Matemática Universitária Nº 17, dezembro de 1994, 40-51

Fórmula de Stirling em tempos de Maple

J.R. Drugowich de Felicio

RESUMO A fórmula de Stirling para o fatorial de um número inteiro não negativo é obtida através de um caminho simples, envolvendo apenas conhecimento elementar de matemática. O leitor é conduzido de forma natural ao número de Euler ($e = 2.7182818..$) e o número π surge da análise de um produtório que investigamos com o software *Maple*. Finalmente, utilizando um resultado bem conhecido da análise combinatória e a aproximação de Stirling obtem-se a fórmula de Wallis para o irracional π.

1. Introdução

O fatorial de um natural n, definido como o produto de n por todos os inteiros positivos menores do que êle, aparece na maioria dos cálculos estatísticos. O fato de crescer de uma forma incrivelmente rápida com o número n (20!, por exemplo, é igual a 2432902008176640000) exigiu dos matemáticos um esforço no sentido de exibí-lo em forma analítica, ainda que aproximada. Foi assim que surgiu, há cerca de 250 anos, a fórmula de Stirling [1].

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n, \tag{1}$$

que reproduz o fatorial com êrro inferior a 1%, pelo menos para valores de n superiores a 10. Mesmo os mais experientes não escondem uma certa surpresa ao perceberem que um produto de inteiros está relacionado de forma tão categórica a duas constantes fundamentais da matemática: o número de Euler e — base dos logaritmos naturais — e o π — a célebre razão entre o perímetro da circunferência e o seu diâmetro.

A Tabela I mostra os resultados que se obtêm com a fórmula de Stirling. Eles só não são suficientemente bons para pequenos valores de n, mas nesse caso é tão fácil calcular o fatorial que nem precisaríamos usar qualquer tipo de aproximação.

n	n!	Fórmula de Stirling (eq. 1)	Erro (%)
1	1	0,922137009	7,7863
2	2	1,919004351	4,0498
3	6	5,836209591	2,7298
4	24	23,50617513	2,0576
5	120	118,0916800	1,5903
6	720	710,0781846	1,3780
7	5040	4980,395832	1,1826
8	40320	39902,39545	1,0357
9	362880	359536,8728	0,9213
10	3628800	3598695,619	0,8296
11	39916800	39615625,05	0,7545
12	479001600	475687486,5	0,6919
13	6227020800	6187239475,	0,6389
14	87178291200	86661001741	0,5934
15	1,30767E + 12	1,30043E + 12	0,5539

Tabela I. O fatorial de n calculado pela definição (2ª coluna) e pela fórmula de Stirling (3ª coluna). A última coluna mostra o erro relativo que se comete ao usar a fórmula (1). O símbolo $E + 12$, que aparece no fatorial de 15, substitui a potência de 10 correspondente ($E + 12 = 10^{12}$)

Verdade? Claro que não. O fato de falhar para os primeiros números inteiros sempre foi considerado um defeito da tal fórmula e acabou provocando um novo esforço para entender o que realmente estava acontecendo. Foi assim que surgiu, em 1982, um aperfeiçoamento da aproximação (1), proposto por Weissman [2]. Ele sugeriu que $n!$ fosse calculado como

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\ [(n + 1/2)/e]^{(n+1/2)}$$

cujos resultados, apresentados na Tabela II, são sensivelmente melhores para pequenos valores de n. Essa comunicação feita de forma singela no American Journal of Physics, um periódico dedicado aos aspectos didáticos da Física, provocou uma verdadeira avalanche de cartas ao editor. Algumas tentando explicar os motivos do aperfeiçoamento [3], outras mostrando que Stirling já havia escrito a sua aproximação com o $(n + 1/2)$ do Weissman [4], cada uma a seu modo trazendo um pouco mais de luz ao assunto (veja também [5]). Quem se aproveitou dessa polêmica para dar uma verdadeira aula de como fazer matemática com criatividade foi o professor N.D. Mermin, da Universidade de Cornell [6]. As suas idéias foram fundamentais para o desenvolvimento desse artigo que tem como principal objetivo obter a fórmula de Stirling evitando o caminho tradicional que inclui a passagem ao contínuo[1]. A chave para entender a aproximação de Stirling está em um produtório de termos do tipo $\{[1+(1/J)]^{J+1/2}/e\}$, que pode ser investigado através do programa Maple de computação algébrica. O artigo se encerra com a obtenção de uma fórmula para calcular o número π que decorre da aproximação de Stirling.

