + f(d)$, o que contradiz nossas hipóteses. Consideremos então as trajetórias de A e B a partir de um instante qualquer $t_1 < t_0$ já na faixa que garante a desigualdade acima, como mostrado na Figura D. Translademos a trajetória de B paralelamente a r e consideremos a última interseção da trajetória de A com esta trajetória transladada. Este ponto de interseção corresponde a tempos $t_A > t_B$ para A e B, respectivamente: a desigualdade vem de $w_A(t_A) = w_B(t_B)$. Refletindo a trajetória transladada e a trajetória de A em r (como na Figura E), vemos que a trajetória de A entre t_A e t_0 é mais longa que a trajetória de B entre t_B e t_0, pois a trajetória de A duplicada é um arco por fora do arco convexo dado pela trajetória de B duplicada. Isto é um absurdo, e demonstra que, conforme afirmamos, esta estratégia de B garante sua vitória.

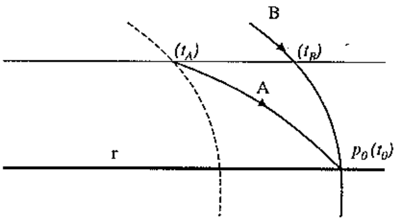

Figura D

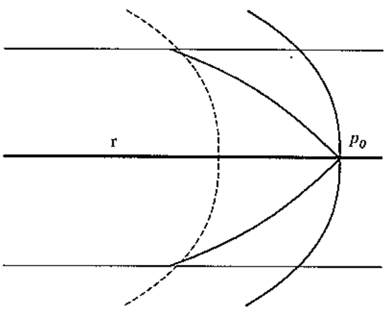

Figura E

No caso $f(d) = \lambda d$, o argumento acima não se aplica pois é impossível construir um feixe de retas com todas as propriedades necessárias. De fato, se B seguir a estratégia acima e A perseguir B sempre perto do limite em que B muda de sentido, A alcança B. Além disso, pode-se provar que, para qualquer estratégia de B (baseada apenas na informação a que B tem acesso) existe uma estratégia de A para a qual A alcança B. Por outro lado, pelo que vimos acima, não existe uma estratégia para A com a qual ele alcance B qualquer que seja a estratégia adotada por B.

Referências

[F] J. Flynn, *Pursuit in the circle: lion versus man,* Differential games and control theory, ed. por E. O. Roxin, P. Liu e R. L. Sternberg, Lecture notes in pure and applied mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York, 1974.

[Fr] A. Friedman, *Differential games,* Wiley-Interscience, New York, 1971.

[I] R. Isaacs, *Differential games,* the SIAM series in Applied Math., John Wiley, New York, 1965.

[L] J. E. Littlewood, *A mathematician's miscellany,* Methuen, London, 1953 (pp. 135-136).

[KS] N. Krassovski e A. Soubbotine, *Jeux differentiels,* Editions Mir, Moscou, 1977.

Miriam Abdón; e-mail: miriam@impa.br
Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira; e-mail: gugu@impa.br
Nicolau Corção Saldanha; e-mail: nicolau@impa.br

IMPA, Estr. d. Castorina, 110
Jardim Botânico
Rio de Janeiro, RJ 22460-320, BRASIL