n	n!	Fórmula de Stirling (eq. 2)	Erro (%)
1	1	1,027507735	2,7508
2	2	2,033310724	1,6655
3	6	6,071519620	1,1920
4	24	24,22261785	0,9276
5	120	120,9107948	0,7590
6	720	724,6238431	0,6422
7	5040	5068,048885	0,5565
8	40320	40517,97261	0,4910
9	362880	364474,0447	0,4393
10	3628800	3643220,982	0,3974
11	39916800	40061624,54	0,3628
12	479001600	480600339,2	0,3338
13	6227020800	6246263530,	0,3090
14	87178291200	87429094208	0,2877
15	1,30767E + 12	1,31119E + 12	0,2691

Tabela II. O fatorial de n calculado pela definição (2ª coluna) e pela fórmula de Weissman (3ª coluna). A última coluna mostra o erro relativo que se comete ao usar a fórmula (2). Observe como o erro é bem menor do que o anterior para pequenos valores de *n*. Quando *n* cresce, o erro da fórmula (2) aproxima-se da metade do erro da fórmula (1).

2. Reescrevendo o Fatorial

Para começar verifique que $n!$ pode ser escrito como:

$$n! = (1/2)((2/3)^2(3/4)^3 \ldots [(n-1)/(n)]^{n-1}\, n^n. \qquad (3)$$

É fácil. Basta observar que o denominador de cada uma das frações do produto coincide com o numerador da seguinte só que tem o expoente menor por uma unidade. Assim, se cancelássemos os denominadores, restariam apenas os

1 É importante ressaltar, porém, que trata-se de uma apresentação heurística, não de demonstração matemática.

numeradores com o expoente igual a 1 (como deve ser). Você deve estar se perguntando, por que razão escolhemos um jeito tão complicado para escrever o fatorial. A resposta é simples. É que dessa forma, $n!$ pode ser escrito como produto de fatores do tipo

$$1/[1 + (1/J)]^J, \tag{4}$$

com J variando de 1 a $(n-1)$. Quer verificar? Comece por $J = 1$. O resultado de $1/[1 + (1/1)]^1$ é $(1/2)$. Agora tome $J = 2$. Ficaremos com $1/[1 + (1/2)]^2 = 1/(3/2)^2 = (2/3)^2$. A seguir, $J = 3$. Nesse caso, teremos $1/[1 + (1/3)]^3 = (3/4)^3$. Como se pode ver, todos os fatores que comparecem na equação (3), exceto o n^n, podem ser escritos na forma (4), logo

$$n! = n^n \cdot \prod_{J=1}^{n-1} 1/[1 + (1/J)]^J = \frac{n^n}{\prod_{J=1}^{n-1} [1 + (1/J)]^J}. \tag{5}$$

A equação (5) já exibe pelo menos um termo (o n^n) da fórmula (1). Em compensação ela contém um produtório absolutamente estranho no denominador. Façamos uma tabela (Tabela III) para analisar o comportamento daqueles fatores.

J	(1 + 1/J) ^ (J)
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
6	2,52163
7	2,54650
8	2,56578
9	2,58117
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71814
100000	2,71827
1000000	2,71828

Tabela III. Evolução da J-ésima potência de $(1+1/J)$ para valores crescentes do inteiro J. O símbolo "^" é utilizado para indicar "elevado a". O resultado da operação quando J for extremamente grande, aproxima-se do número de Euler (e = 2,7182818...)

Observaram? A J-ésima potência de $[1 + (1/J)]$ se aproxima de 2,7182818... (que é a constante de Euler) quando J cresce. É uma pena que comece tão longe (para $J = 1$, $[1 + (1/J)]^J = 2$) e se aproxime tão lentamente (para $J = 1000$, $[1 + (1/J)]^J = 2{,}716923932$). Não fosse isso e nós poderíamos aproximar o produtório do denominador por (e^{n-1}), já que temos $(n - 1)$ fatores daquele mesmo tipo, multiplicados. Ficaríamos então com uma primeira aproximação dada por

$$n! \approx n^n/e^{n-1} = e\,(n/e)^n \tag{6}$$

3. Aperfeiçoando a estimativa

Para acelerar a convergência e ao mesmo tempo começar mais perto do número e, há um artifício muito interessante. Basta colocar no expoente de $[1 + (1/J)]$, o valor $(J + 1/2)$. Assim teremos (veja Tabela IV) já para $J = 1$, o valor 2,82... que está muito mais próximo de $e(=2{,}7182818..)$ do que o 2. O que você deve notar, entretanto, é que para grandes valores de J os fatores tendem ao mesmo valor que antes (o próprio e). A explicação para esse fato é que o $1/2$, do expoente, fica desprezível quando comparado com os grandes valores de J. OK!, você dirá, mas como fazer para esse expoente $(J + 1/2)$ aparecer na fórmula do fatorial? Ah!, isso também não é difícil. Basta reescrever todo o lado direito da equação (3) com expoentes fracionários, diferindo sempre de um. Veja como fica:

$$n! = (1/2)^{3/2}(2/3)^{5/2}(3/4)^{7/2} \ldots [(n-1)/n]^{n-1/2}\, n^{n+1/2}. \tag{7}$$

Observe que, novamente, os numeradores cancelam os denominadores e ficam com a potência desejada. Agora é só reconhecer que a equação (7) pode ser reescrita como

$$n! = \frac{n^{n+1/2}}{\prod_{J=1}^{n-1} [1 + (1/J)]^{J+1/2}} \tag{8}$$

e obter uma outra aproximação para o fatorial:

$$n! \approx \frac{n^{n+1/2}}{e^{n-1}} = e\sqrt{n}\,(n/e)^n \tag{9}$$

Construa você mesmo uma tabela para examinar a precisão dessa fórmula. Observe que ela já é bem melhor do que a fórmula (6), mas superestima demais o fatorial.

J	$(1 + 1/J)$ ^ $(J + 1/2)$
1	2,828427125
2	2,755675961
3	2,737067943
4	2,729575168
5	2,725817989
6	2,723667776
7	2,722322686
8	2,721425443
9	2,720797127
10	2,720340042
100	2,718304256
1000	2,718282055
10000	2,718281831
100000	2,718281828
1000000	2,718281828

Tabela IV. Evolução da $(J + 1/2)$-ésima potência de $(1+1/J)$ para valores crescentes do inteiro J. O símbolo "^" é utilizado para indicar "elevado a". O resultado da operação para grandes valores de J aproxima-se do mesmo valor de antes (e = 2,7182818...) mas a convergência é muito melhor. Observe que para $J = 100$ o resultado já é 2,71830, correto até a terceira casa decimal. Na Tabela III isso acontecia apenas para $J = 10000$.

4. Melhorando ainda mais

A comparação entre as fórmulas (1) e (9) indica que estamos no caminho certo (já obtivemos o expoente correto do n) mas há ainda uma dificuldade a ser superada. O fator multiplicativo de $\sqrt{n}\ (n/e)^n$ na equação (1) é $\sqrt{2\pi}$ e não o número de Euler (e) que aparece na equação (9). É certo que esses dois números não são tão diferentes assim ($\sqrt{2\pi} = 2.5066282\ \ldots$ enquanto $e = 2.7182818\ \ldots$) mas essa diferença acaba provocando a superestimação do fatorial. Como corrigir esse defeito? O melhor a fazer é voltar à equação (8). Ela é exata. Ao substituir todos os fatores do produtório do denominador por e^{n-1} estamos insistindo em cometer um equívoco. Veja porque. Na verdade, os primeiros termos do produtório (pequenos valores de J) são os menos "parecidos" com o número de Euler. A aproximação funciona melhor para valores maiores, conforme você pode ver na Tabela IV. Bem, reconhecido esse fato podemos implementar um aperfeiçoamento da fórmula (9) em dois passos: i) reescrevendo a equação (8) estendendo o produtório do denominador até $J = \infty$. Para não modificar o resultado será preciso colocar no numerador os mesmos termos que foram incluídos no denominador, isto é, $\prod_{k=n}^{\infty} [1 + (1/k)]^{k+1/2}$. Em seguida ii) tratando o produtório infinito do denominador sem usar a referida aproximação, que ficará reservada apenas para o numerador (que já começa em $k = n$).

Matematicamente, estaremos reescrevendo $n!$ como

$$n! = \frac{n^{n+1/2}}{\prod_{J=1}^{\infty} [1 + (1/J)]^{J+1/2}} \quad \prod_{k=n}^{\infty} [1 + (1/k)]^{k+1/2} \tag{10}$$

e para facilitar a nossa análise vamos dividir todos os termos dos produtórios pelo número e. Como o índice do produtório do denominador começa em 1 e o do numerador apenas em n, teremos que multiplicar o denominador por e^{n-1} para não alterar o resultado. Ficaremos então com

$$n! = \frac{n^{n+1/2}}{e^{n-1} \prod_{J=1}^{\infty} \left\{[1 + (1/J)]^{J+1/2}/e\right\}} \quad \prod_{k=n}^{\infty} \left\{[1 + (1/k)]^{k+1/2}/e\right\}. \tag{11}$$

Agora sim, temos em nosso poder uma expressão exata do que pode fornecer excelentes aproximações para o fatorial de n, se conseguirmos tratar adequadamente os dois produtórios. Para isso vamos recorrer ao programa Maple[2] que retorna, por exemplo, o resultado de uma operação como

> *product* (((1 + 1/*J*) (*J* +1/2))/*exp*(1.),*J* = 1..1000);

em menos de 10 segundos (em um micro 486). Construímos dessa forma a Tabela V que pode nos ajudar a descobrir uma coisa notável, a respeito do nosso produtório. Como se pode ver naquela tabela, o resultado dessa operação tende a 1.084437 quando o valor máximo de J tende a infinito. Curioso mesmo é observar que esse número é o mesmo que se obtém quando se calcula o quociente $e/\sqrt{2\pi}$

2 O software Maple é um dos programas disponíveis no mercado (há outros como o Mathematica, etc.) que permitem fazer cálculos algébricos em computadores pessoais. No caso aqui discutido o software não é fundamental, uma vez que um programa de 10 linhas, escrito em Basic ou Fortran poderia responder a nossa questão. O ponto que se quer enfatizar aqui é que programas como o Maple podem tornar mais amistoso o contato do estudante com o computador ao mesmo tempo em que oferece uma ferramenta de grande valia para o entendimento de importantes resultados em matemática.

(≈ 2.7182818 / 2.5066282 = 1.084437). De posse desse resultado, podemos voltar à equação (8) e reescrevê-la como

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n \prod_{k=n}^{\infty} \left\{[1 + (1/k)]^{k+1/2}/e\right\}, \tag{12}$$

uma vez que $\left(\dfrac{\sqrt{2\pi}}{e}\right) . \, e \, .\sqrt{n}\,(n/e)^n = \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$.

$JMax$	$\prod_{J=1}^{JMax} \left\{[(1 + 1/J)]^{(J+1/2)} / e\right\}$
100	1,0835431
200	1,0839881
300	1,0841374
500	1,0842572
1000	1,0843474
2000	1,0843928
3000	1,0844079
4000	1,0844158
infinito	1,0844375

Tabela V. Estudo do produtório de $(1 = 1/J)^{(J+1/2)}/e$, para J variando de 1 até um valor máximo ($JMax$). À medida em que $JMax$ cresce, o resultado do produto se aproxima de 1,0844375 (que é aproximadamente igual a $\sqrt{e/2\pi}$).

Essa fórmula mostra claramente porque a fórmula de Stirling consegue captar os principais ingredientes do fatorial. A diferença entre a equação (12), que é exata e a fórmula (1) é justamente o produtório do denominador

$$\prod_{k=n}^{\infty} \left\{[1 + (1/k)]^{k+1/2}/e\right\}, \tag{13}$$

que é igual a 1.084437 ($\approx e/\sqrt{2\pi}$) na pior das hipóteses (quando $n = 1$). Quando n cresce, o produtório (13) perde os primeiros termos, que incidentalmente são os maiores. Vale a pena olhar para um exemplo. Tome $n = 2$. Nesse caso, o produtório terá todos os termos de (13) menos o primeiro. Logo, o resultado de

$$\prod_{k=2}^{\infty} \left\{[1 + (1/k)]^{k+1/2}/e\right\} \tag{14}$$

será $1.084437/[(1+1)^{3/2}/e] \approx 1.042207$. Percebe-se dessa maneira que o erro relativo que se comete, ao desprezar o produtório (13), é dado por (1.042207 - 1.)/1.042207 = .040498 ou 4.05%, (veja Tabela I).

Agora que já chegamos à fórmula de Stirling e conhecemos a fonte de erro é fácil perceber que ela ainda pode ser aperfeiçoada. Para conseguir esse intento, tudo o que precisamos fazer é substituir o produtório em k da equação (13) por alguma coisa que imite o seu comportamento. Não faz parte dos objetivos desse artigo mostrar as razões que estão por trás dessa afirmação mas a verdade é que o fator $e^{1/12n}$ cumpre bem esse papel[3], conforme se vê na figura I. Com esse aperfeiçoamento (veja a Tabela VI), nossas estimativas para o fatorial ficam muito melhores. Por essa razão, doravante escreveremos a fórmula de Stirling como

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\, e^{1/12n} \tag{15}$$

n	n!	Stirling modificada (eq. 15)	Erro (%)
1	1	1,002274449	0,2274
2	2	2,000652048	0,0326
3	6	6,000599142	0,0099
4	24	24,00102389	0,0043
5	120	120,0026371	0,0022
6	720	720,0091873	0,0013
7	5040	5040,040582	0,0008
8	40320	40320,21779	0,0005
9	362880	362881,3779	0,0004
10	3628800	3628810,051	0,0003
11	39916800	39916883,11	0,0002
12	479001600	479002368,5	0,0002
13	6227020800	6227028660,	0,0001
14	87178291200	87178379323	0,0001
15	1,30767E + 12	1,30768E + 12	8E-05

Tabela VI. Comparação entre o fatorial de n, calculado pela definição (2ª coluna) e pela fórmula de Stirling modificada (eq. (15)) apresentada na 3ª coluna. O erro dessa aproximação é extremamente pequeno.

3 Escreva $(1+1/k)^{k+1/2}$ como $e^{(k+1/2)\ln(1+1/k)}$ e use a expansão de Taylor para o $\ln(1+1/k)$. Ficaremos com $e^{(k+1/2)(1/k-1/2k^2+1/3k^3-\ldots)} \approx e^{1+1/12k^2}$ que depois de dividido por e resulta em $e^{1/12k^2}$. Como o produto das exponenciais se transforma em exponencial da soma, é possível usar a fórmula de Euler-McLaurin para escrever que $\exp[\sum_{k=n}^{\infty}(1/12k^2)] \approx \exp[-1/12k\,|_n^{\infty}] = \exp(1/12n)$.

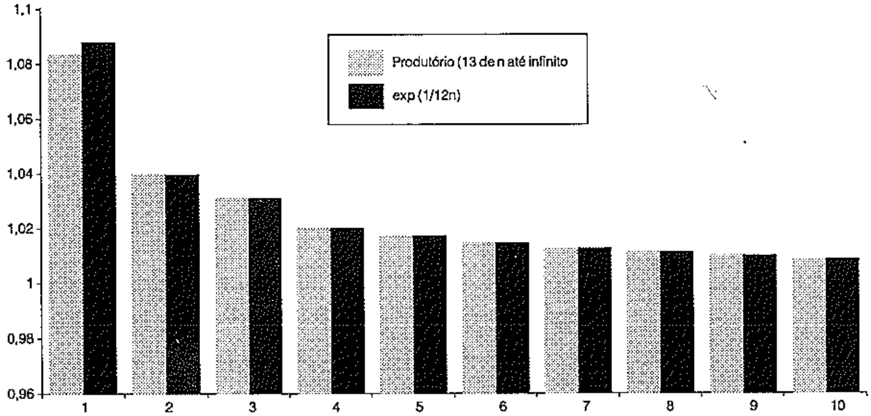

Figura I. Gráfico de barras mostrando a semelhança entre o resultado do produtório da eq. (13), de n até infinito, e a exponencial de $1/12n$. Na escala da figura a diferença só é perceptível para $n \leq 3$.

5. Stirling procura Wallis

Já vimos que a fórmula de Stirling contém o π de forma explícita. A pergunta natural que surge então é se nós poderíamos utilizá-la para obter estimativas para aquele irracional. A resposta é positiva, mas para atingir esse objetivo será preciso lançar mão de um resultado da análise combinatória. Você sabe qual é a probabilidade de obter n caras e n coroas quando uma moeda é lançada $2n$ vezes? Bem, para cada lançamento da moeda temos dois resultados possíveis (*cara* ou *coroa*). Então, lançando a moeda 2 vezes você poderá obter $4(= 2^2)$ resultados *(cara-cara, cara-coroa, coroa-cara, coroa-cara).* Da mesma forma, ao lançar a moeda três vezes você poderá obter $8(= 2^3)$ saídas diferentes. Generalizando, para $2n$ lançamentos da moeda, serão 2^{2n} as possíveis saídas. Mas quantas delas nos servem? Ora, nós estamos interessados naquelas saídas que tenham o mesmo número (n) de caras e coroas. Portanto, o resultado é a combinação de $2n$, n a n, ou seja:

$$\Omega = \frac{(2n)!}{n!n!}, \tag{16}$$

uma vez que a ordem de saída das caras e coroas não tem a menor importância. Logo, a probabilidade de obter as n caras e n coroas em $2n$ lançamentos da moeda é igual ao número de saídas possíveis obedecendo aquela prescrição (Ω), dividido pelo número total de possibilidades (2^{2n}),

$$P(2n,n) = \frac{\Omega}{(2^{2n})} = \frac{(2n)!}{n!n!(2^{2n})} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot (2^{2n})}. \tag{17}$$

Agora vamos usar a fórmula de Stirling (15) para reescrever a equação (17). O resultado é:

$$P(2n,n) \approx \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\,(2n/e)^{2n}e^{1/24n}}{(2^{2n})[\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^{n}e^{1/12n}]^{2}}, \tag{18}$$

ou ainda

$$P(2n,n) \approx \frac{e^{(1/24n - 1/6n)}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{e^{-1/8n}}{\sqrt{\pi n}}. \tag{19}$$

Mas se voltarmos à equação (17) e utilizarmos a velha definição do fatorial ($n! = n(n-1)(n-2)\ldots1$) encontraremos, depois de algumas simplificações, que

$$P(2n,n) = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n)}. \tag{20}$$

n	(eq. 21 sem exp $(-1/4n)$)	(eq. 21 completa)
2	3,555555556	3,137766765
3	3,413333333	3,140418269
4	3,343673469	3,141090535
5	3,302393550	3,141333916
6	3,275101041	3,141442390
7	3,255721745	3,141497822
8	3,241251871	3,141529034
9	3,230036466	3,141547928
10	3,221088997	3,141560026
11	3,213784940	3,141568127
12	3,207709732	3,141573755
13	3,202577397	3,141577785
14	3,198184287	3,141580746
15	3,194381452	3,141582970
16	3,191057433	3,141584673
17	3,188127169	3,141586000
18	3,185524617	3,141587048
19	3,183197718	3,141587886
20	3,181104886	3,141588566

Tabela VII. Estimativas do irracional π calculadas com a fórmula de Wallis (eq. (21)). A segunda coluna foi obtida sem levar em conta a exponencial e a terceira coluna corresponde à fórmula completa (com a exponencial).

A comparação das fórmulas (19) e (20) nos conduz ao resultado

$$\pi \approx \frac{e^{-1/4n}}{n}\left(\frac{2.4.6.8...(2n)}{1.3.5.7...(2n-1)}\right)^2, \tag{21}$$

ou ainda a

$$\pi \approx 4(2/3)(4/3)(4/5)(6/5)(6/7)...((2n)/(2n-1)).e^{-1/4n}, \tag{22}$$

se você observar que o n do denominador da equação (21) cancela o n de um dos dois ($2n$) do numerador (o 2 que sobra vai se juntar com um dos dois 2 lá da frente e se transformar em 4). Dessa forma, a menos do 2 que sobrou sozinho e do 1 no denominador, todos os outros inteiros pares do numerador e inteiros ímpares do denominador devem aparecer duas vezes no produto (afinal está tudo elevado ao quadrado). É por isso que a equação (22) tem o 4 dividido por 3 e por 5, e o 5 tanto aparece na fração (4/5) quanto em (6/5). A fórmula (22) aqui obtida, mesmo sem a exponencial de ($-1/n$), é conhecida como fórmula de Wallis. Ela permite estimar o número π de forma consistente mas a convergência é extremamente lenta (para n=50 o resultado é 3,1573) se a exponencial for ignorada. Os resultados, no entanto, ficam muito melhores quando se usa a expressão completa (veja Tabela VII). Com ela, para $n = 8$ já se obtém para π o valor 3,1415 e com $n = 37$ a estimativa já é 3,141592, correta até a sexta casa decimal.

Referências

[1] Cálculo Diferencial e Integral I, V.I. R. Courant (Editora Globo, Porto Alegre, 1970) pág. 361.

[2] "An improved analytical approximation to n!", Y. Weissman, Am. J. Phys. 51, 9 (1983)

[3] "Reply to a letter by Weissman on Stirling's approximation", J.B. Dence, Am. J. Phys. 51,777 (1983)
"More about approxiations to n!", W.A. Bowers, Am. J. Phys. 51, 778 (1983)
"Analytical approximation to n!", J.D. Vedder, Am. J. Phys. 51, 779 (1983)

[4] "Approximating n!. Historical origins and error analysis", I. Tweddle, Am. J. Phys. 52, 487 (1984)

[5] "Another improvement to Stirling's approximation", D.B. Chesnut, Am. J. Phys. 52, 299 (1984)
"Mathematical basis for Weissman's approximation to n! ", R.K. Pathria, Am. J. Phys. 53, 81 (1985)

[6] "Stirling's formula", N.D. Mermin, Am. J. Phys. 52, 362 (1984)

Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rib. Preto
Universidade de São Paulo
Av. Bandeirantes, 3900 - CEP 14040-901
Ribeirão Preto - São Paulo - Brasil